25/06/2020

3ª Prova de Equações Diferenciais e Aplicações (MAT 130)

Prof. Antônio L. Pereira

1. Encontre a solução geral do sistema dado:

a)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Autovalores $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\therefore \boxed{\lambda_1 = 1}$ ou $\boxed{\lambda_2 = 4}$

- Autovetores:

- $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$

Atribuindo-se o valor arbitrário $y = 1$, temos $x = -2$, logo o vetor associado $\boxed{v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

- $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$

Atribuindo-se o valor arbitrário $x = 1$, temos $y = 1$, logo o vetor associado $\boxed{v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

Logo, a solução geral do sistema é:

$$\boxed{z(t) = c_1 \cdot e^{1t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

© '76, '20 SANRIO

P3 de EDO - Dilma Lidia P. Pedro Ríos – Nº USP: 2246547

/ /

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

• Autovalores $\Rightarrow \begin{bmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-6-\lambda)(4-\lambda) - (-25) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\therefore \boxed{\lambda = -1}$

• Autovetor $\Rightarrow \begin{bmatrix} \overbrace{-6-(-1)}^{=-5} & 5 \\ -5 & \underbrace{4-(-1)}_{=5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 0 \\ -5x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$

Atribuindo-se o valor arbitrário $x = 1$, temos $y = 1$, logo o vetor associado $\boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, um autovetor

• Precisamos encontrar o autovetor generalizado.

$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 5y = 1 \\ -5x + 5y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{5y - 1}{5}$

ou seja, $x = y - 1/5$

Atribuindo-se o valor arbitrário $y = 1$, temos $x = 4/5$, logo o vetor associado $\boxed{v_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}}$, um autovetor generalizado.

Temos então que a solução geral do sistema é:

$$\boxed{z(t) = c_1 e^{-1t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 t e^{-1t} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

/ /

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

• Autovalores $\Rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda).(6-\lambda) - (-10) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 34 = 0$

$\therefore \boxed{\lambda_1 = 5+3i}$ ou $\boxed{\lambda_2 = 5-3i}$

• Autovetores:

• $\lambda_1 = 5+3i \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-(5+3i) & 5 \\ -2 & 6-(5+3i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -(1+3i)x + 5y = 0 & \text{(I)} \\ -2x + (1-3i)y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

De (I) temos $x = \dfrac{-5y}{-(1+3i)} = \dfrac{5y}{(1+3i)}$ e de (II) temos $x = \dfrac{y(1-3i)}{2}$

Note que $x = \dfrac{5y}{(1+3i)} \dfrac{(1-3i)}{(1-3i)} = \dfrac{5y(1-3i)}{1-3i+3i-9i^2} = \dfrac{5y(1-3i)}{10} = \dfrac{y(1-3i)}{2} = x$

I II

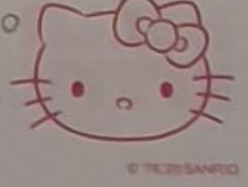
$\therefore x = \dfrac{y(1-3i)}{2}$

Atribuindo-se o valor arbitrário $y = 2$, temos $x = 1-3i$, logo o vetor associado $\boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

• $\lambda_2 = 5-3i \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-(5-3i) & 5 \\ -2 & 6-(5-3i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1+3i & 5 \\ -2 & 1+3i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (-1+3i)x + 5y = 0 \\ -2x + (1+3i)y = 0 \end{cases}$

continua →



/ /

$$\begin{cases} (-1+3i)x + 5y = 0 & \text{(I)} \\ -2x + (1+3i)y = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) temos $x = \dfrac{-5y}{(-1+3i)}$ e de (II) temos $x = \dfrac{y(1+3i)}{2}$.

Note que $\underset{\text{I}}{x} = \dfrac{-5y}{(-1+3i)} \cdot \dfrac{(-1-3i)}{(-1-3i)} = \dfrac{5y(1+3i)}{1+3i-3i-3i^2} = \dfrac{5y(1+3i)}{10} = \dfrac{y(1+3i)}{2} = \underset{\text{II}}{x}$

$\therefore\ x = \dfrac{y(1+3i)}{2}$

Atribuindo-se o valor arbitrário $y = 2$, temos $x = 1+3i$, logo o vetor associado $\boxed{v_2 = \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

$x = e^{5+3i} \cdot \begin{bmatrix} 1-3i \\ 2 \end{bmatrix}$ e $y = e^{5-3i} \cdot \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}$

Logo a solução geral é

$$\boxed{z(t) = c_1 \cdot e^{(5+3i)t} \cdot \begin{bmatrix} 1-3i \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{(5-3i)t} \begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}}$$

ou ainda

$$\boxed{z(t) = k_1 e^{5t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \operatorname{sen}(3t) \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + k_2 e^{5t} \left(\cos(3t) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen}(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

onde c_1 e c_2, k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

(2) Seja A a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Determine os autovalores e autovetores de A.

b) É possível encontrar soluções constantes para o problema não homogêneo $\dot{x} = Ax + b$, sendo b um vetor constante? Justifique.

c) Determine a solução do problema $\dot{x} = Ax + b$, sendo $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

• Autovalores $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - (+1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0$

$\therefore \boxed{\lambda_1 = 0}$ ou $\boxed{\lambda_2 = 2}$

• Autovetores:

• $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$

Atribuindo-se o valor arbitrário $x = 1$, temos que $y = 1$, logo o vetor associado $\boxed{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

• $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$

Atribuindo-se o valor arbitrário $x = 1$, temos que $y = -1$, logo o vetor associado $\boxed{v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$, um autovetor.

Onde a solução geral do sistema homogêneo associado é:

$X(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

6

/ /

b) $\dot{X} = AX + b$ gera soluções do tipo:

$$X(t) = \underbrace{\text{Solução Particular}}_{X_p} + \underbrace{\text{Solução da homogênea associada}}_{\text{Calculado no item 2a}}$$

$$X_p = \Phi(t) \int \underbrace{\Phi^{-1}}_{\text{cálculo apresentado no exercício 2c}} \cdot \underbrace{b}_{\text{constantes}} \, dt$$

$$X_p = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2\, e^{-2t} & -1/2\, e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \int \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 e^{-2t} - b_2 e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) \cdot t \\ \frac{b_1 e^{-2t}}{2} - \frac{b_2 e^{-2t}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (b_1 + b_2)t + (b_1 - b_2) \cdot 1/2 \\ (b_1 + b_2)t - (b_1 - b_2) \cdot 1/2 \end{bmatrix}$$

A solução geral seria

$$X(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (b_1 + b_2)t + (b_1 - b_2)\, 1/2 \\ (b_1 + b_2)t - (b_1 - b)\, 1/2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para gerar soluções constantes, precisamos que

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (b_1 + b_2)t + (b_1 - b_2) 1/2 \\ (b_1 + b_2)t - (b_1 - b_2) 1/2 \end{bmatrix} = c_2 \cdot e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tomemos $t = 0 \Rightarrow c_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{b_1 + b_2}{2} \\ 0 & \frac{-b_1 + b_2}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ -b_1 + b_2 \end{bmatrix}$

Atribuindo-se os valores arbitrários $\boxed{b_2 = 0}$, $\boxed{b_1 = 1}$, obtemos $\boxed{c_2 = 1/4}$

Logo é possível encontrar soluções constantes sendo b um vetor constante.

c) $\dot{X} = Ax + b$, sendo $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

Do item a deste exercício encontramos $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$,

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Logo, a solução geral do sistema homogêneo associado seria:

$$X(t) = c_1 . e^{0t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c^2 . e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 . e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a matriz fundamental é:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{0t} & e^{2t} \\ e^{0t} & -e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix}$$

Vamos encontrar $\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi(t) . \Phi^{-1}(t) = Id$$

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{I} \quad a + c.e^{2t} = 1 \\ \text{II} \quad a - ce^{2t} = 0 \Rightarrow a = ce^{2t} \\ \text{III} \quad b + de^{2t} = 0 \Rightarrow b = -de^{2t} \\ \text{IV} \quad b - de^{2t} = 1 \end{cases}$$

Subst. a de II em I, temos:

$$\text{I} \quad a + ce^{2t} = ce^{2t} + ce^{2t} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} . e^{-2t} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Subst. b de III em IV, temos:

$$\text{IV} \quad b - de^{2t} = -de^{2t} - de^{2t} = 1 \Rightarrow d = \frac{-1}{2} e^{-2t} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 e^{-2t} & -1/2 e^{-2t} \end{bmatrix}$$

continua

8

/ /

Uma solução particular é:

$$X_p = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\cdot b\, dt$$

$$X_p = \Phi(t)\int \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2\, e^{-2t} & -1/2\, e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \Phi(t)\int \begin{bmatrix} 3/2 - 5/2 \\ 3/2\, e^{-2t} + 5/2\, e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \Phi(t)\int \begin{bmatrix} -1 \\ 4e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

$$X_p = \Phi(t)\cdot \begin{bmatrix} -t \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} -t + e^{2t}\cdot(-2e^{-2t}) \\ -t - e^{2t}\cdot(-2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

$$X_p = \begin{bmatrix} -t-2 \\ -t+2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a solução geral é:

$$\boxed{X(t) = \begin{bmatrix} -t-2 \\ -t+2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

Onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

HELLO KITTY® spiral®

③ Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Encontre uma matriz M tal que $M^{-1} \cdot A \cdot M$ é da forma $D + N$, sendo D uma matriz diagonal e N uma matriz nilpotente.

b) Use o item ⓐ e a definição de exponencial de matrizes para encontrar a matriz e^{A}.

c) Determine uma solução do sistema matricial: $\frac{d}{dt} U(t) = U(t)$

d) Use o item ⓒ para encontrar a matriz exponencial $e^{t.A}$. Compare com o resultado obtido em ⓑ.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix} = [(1-\lambda)^3 + 1 + 1] - [(1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^3 + 2 - 3 + 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \therefore \lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 3$$

• $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

Atribuindo-se valores arbitrários $z = 0$, $y = 1$, $x = -1$, logo $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um auto-vetor

• $\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 & \text{I} \\ x - 2y + z = 0 & \text{II} \\ x + y - 2z = 0 & \text{III} \end{cases}$

/ /

Igualando z em I e II, temos:

$$-2x + y = x - 2y \Rightarrow -3x = -3y \Rightarrow x = y$$

Subst $x = y$ em III, temos

$$x + x - 2z = 0$$

$$2x = 2z \Rightarrow x = z$$

Atribuindo-se os valores arbitrários $z = 1$, temos $x = 1$ e $y = 1$, onde $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ um autovetor

Si atribuirmos, no caso de $\lambda = 0$, que tem multiplicidade 2, os valores $z = 1$, $\; = 0$, temos $x = -1$, onde $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Portanto $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

$\therefore \; M \cdot A \cdot M^{-1} = D + N$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{nilpotente}}$$

Logo:

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

/ /

b) $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!}$

Como $A = M.D.M^{-1}$, então $e^A = M.e^D.M^{-1}$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$e^A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} -1 & e^3 & -1 \\ 1 & e^3 & 0 \\ 0 & e^3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3+2}{3} \end{bmatrix}$$

c) Do sistema $\frac{dX}{dt} = AX$, a solução seria dada por:

$$X(t) = c_1 e^0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^0 & e^{3t} & -e^0 \\ e^0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & e^{3t} & -1 \\ 1 & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 1 \end{bmatrix} = M(t)$$

/ /

Temos que $U(t) = M(t) . M(0)^{-1}$

$$M(0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \therefore \quad M(0)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{3t} & -1 \\ 1 & e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/3 e^{3t} + 1/3 & -2/3 + 1/3 e^{3t} + 1/3 & 1/3 + \frac{1}{3} e^{3t} - 2/3 \\ -1/3 + 1/3 e^{3t} + 0 & 2/3 + 1/3 e^{3t} + 0 & -1/3 + 1/3 e^{3t} + 0 \\ 0 + 1/3 e^{3t} - \frac{1}{3} & 1/3 e^{3t} - 1/3 & 0 \; e^{3t}/3 + 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{U(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} \end{bmatrix}}$$

d) $U(t) = e^{tA}$

então: $$e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} \\ \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}-1}{3} & \frac{e^{3t}+2}{3} \end{bmatrix}$$

O resultado é idêntico ao obtido no item b se considerarmos $U(1) = e^{1.A} = e^{A}$.