Resolução da Quinta prova

Nícolas André da Costa Morazotti

29 de junho de 2020

1 Primeira questão

A placa desenhada na figura 1 é muito alta e larga, mas tem uma espessura d muito pequena. Pela placa circula uma densidade de corrente uniforme $\mathbf{j}$, na direção indicada. Adote o sistema de referências desenhado no canto inferior esquerdo; assim, $z = 0$ define o plano da placa.

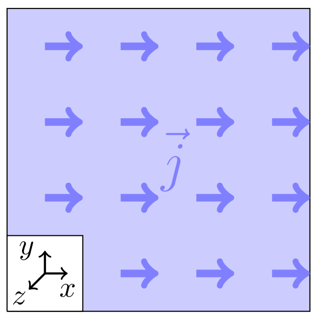

Figura 1: Questão 1.

(a) Dadas três coordenadas quaisquer x, y e z, calcule o potencial vetor $\mathbf{A}$ no ponto (x, y, z);

Para um ponto fora da placa, podemos utilizar a analogia com o potencial elétrico: suponha que, ao invés da presente placa, tenhamos uma placa carregada elétricamente com ρ. O campo elétrico fora da placa pode ser obtido pela lei de Gauss, utilizando uma superfície gaussiana cilíndrica de raio a e altura d e considerando desprezível o campo pela lateral.

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$= \frac{\rho\pi a^2 d}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

$$2E\pi a^2 = \frac{\rho\pi a^2 d}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}. \tag{4}$$

O potencial deve diminuir conforme a distância da placa aumenta, o que quer dizer que, para $z > 0$, $V = -Ez$ e, para $z < 0$, $V = Ez$. Desta forma, podemos escrever $V = -E|z|$.

Pela analogia, obtemos $\mathbf{A}$ substituindo $\rho \to \mathbf{j}$, $\varepsilon_0 \to 1/\mu_0$ em V. Assim,

$$\begin{align}
\mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 \mathbf{j} d}{2}|z| \tag{5}\\
&= -\hat{x}\frac{\mu_0 j d}{2}|z|. \tag{6}
\end{align}$$

(b) Calcule o campo magnético no mesmo ponto (você pode aproveitar o resultado do item 1a ou empregar a lei de Ampère, como preferir).

O campo magnético pode ser obtido tomando o rotacional do resultado 6.

$$\begin{align}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \tag{7}\\
&= \hat{x}\left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right) \tag{8}\\
&= \hat{y}\frac{\partial}{\partial z}A_x \tag{9}\\
&= -\hat{y}\frac{\mu_0 j d}{2}\frac{\partial |z|}{\partial z}. \tag{10}
\end{align}$$

Para $z > 0$, $|z| = z \implies \partial|z|/\partial z = 1$. Para $z < 0$, $|z| = -z \implies \partial|z|/\partial z = -1$. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{B} = -\hat{y}\frac{\mu_0 j d}{2}\frac{z}{|z|}. \tag{11}$$

Isso naturalmente nos dá o sentido de $\mathbf{B}$ acima e abaixo do plano, equivalente ao encontrado pela regra da mão direita.

2 Segunda questão

O circuito fechado, quadrado de lado a, da figura 2 é alimentado por uma bateria (que não aparece na figura), que mantém uma corrente I no sentido indicado. No mesmo plano está um fio retilíneo muito longo, que corre paralelamente a dois dos lados do quadrado, a uma distância a do lado mais próximo. Desconsidere a ação da gravidade e adote o sistema de referências indicado.

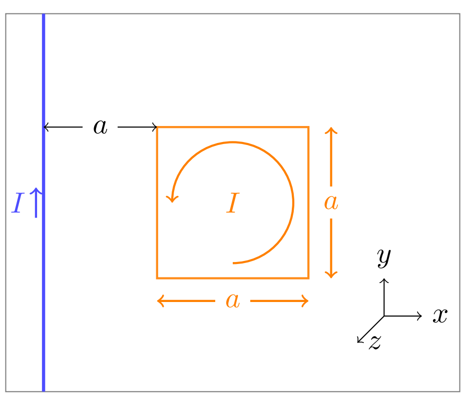

Figura 2: Questão 2.

(a) Encontre a força resultante sobre o quadrado;

A força resultante sobre o quadrado pode ser calculada integrando sobre cada segmento do quadrado a força de Lorentz

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \tag{12}$$

em que I é a corrente do circuito quadrado e $\mathbf{B}$ é o campo magnético gerado pelo fio no ponto do circuito. O campo magnético pode ser calculado utilizando a Lei de Ampère, integrando num caminho circular.

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I \tag{13}$$

$$B \cdot 2\pi x = \mu_0 I \tag{14}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}. \tag{15}$$

A direção do campo, no plano da espira, é em $-\hat{z}$, pela regra da mão direita. x é medido a partir do fio. Temos que integrar a força 12 sobre quatro caminhos: em cima, em baixo, à esquerda e à direita.

$$\mathbf{F} = \int_{cima} \mathrm{d}\mathbf{F} + \int_{esquerda} \mathrm{d}\mathbf{F} + \int_{baixo} \mathrm{d}\mathbf{F} + \int_{direita} \mathrm{d}\mathbf{F}. \tag{16}$$

Em cima, parametrizaremos o caminho $\mathrm{d}\mathbf{l} = -\hat{x}\mathrm{d}x$, com x variando de a a $2a$. À esquerda, com $x = a$, paremetrizamos $\mathrm{d}\mathbf{l} = -\hat{y}\mathrm{d}y$, com y variando de $-a/2$ a $a/2$. Em baixo, $\mathrm{d}\mathbf{l} = \hat{x}\mathrm{d}x$, $x \in [a, 2a]$. Por fim, à direita, $\mathrm{d}\mathbf{l} = \hat{y}\mathrm{d}y$, $y \in [-a/2, a/2]$ e $x = 2a$. Escritas na ordem,

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left[\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x}(-\hat{x}) \times (-\hat{z}) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{a}(-\hat{y}) \times (-\hat{z}) + \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{x}(\hat{x}) \times (-\hat{z}) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{2a}(\hat{y}) \times (-\hat{z}).\right] \tag{17}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left[(-\hat{y})\ln(2) + \hat{x}\frac{a}{a} + \hat{y}\ln(2) - \hat{x}\frac{a}{2a}\right] \tag{18}$$

$$= \hat{x}\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}. \tag{19}$$

(b) Calcule o torque sobre o quadrado;

Utilizando a definição tradicional de torque,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\rho} \times \mathrm{d}\mathbf{F} \tag{20}$$

$$= Ix\hat{x} \times \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Uma vez que o produto vetorial respeita associatividade, já podemos de antemão ignorar as forças sobre o caminho de cima e sobre o caminho de baixo. Assim, o torque é calculado como

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a}{a}\hat{x} \times (-\hat{y}) \times (-\hat{z})\mathrm{d}y + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2a}{2a}\hat{x} \times \hat{y} \times (-\hat{z})\mathrm{d}y\right] \tag{22}$$

$$= 0. \tag{23}$$

Poderíamos ter cancelado tais termos sem os calcular pois, nos caminhos à esquerda e à direita, $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, que é paralelo a $\mathbf{B}$ e portanto o torque é nulo. Outra maneira seria olhar a expressão

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \tag{24}$$

Pela regra da mão direita, o momento magnético aponta na direção $\hat{z}$, que é paralela a $\mathbf{B}$ e portanto o torque é nulo.

(c) A partir do momento magnético do circuito, podemos calcular sua energia, devida ao campo magnético do fio. Não é necessário calcular a energia, mas discuta, qualitativamente, o que acontecerá com a energia se o circuito se aproximar do fio. A sua conclusão é compatível com a força calculada no item 2a?

Veja que a energia magnética é algo da forma

$$U = -\mu B \cos(\theta). \tag{25}$$

Como o momento magnético aponta em $\hat{z}$ e B aponta em $-\hat{z}$, $\cos(\theta) = -1$, tal que $U = \mu B$. Como B aumenta ao se aproximar do fio, a energia magnética também aumenta. Isso fica claro ao olhar para a força, que aponta na direção $\hat{x}$. A direção que a força aponta é, por construção, a direção em que o potencial diminui.

(d) Discuta, qualitativamente, o que acontecerá com a energia se o circuito rodar em torno de seu eixo vertical. A sua conclusão é compatível com o resultado da questão 2b?

A energia da espira se encontra em um máximo, uma vez que o momento magnético é anti-paralelo ao campo. Quando a espira sai do plano em que está, rodando ao redor de seu eixo vertical, ela diminui sua energia, sofre um torque do campo e tenta girar até alcançar seu mínimo de energia, que ocorre quando seu momento magnético se alinha com o campo. Contudo, como não há dissipação de energia, a espira continua girando.