

Funções de Várias Variáveis

Funções de Várias Variáveis

Definição 1. Uma função a n variáveis independentes é uma lei que associa a cada ponto $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, um único número real $y \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 2. Seja $z = f(x_1, x_2)$ uma função a duas variáveis independentes, o gráfico desta função é definido por $G(f) = \{(x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x_1, x_2)\}$.

Exemplo 1. Sejam x_1, x_2 e x_3 as quantidades de produção de três insumos agrícolas, em ton/ha, o custo da produção é definido por:

$$c(x_1, x_2, x_3) = 1200 + 5x_1 + 9x_2 + 10x_3$$

Encontre o custos para as produções: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 5$. Qual o custo fixo?

$$c(x_1, x_2, x_3) = c(2, 3, 5) = 1200 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 5 \\ = 1200 + 10 + 27 + 50$$

$$c(2, 3, 5) = 1287 \text{ reais}$$

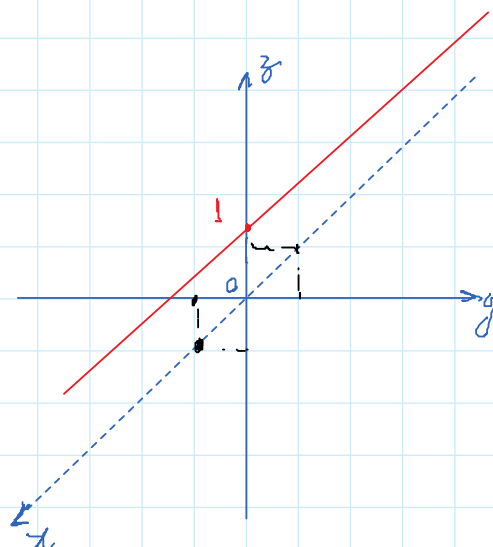
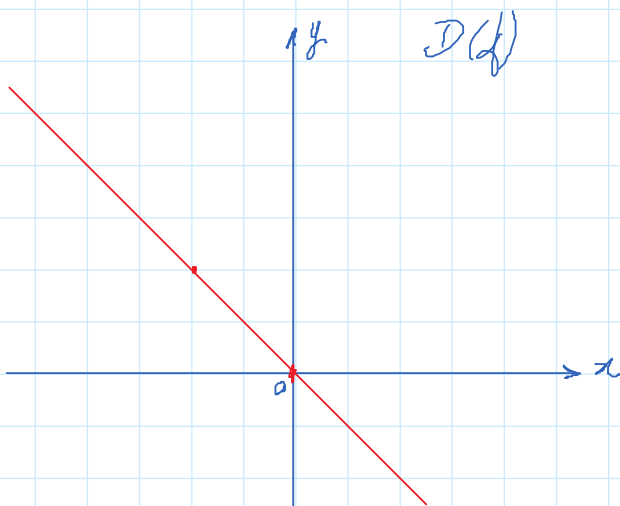
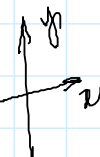
$$\text{Custo fixo: } 1200$$

Exemplo 2. Dada a função $z = 2^{x+y}$, encontre o(s) ponto(s) (x, y) tal(is) que $f(x, y) = 1$. Represente a solução graficamente.

$$D_f = \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y)$$

$$2^{x+y} = 1 \\ 2^{x+y} = 2^0 \\ x+y = 0 \Rightarrow y = -x$$

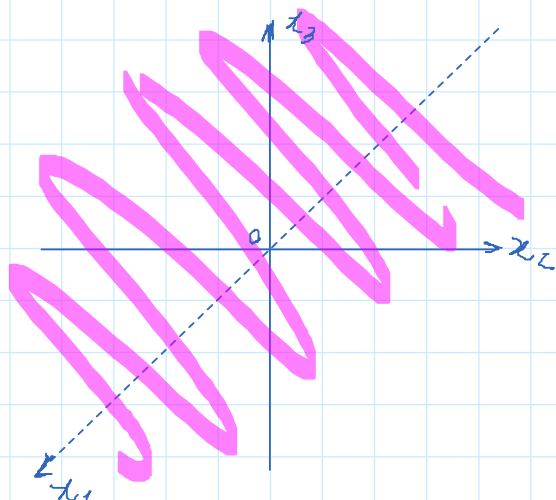
$$y = -x$$



Exemplos. Encontre o domínio das funções a seguir e o represente graficamente.

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}^3$$

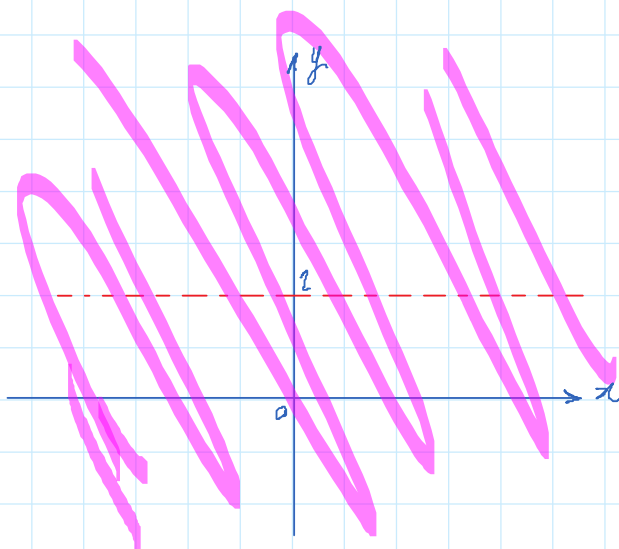


(b) $f(x, y) = \frac{x}{y-2}$

$$y-2 \neq 0$$

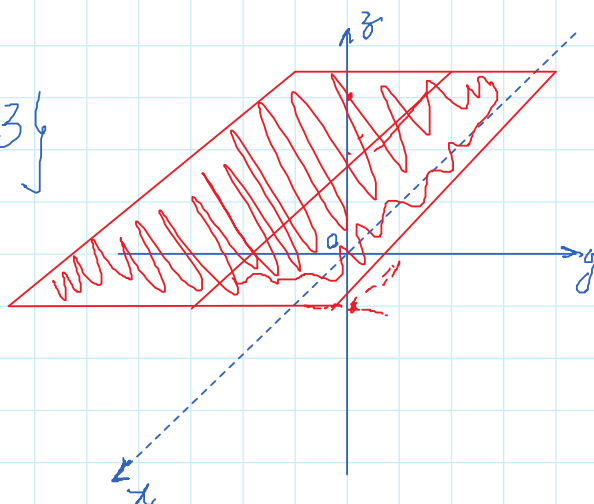
$$y \neq 2$$

$$\mathcal{D}f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2 \}$$



(c) $f(x, y, z) = \frac{x+y}{z-3}$

$$\mathcal{D}f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 3 \}$$

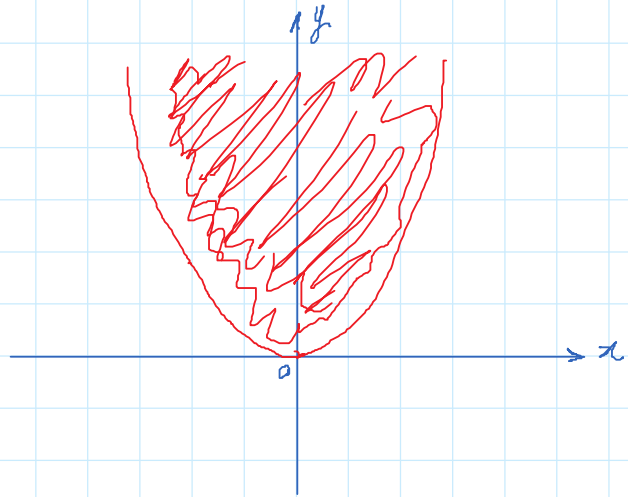


x'

(d) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

$$y - x^2 \geq 0$$
$$y \geq x^2$$

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$



Esboce, no primeiro octante, o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

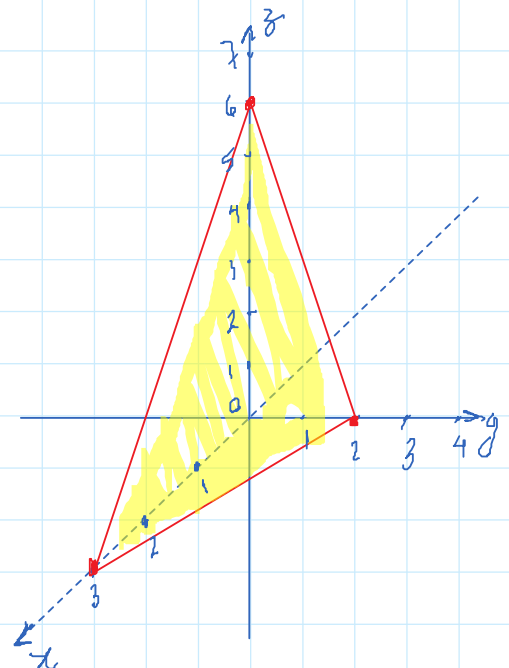
$$z = 6 - 2x - 3y \quad \leftarrow \text{plano}$$

$$2x + 3y + z = 6 \quad \leftarrow \text{equação plano}$$

$$x=0; y=0 \Rightarrow z=6$$

$$x=0; z=0 \Rightarrow y=2$$

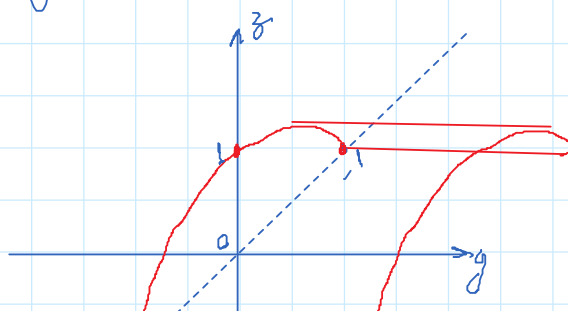
$$y=0; z=0 \Rightarrow x=3$$

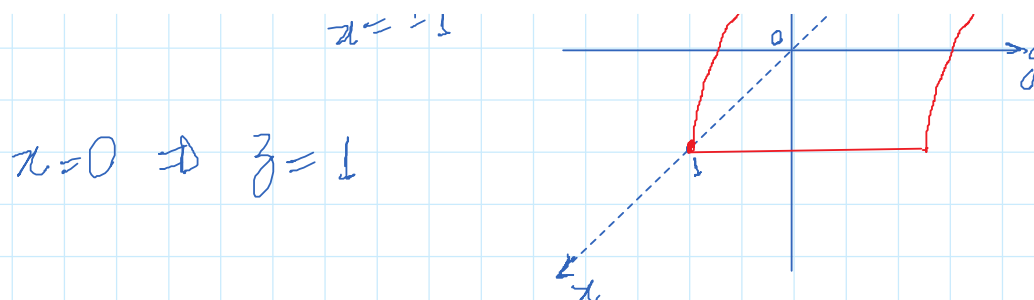


b) $f(x, y) = 1 - x^2 \Rightarrow$ não depende de y

$$z = 1 - x^2$$

$$z=0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$





Limite e Continuidade

Definição. Seja $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função a n variáveis independentes. O limite de $y = f(\mathbf{x})$ quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$; $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ é denotado por:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}, y) = L$$

Caso particular:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

Exemplo 1. Dada a função $z = f(x, y) = e^{x-y}$, calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} f(x, y)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} e^{x-y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} e^{0-(-2)} = e^2$$

Exemplo 2. Seja a função

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x + y; & \text{se } (x, y) \neq (2, 3) \\ 6; & \text{se } (x, y) = (2, 3) \end{cases}$$

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y).$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} x + y = 2 + 3 = 5$$

Definição: Seja a função $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função a n variáveis independentes, com domínio Df e contradomínio C é contínua em $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, se e somente se:

- (i) $\exists f(a_1, a_2, \dots, a_n)$
- (ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemplo 1: Seja a função

$$z = f(x, y) = \begin{cases} x + y + 2; & \text{se } (x, y) \neq (1, 1) \\ 6; & \text{se } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

Verifique se esta função é contínua em (1,1)

(i) $\exists f(1,1) \Rightarrow f(1,1) = 6 \quad \checkmark$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x + y + 2 = 1 + 1 + 2 = 4 \quad \checkmark$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = 4 \neq f(1,1) = 6$

Logo, a função não é contínua em (1,1)

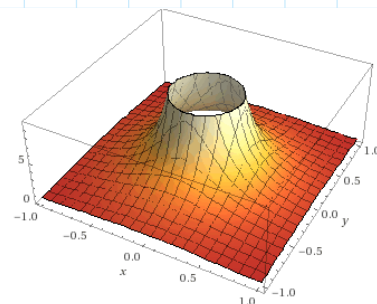
Exemplo 2: Seja a função

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}; & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1; & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifique se esta função é contínua em (0,0)

(i) $f(0,0) = 1 \quad \checkmark$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty$ (diverge)
 $\neq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$
 $\therefore$ a função não é contínua em (0,0)



$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Derivadas Parciais

Definição: Seja $z = f(x, y)$ uma função a duas variáveis independentes, as derivadas parciais de primeira ordem da função num ponto $P(x, y)$ do seu domínio são dadas por:

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

se os limites existirem.

Exemplo: Dada a função a seguir, encontre suas derivadas parciais.

$$z = x^2 + y$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + y - (x^2 + y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y - \cancel{x^2} - y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2x \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y + \Delta y - (x^2 + y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + y + \Delta y - \cancel{x^2} - y}{\Delta y} = 1$$

ou

$$z = x^2 + y \begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x \\ \frac{dz}{dy} = 1 \end{cases}$$

Na prática $\Rightarrow$ Regras de Derivação

Exemplos: Obter as derivadas parciais de primeira ordem das funções a seguir.

(a) $f(x, y) = z = x \ln(y) + \sqrt{x} - 4$

$$\frac{dz}{dx} = 1 \cdot \ln(y) + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \ln(y) + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dz}{dy} = x \cdot \frac{1}{y} + 0 = \frac{x}{y}$$

(b) $f(x, y) = z = x \cos(x) + \arctg(y) - y^3$

$$\frac{dz}{dx} = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) + 0 + 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos(x) - x \sin(x)$$

Recordando:

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = a \cdot u \rightarrow y' = a \cdot u'$$

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \arctg(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = a^u \rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$\frac{dz}{dy} = 0 + \frac{1}{1+y^2} - 3y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{1+y^2} - 3y^2$$

$$y = a^u \rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

$$(c) f(x, y) = z = 2^{x+y} \rightarrow z = 2^x \cdot 2^y$$

$$\frac{dz}{dx} = 2^y \cdot 2^x \cdot \ln(2) \cdot 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 2^{x+y} \ln(2)$$

$$\frac{dz}{dy} = 2^x \cdot 2^y \cdot \ln(2) \cdot 1$$

$$\frac{dz}{dy} = 2^{x+y} \ln(2)$$