

Gabarito Segunda Prova

1. No estudo da representação do potencial de uma distribuição localizada de cargas, seguimos a seção 4.1 do Jackson. Faça em detalhe as contas que levaram às expressões para os momentos multipolares q_{20} e q_{21} ; equação 4.6.

Solução

$$l=2 \rightarrow Y_{20}^* = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right); Y_{21}^* = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{-i\varphi}$$

$$\therefore q_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta' - \frac{1}{2} \right) r'^2 \rho(\vec{r}') r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi' dv'$$

$$\therefore q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') dv' \therefore \boxed{q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}}$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int \sin\theta' \cos\theta' e^{-i\varphi'} r'^2 \rho(\vec{r}') dv'$$

$$\begin{aligned} r'^2 \sin\theta' \cos\theta' e^{-i\varphi'} &= (r' \cos\theta') (r' \sin\theta' \cos\varphi') - i (r' \cos\theta') (r' \sin\theta' \sin\varphi') \\ &= z' x' - i z' y' \end{aligned}$$

$$\therefore q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left[\int z' x' \rho(\vec{r}') dv' - i \int z' y' \rho(\vec{r}') dv' \right]$$

$$\therefore \boxed{q_{21} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - i Q_{23})}$$

2. Uma linha de cargas localizada ao longo do eixo z tem uma densidade linear $\tau(z)$ e está confinada no intervalo $-R \leq z \leq R$.

a) Mostre que a expressão para a carga total do sistema,

$$Q = \int_{-R}^R \tau(z') dz'$$

corresponde à densidade volumétrica de carga

$$\rho(\vec{r}') = \frac{\tau(r' \cos \theta')}{2\pi r'^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)]$$

b) Calcule as expressões para os momentos mult. polares q_ℓ em correspondência a esta distribuição de carga

c) Usando a expressão do potencial em termos dos momentos multipolares, mostre que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} \left[\int_{-R}^R \tau(z') z'^{\ell} dz' \right] \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r^{\ell+1}}$$

Solução

$$a) \quad Q = \int_0^R dr' r'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \rho(\vec{r}') \sin \theta' d\theta' = \int_0^R r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \rho(\vec{r}') d(\cos \theta')$$

$$\therefore Q = \int_0^R dr' \int_{-1}^1 \tau(r' \cos \theta') [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)] d\theta'$$

$$\therefore Q = \int_0^R \tau(r') dr' + \int_0^R \tau(-r') dr' = \int_0^R \tau(z') dz' + \int_0^R \tau(z') dz'$$

$$\therefore \boxed{Q = \int_{-R}^R \tau(z') dz'}$$

b)

$$q_{lm} = \int Y_{lm}^*(\theta', \varphi') r'^l \rho(\vec{r}') dV'$$

$$\therefore q_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^R r'^l dr' \int_{-1}^1 d(\cos\theta') \tau(r' \cos\theta') [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)]$$

$$\times \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta') \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} d\varphi'$$

Mas

$$\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi'} d\varphi' = 2\pi \delta_{m0} \Rightarrow q_{lm} \rightarrow q_{l0}$$

$$\therefore q_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^R r'^l dr' \int_{-1}^1 d(\cos\theta') \tau(r' \cos\theta') P_l(\cos\theta') \times$$

$$\times [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)]$$

$$P_l(1) = 1; \quad P_l(-1) = (-1)^l$$

$$\therefore q_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[\int_0^R r'^l \tau(r') dr' + \int_0^R r'^l \tau(-r') (-1)^l dr' \right]$$

$$\therefore \boxed{q_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_{-R}^R \tau(z') z'^l dz'}$$

$$c) \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} q_{l0} Y_{l0}(\theta, \varphi)$$

$$\therefore \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_{-R}^R \tau(z') z'^l dz' \right] \sqrt{\frac{4\pi}{4\pi}} \frac{P_l(\cos\theta)}{1}$$

$$\therefore \boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_l \left[\int_{-R}^R \tau(z') z'^l dz' \right] \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}}$$

3. Na seção 5.7 do livro do Jackson, é obtida a expressão do torque sobre um dipolo magnético. Partindo da Eq. 5.70,

$$\vec{\tau} = \int \vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(0)] dV'$$

chega-se a

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}(0) \quad (\text{Eq. 5.72})$$

Para chegar a este resultado, o autor faz analogias com outras integrais já feitas. Sem usar este argumento, mas explorando as técnicas utilizadas na Aula 18 MAR 2020, os alunos devem apresentar detalhadamente todas as passagens para obter a expressão acima para o torque.

Solução

$$\vec{\tau} = \int \vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}(0)] dV' = \int (\vec{r}' \cdot \vec{B}) \vec{j} dV' - \int (\vec{r}' \cdot \vec{j}) \vec{B} dV'$$

$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{B}) \vec{j} dV' = \sum_i \hat{e}_i \sum_j B_j \int x'_j j_i dV' = \frac{1}{2} \sum_i \hat{e}_i \sum_j B_j \int (x'_j j_i + x'_i j_j) dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_i \hat{e}_i \sum_j B_j \int (x'_i j_j - x'_j j_i) dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_i \hat{e}_i \int [x'_i (\vec{B} \cdot \vec{j}) - (\vec{B} \cdot \vec{r}') j_i] dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \int [(\vec{B} \cdot \vec{j}) \vec{r}' - (\vec{B} \cdot \vec{r}') \vec{j}] dV'$$

$$= -\frac{1}{2} \int \vec{B} \times [\vec{r}' \times \vec{j}] dV' = \left[\frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times \vec{j}) dV' \right] \times \vec{B}$$

$$\therefore \quad = \vec{m} \times \vec{B}(0)$$

$$\int (\vec{r}' \cdot \vec{j}) \vec{B} dV' = \vec{B} \int (\vec{r}' \cdot \vec{j}) dV' = \vec{B} \sum_i \int (x'_i j_i) dV'$$

Técnica:

$$\int (f \vec{j} \cdot \nabla' g + g \vec{j} \cdot \nabla' f) dv' = 0$$

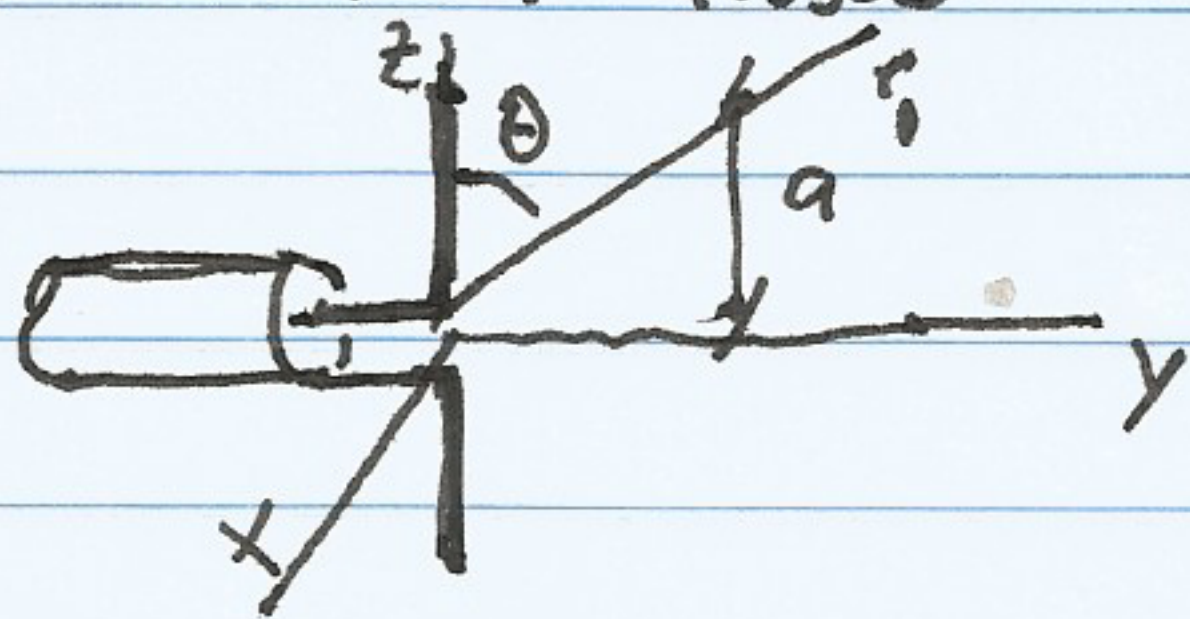
Escolha: $f = g = r' \Rightarrow \nabla' f = \nabla' g = \frac{\vec{r}'}{r'}$

$$\therefore \int \left(r' \frac{\vec{j} \cdot \vec{r}'}{r'} + r' \frac{\vec{j} \cdot \vec{r}'}{r'} \right) dv' = 0 \quad \therefore \int \vec{j} \cdot \vec{r}' dv' = 0$$

Portanto

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}} = \vec{m} \times \vec{B}(0)}$$

4. Uma antena é alimentada por um cabo coaxial no modo $\lambda/4$, ou seja, cada metade tem comprimento $a = \lambda/4$. Nessas condições, a corrente tem que formar um perfil de onda estacionária na antena, ou seja, é nula em $|z| = a$ e ser máxima em $z = 0$. Portanto, sua corrente é dada por



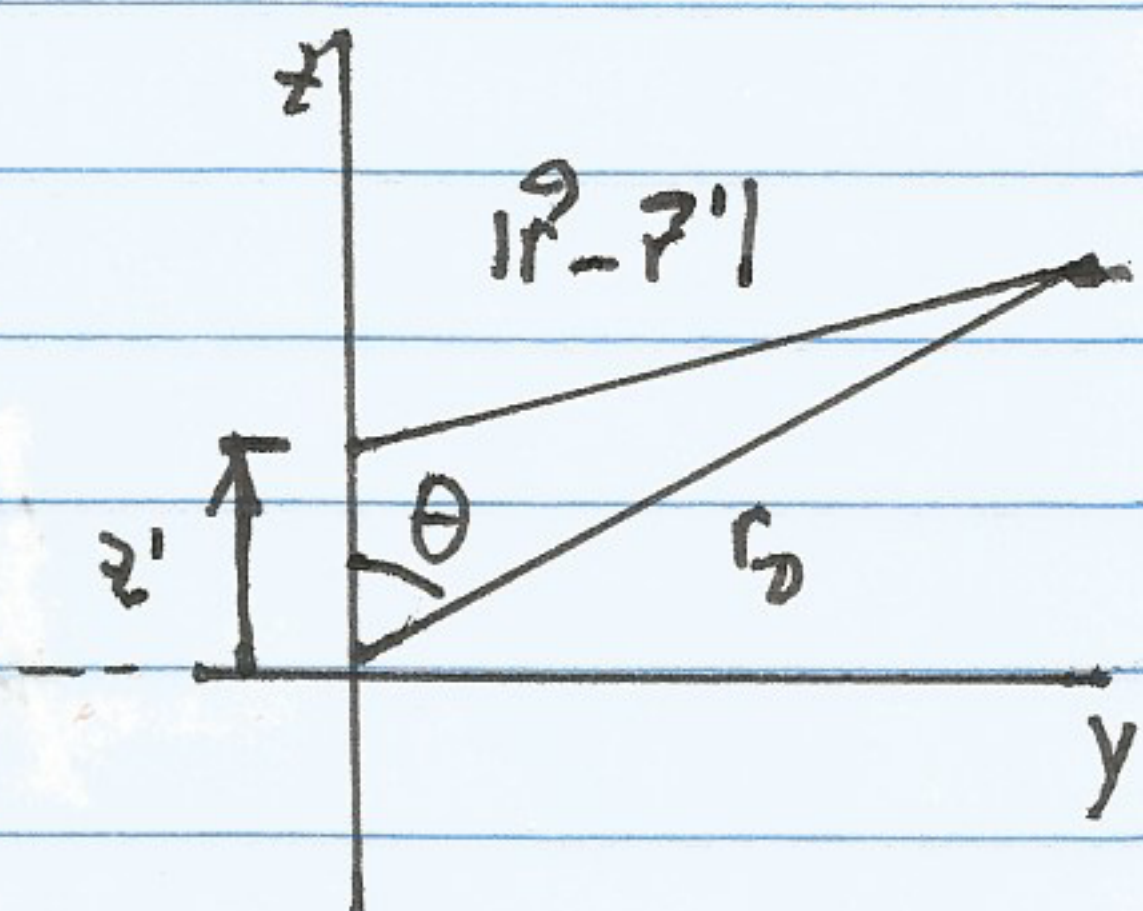
$$I(z', t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right) e^{-i\omega t'}$$

a) Partindo da expressão geral para o potencial vetor

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t')]_{ret} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

e fazendo o desenvolvimento em série de Taylor apropriado para $a/r_0 \ll 1$ (veja figura), obtenha a expressão para o potencial vetor da antena

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \frac{c}{\omega} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \hat{z}$$



b) Escreva $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em coordenadas esféricas e mostre que o campo magnético é dado por

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -i \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \frac{I_0}{r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \hat{\phi}$$

c) ~~Mostre~~ ^{a expressão para} Obtenha o vetor médio de Poynting médio $\langle \vec{S} \rangle$ e esboce a distribuição angular da potência radiada.

Solução

$$a) \quad \vec{J}(\vec{r}', t') = I_0 \cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right) e^{-i\omega t'} \delta(x') \delta(y') \hat{e}_z$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int dx' \delta(x') \int dy' \delta(y') \int_{-a}^a dz' \frac{\cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)} dz' \hat{e}_z$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-a}^a dz' \frac{\cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)} \hat{e}_z$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (r_0 \sin\theta)^2 + (r_0 \cos\theta - z')^2 \simeq r_0^2 \left(1 - 2 \frac{z'}{r_0} \cos\theta\right)$$

$$\therefore |\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r_0 \sqrt{1 - 2 \frac{z'}{r_0} \cos\theta} \simeq r_0 - z' \cos\theta; \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{z'}{r_0} \cos\theta\right) \simeq \frac{1}{r_0}$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-a}^a \cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right) e^{-ikz' \cos\theta} dz' \hat{e}_z$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos(bx) + b \sin(bx)]$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \frac{\hat{e}_z}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 - (k \cos\theta)^2} \times$$

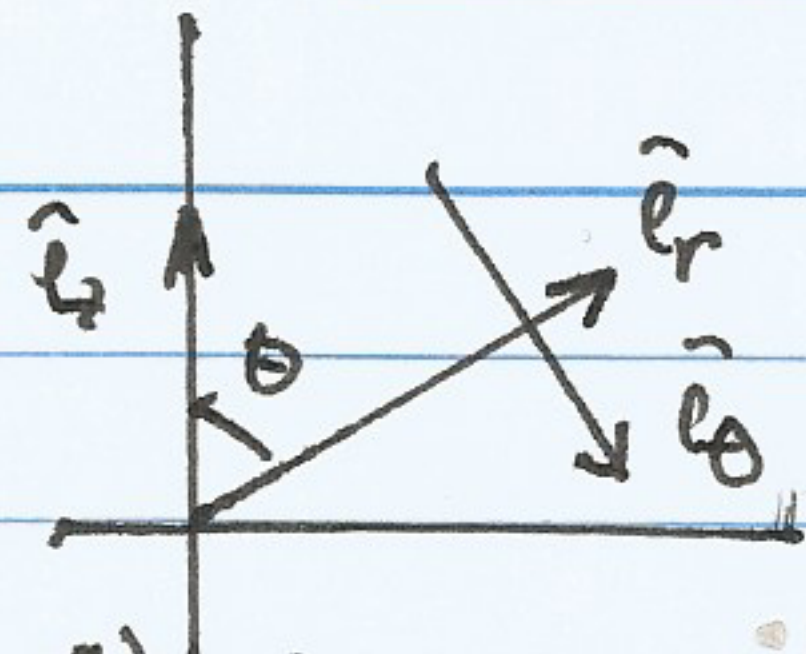
$$\times \left[e^{-ikz' \cos\theta} \left\{ -ik \cos\theta \cos\left(\frac{\pi z'}{2a}\right) + \left(\frac{\pi}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi z'}{2a}\right) \right\} \right]_{-a}^a$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(\frac{\pi}{2a}\right) \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2a} \cos\theta\right)^2} \left[e^{-ika \cos\theta} + e^{ika \cos\theta} \right] \hat{e}_z$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \frac{c}{\omega} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \hat{e}_z}$$

b) coordenadas esféricas

$$\hat{z} = \cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta}$$



$$\vec{D} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}; \quad A_r = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\omega} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta) \sin\theta}{\sin^2\theta}$$

$$A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\omega} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{D} = \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\omega} \left[\underbrace{-\frac{1}{r_0} i k \frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}}_{\sim 1/r_0} - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta) \sin\theta}{\sin^2\theta} \right] \right] e^{i(kr_0 - \omega t)} \hat{\phi}$$

$\sim 1/r_0^2$

Portanto, na região distante

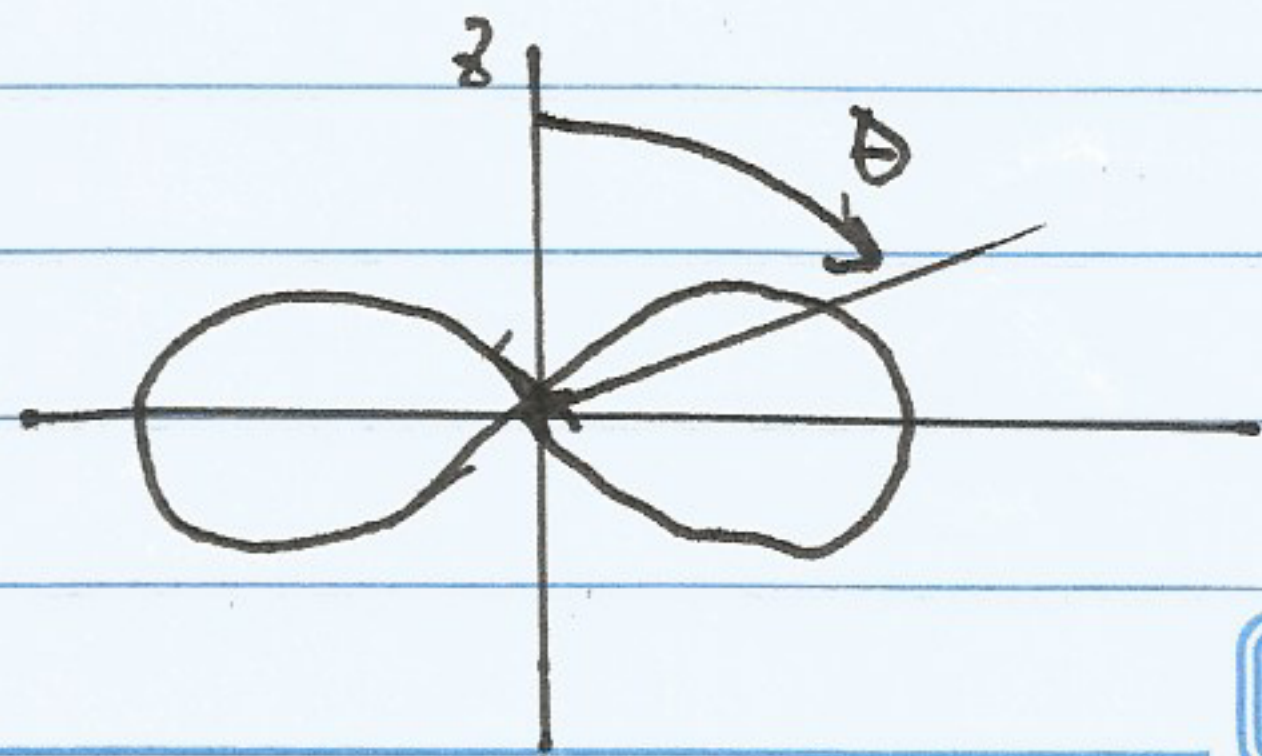
$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}, t) = -i \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \frac{I_0 e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \hat{\phi}}$$

c) No campo de radiação, $E_\theta = -\frac{\partial A_\theta}{\partial t}$

$$\therefore E_\theta(\vec{r}, t) = i\omega \frac{\mu_0 I_0 c}{2\pi\omega} \frac{e^{i(kr_0 - \omega t)}}{r_0} \frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}) \therefore \langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 I_0^2 c^2}{8\pi r_0^2} \frac{\omega^2(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin^2\theta} \hat{r}$$

$$\left[\frac{\omega(\frac{\pi}{2} \cos\theta)}{\sin\theta} \right]^2 \Rightarrow \begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{2} &\rightarrow 1 \\ \theta = 0 &\rightarrow 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} &\approx 0,4 \end{aligned}$$



5. Num meio magnetizado e ionizado, a relação de dispersão para ondas se propagando ao longo do campo magnético ambiente $\vec{B}$ tem dois ramos

$$k_o = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right]^{1/2}; \quad k_e = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right]^{1/2}$$

onde ω_p é a frequência de plasma do meio e ω_c a frequência ciclotrônica dos elétrons. A solução $k = k_o$ corresponde a ondas circularmente polarizadas à direita e a $k = k_e$ a ondas circularmente polarizadas à esquerda.

a) Considere $\omega_p > \omega_c$ e faça um diagrama de dispersão (gráfico $\omega \times k$), mostrando esquematicamente os dois ramos da relação de dispersão. Em particular, indique claramente no gráfico:

- frequências de corte dos dois ramos ($k \rightarrow 0$)
- comportamento assintótico dos dois ramos quando $k \rightarrow \infty$
- região de não-propagação desses modos

OBS: explique porque $k = 0$ corresponde a "corte" na propagação

b) Para qual modo há propagação na condição $\omega \ll \omega_c$

c) Na mesma condição $\omega \ll \omega_c$, determine as expressões para as velocidades de fase e de grupo.

Solução

a) $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow k_o \approx \frac{\omega}{c}; k_e \approx \frac{\omega}{c} \Rightarrow$ relação de dispersão no vácuo

$$k_{o,e} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_c)} = 0 \therefore \omega_{\bullet} = \frac{1}{2} [\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}]$$

$$\omega_{\bullet} = \frac{\omega_c}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}} \right]$$

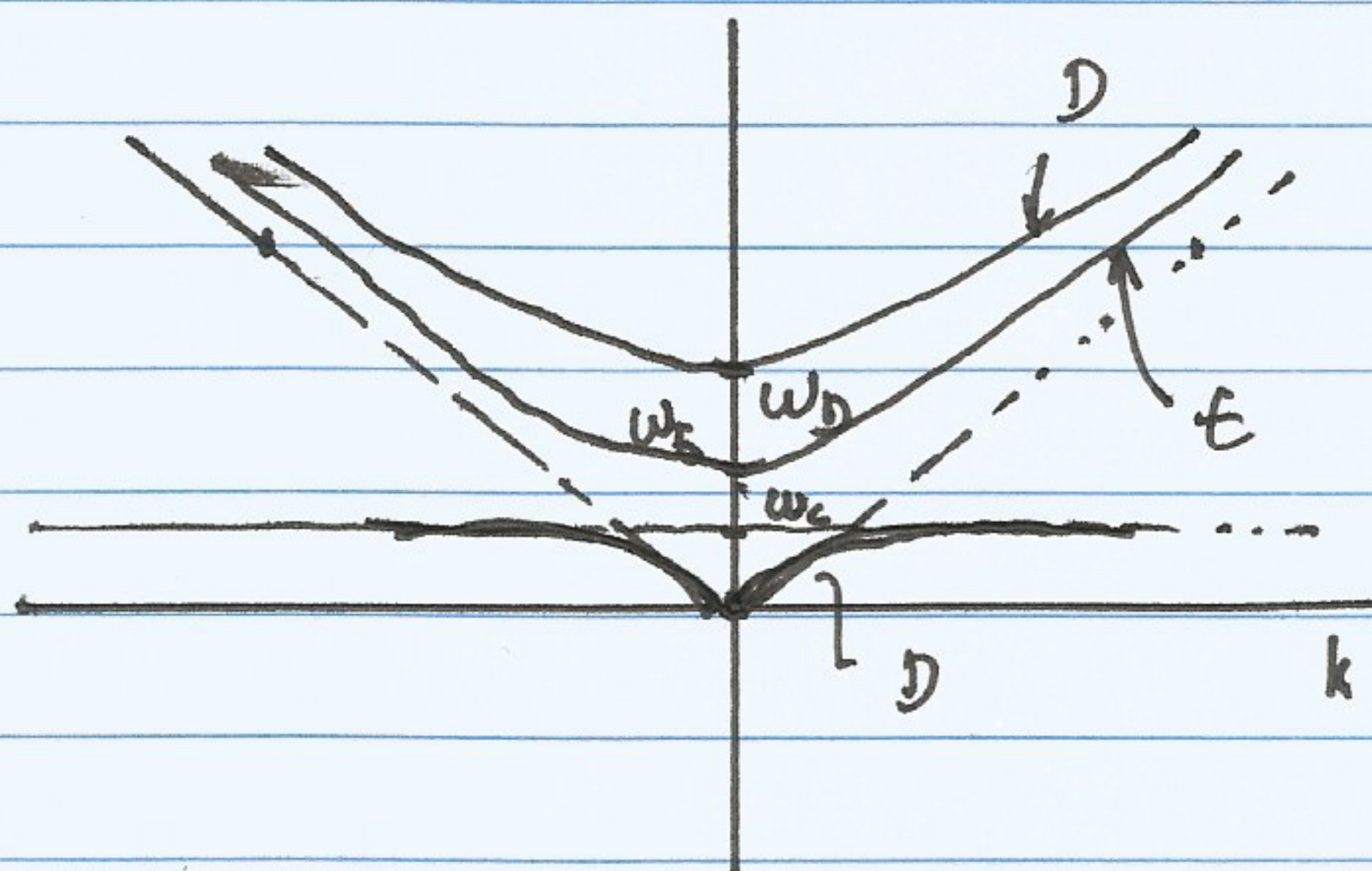
Como $\omega_p > \omega_c$, somente o sinal positivo fornece frequência positiva

$$\therefore \omega_p = \frac{\omega_c}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}} \right]$$

$$\therefore \omega_E = \frac{1}{2} \left[-\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \right] \therefore \omega_E = \frac{\omega_c}{2} \left[\sqrt{1 + 4 \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}} - 1 \right] < \omega_p$$

b) $\omega \rightarrow D \Rightarrow k_D \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}}$

$$k_E \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}} \rightarrow k_E \text{ imag.}$$



c) $\omega < \omega_c \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k_D} \therefore v_f = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}}}$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow 1 = \frac{1}{c} \frac{d}{dk} \left[\omega \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}} \right] = \frac{1}{c} \frac{d\omega}{dk} \frac{d}{d\omega} \left[\omega \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}} \right]$$

$$\therefore c \approx \frac{v_g}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}}} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c} - \frac{\omega_p^2}{2\omega \omega_c} \right]$$

$$\therefore v_g = c \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_c}}}{1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega \omega_c}}$$

6. Neste problema, vamos obter a expressão para o campo electromagnético produzido por um ~~plano~~ plano de cargas que oscilam periodicamente com o tempo. Considere uma distribuição de cargas superficial uniforme no plano (x, y) , de forma que a densidade de cargas seja dada por

$$\rho(\vec{r}, t) = \sigma \delta(z); \quad \sigma = \text{const}$$

Suponha agora que as cargas oscilam periodicamente em torno de sua posição de equilíbrio com velocidade

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos(\omega t) \hat{x}$$

Como a densidade de carga é constante, o potencial escalar também é constante, de forma que o campo electromagnético resultante será devido somente ao potencial vetor produzido pela densidade de corrente

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sigma v_0 \delta(z) \cos(\omega t) \hat{x}$$

a) Usando a técnica de escrever $[\vec{G}(\vec{r}, t)]_{\text{ret}} = \int \vec{G}(\vec{r}', t') \delta(t' - t_{\text{ret}}) dt'$, empregada no Prob. 4 da Série de Exercícios b, mostre que o potencial vetor pode ser escrito como

~~$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{r} d\vec{r}'$$~~

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma v_0 \hat{x} \int \Gamma(\vec{r}, t - t') \cos(\omega t') dt'$$

onde

~~$$\Gamma(\vec{r}, t) = \frac{1}{r}$$~~

$$\Gamma(\vec{r}, t - t') = \int \frac{\delta[t - t' - \frac{1}{c} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}]}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} dx' dy'$$

b) Faça a integral para $\Gamma(\vec{r}, t)$ considerando que, como a carga está em um plano infinito, podemos tomar a origem para a integral em $\vec{r}'$ na posição $\vec{r}$, de forma que

$$\Gamma(\vec{r}, t) = \int \frac{\delta\left[t - t' - \frac{1}{c}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}\right]}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy'.$$

Faça a transformação de variáveis $x' = l \cos\theta$; $y' = l \sin\theta$, após, simplifique o argumento da função delta ~~usando~~ definindo a variável

$$s = \frac{1}{c} \sqrt{l^2 + z^2} - \Delta t; \quad \Delta t = t - t'$$

Como $l \geq 0$, temos que a variável s tem como limite inferior $\frac{|z|}{c} - \Delta t$.

Obtenha então a seguinte expressão

$$\Gamma(\vec{r}, t) = 2\pi c \int_{\frac{|z|}{c} - \Delta t}^{\infty} \delta(s) ds = 2\pi c \Theta\left(t - t' - \frac{|z|}{c}\right)$$

onde $\Theta(s)$ é a função degrau.

c) Usando este resultado, mostre que

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi \sigma v_0 c \hat{x} \int_{-\infty}^{t - \frac{|z|}{c}} \cos(\omega t') dt'$$

ou

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\omega} \sin\left(t - \frac{|z|}{c}\right) \hat{x}; \quad E_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma v_0 c$$

[Neste último resultado, o valor constante de $\vec{A}$ em $t = -\infty$ foi simplesmente tomado como nulo, já que não afeta as expressões para os campos]

d) Considere os sentidos de propagação da onda correspondente a $\vec{A}(\vec{r}, t)$ para $z > 0$ e $z < 0$.

e) Determine a expressão do vetor de Poynting correspondente a esta onda, para $z > 0$.

Solução

$$a) \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}', t')]_{\text{ret}} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dt' \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t') \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \left(\text{usando simetria de } \delta \right)$$

$$\therefore \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \delta v_0 \hat{e}_x \int dt' \cos(\omega t') \int dV' \delta(t') \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \delta v_0 \hat{e}_x \int \Gamma(\vec{r}, t - t') \cos(\omega t') dt' \\ \Gamma(\vec{r}, t - t') &= \int \frac{\delta[t - t' - \frac{1}{c} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}]}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} dx' dy' \end{aligned}}$$

b) Transladando a origem no plano para o ponto (x, y) , o que é válido porque a integral é sobre ~~o~~ todo o plano infinito, temos

$$\Gamma(\vec{r}, t - t') = \int \frac{\delta[t - t' - \frac{1}{c} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}]}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy'$$

Mudando para variáveis polares: $x' = \ell \cos \theta$; $y' = \ell \sin \theta$, $z = z$
 $dx' dy' = \ell d\ell d\theta$

$$\Gamma = 2\pi \int_0^\infty \frac{\delta(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{l^2+z^2})}{\sqrt{l^2+z^2}} l dl$$

Definição

$$s = \frac{1}{c}\sqrt{l^2+z^2} - \Delta t; \quad \Delta t = t-t'$$

$$\dots \quad ds = \frac{1}{c} \frac{l dl}{\sqrt{l^2+z^2}} = \frac{l dl}{c^2(s+\Delta t)} \Rightarrow \Gamma = 2\pi c \int_{\frac{|z|}{c}-\Delta t}^\infty \delta(s) ds$$

Propriedade da função delta

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(y) dy \Rightarrow \Theta(-x) = \int_x^\infty \delta(y) dy$$

$$\therefore \boxed{\Gamma(\vec{r}, t-t') = 2\pi c \Theta(t-t' - \frac{|z|}{c})}$$

$$c) \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma v_0 2\pi c \hat{e}_x \int_{-\infty}^\infty dt' \Theta[t - \frac{|z|}{c} - t'] \cos(\omega t')$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma v_0 2\pi c \hat{e}_x \int_{-\infty}^{t - \frac{|z|}{c}} \cos(\omega t') dt'$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\omega} \sin\left(t - \frac{|z|}{c}\right) \hat{e}_x; \quad E_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma v_0 c}$$

$$d) \quad z > 0 \Rightarrow \sin\left(t - \frac{|z|}{c}\right) = -\sin[kz - \omega t] \Rightarrow \text{onda se propagando para a direita}$$

$$z < 0 \Rightarrow \sin\left[\omega\left(t - \frac{|z|}{c}\right)\right] = \sin[kz + \omega t] \Rightarrow \text{onda se propagando para a esquerda}$$

$$e) \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \therefore \vec{E}(\vec{r}, t) = -E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{e}_x$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A} = (\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \frac{\epsilon_0}{\omega} \mu_0 (kz - \omega t) \hat{e}_x$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{k}{\omega} \epsilon_0 \omega (kz - \omega t) \hat{e}_y$$

$$= \boxed{\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{k}{\mu_0 \omega} \epsilon_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \hat{e}_z}$$