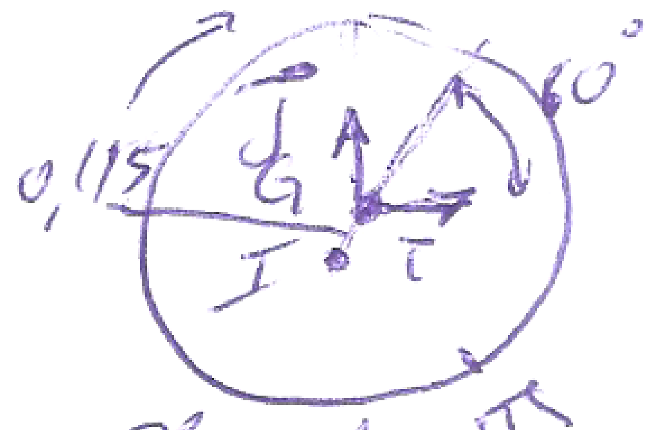
①

PME 3400 P1 — 23/06/2020

1ª Q)

$$\begin{cases} \vec{\delta}_{A_{orig}} = 0{,}058\vec{i} + 0{,}1\vec{j} \\ \vec{\delta}_{B_{orig}} = 0{,}2\angle 240^\circ = -0{,}1\vec{i} - 0{,}173\vec{j} \end{cases}$$



Plano A II

$$\begin{cases} \vec{\delta}_{A_{orig+t}} = 0{,}058\vec{i} + 0{,}05\vec{j} \\ \vec{\delta}_{B_{orig+t}} = -0{,}1\vec{i} - 0{,}153\vec{j} \end{cases}$$

Plano B II

m_t adicionada em $\vec{j}$ ∴

$\alpha_{CA} = -\frac{0{,}05}{10} = -0{,}005 \frac{mm}{g}$ $\qquad \alpha_{CB} = \frac{0{,}02}{10} = 0{,}002 \frac{mm}{g}$

$\alpha_{DA} = \alpha_{CB} \qquad \alpha_{DB} = \alpha_{CA}$

$$\alpha_{CA} \cdot m_C \vec{e}_C + \alpha_{DA} \cdot m_D \vec{e}_D + \vec{\delta}_{A_{orig}} = \vec{0}$$
$$\alpha_{CB}\, m_C \vec{e}_C + \alpha_{DB} \cdot m_D \vec{e}_D + \vec{\delta}_{B_{orig}} = \vec{0}$$

$$1000 \times \begin{bmatrix} -0{,}005 & 0{,}002 \\ 0{,}002 & -0{,}005 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_C \vec{e}_C \\ m_D \vec{e}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}058\vec{i} - 0{,}1\vec{j} \\ 0{,}1\vec{i} + 0{,}173\vec{j} \end{pmatrix} \times 1000$$

$$m_C \vec{e}_C = \frac{289\vec{i} + 500\vec{j} - 200\vec{i} - 346\vec{j}}{21} = 4{,}2\vec{i} + 7{,}3\vec{j}$$

$$m_D \vec{e}_D = \frac{-500\vec{i} - 865\vec{j} + 116\vec{i} + 200\vec{j}}{21} = -18{,}3\vec{i} - 31{,}7\vec{j}$$

Como vamos retirar massas $(-m_C)\vec{e}_C = -4{,}2\vec{i} - 7{,}3\vec{j} = 8{,}4g\angle 240^\circ$ ~~$11{,}7g \angle 249^\circ$~~

$(-m_D)\vec{e}_D = 18{,}3\vec{i} + 31{,}7\vec{j} = 36{,}6g\angle 60^\circ$

No plano C devemos retirar massas nas pás 3 e 4

Pá 1 → 90°
Pá 2 → 162°
Pá 3 → 234°
Pá 4 → 306°
Pá 5 → 18°

$(-m_C)\vec{e}_C = -4{,}2\vec{i} - 7{,}3\vec{j} = m_3(\cos 234\vec{i} + \text{sen}\, 234\vec{j}) +$
$+ m_4(\cos 306\vec{i} + \text{sen}\, 306\vec{j}) =$
$= (-0{,}588\vec{i} - 0{,}809\vec{j})m_3 + (0{,}588\vec{i} - 0{,}809\vec{j})m_4$
$= 0{,}588(m_4 - m_3)\vec{i} - 0{,}809(m_3 + m_4)\vec{j}$

$-4{,}2 = 0{,}588(m_4 - m_3) \therefore 7{,}15 = (m_3 - m_4)$

$-7{,}3 = -0{,}809(m_3 + m_4) \therefore 9{,}02 = (m_3 + m_4)$

Plano Crítico $\boxed{m_3 = 8{,}1g}$ $\boxed{m_4 = 0{,}9g}$

No plano D, retirar massa nas pás 1 e 5

$18{,}3\vec{i} + 31{,}7\vec{j} = m_1\vec{j} + m_5(\cos 18\vec{i} + \operatorname{sen} 18\vec{j})$

$18{,}3\vec{i} + 31{,}7\vec{j} = m_1\vec{j} + 0{,}95 m_5\vec{i} + 0{,}31 m_5\vec{j}$

$18{,}3 = 0{,}95 m_5 \therefore \boxed{m_5 = 19{,}3g}$

$31{,}7 = m_1 + 0{,}31 m_5 \therefore \boxed{m_1 = 25{,}7g}$

ISO G 6,3 $\quad \omega_{op} = \frac{5000}{60} \times 2\pi = 523{,}6\ rad/s$

$e_{ad} \cdot \omega_{op} \leq 6{,}3\ mm/s \therefore e_{ad} \leq 0{,}012\ mm$

Desbalanceamento total admissível $\Rightarrow U_{ad} = M \cdot e_{ad} = 241\ g\,mm$

Plano C $\rightarrow U_C = 120\ g\,mm = \Delta m_C \cdot R_C \therefore \Delta m_C = 1{,}2g$

Plano D $\quad U_D = 120\ g\,mm = \Delta m_D \cdot R_D \therefore \Delta m_D = 1{,}2g$

$R_C = R_D = 100\ mm$

Do ponto de vista do balanceamento essas são as tolerâncias das massas totais a um raio de 100 mm que devem ser satisfeitas na etapa final do balanceamento. Se após ter retirado as massas calculadas para os planos C e D, nas respectivas pás, tentando acertar as massas da melhor maneira possível (profundidade de furos, ou esmerilhando a extremidade da paleta...) verifica-se o balanceamento, fazendo outra leitura do desbalanceamento (novo original). Se as massas recalculadas em cada plano derem menos que 1,2g, considera-se balanceado. Se não, repete-se o processo. Observa-se que no balanceamento no plano C, a massa a ser retirada na pá 4 era 0,9g, portanto já dentro da tolerância. Correndo certo risco, de ter um trabalho adicional à posteriori, se poderia ter tirado massa só na m_3, talvez 8,8g.

2.c) $\vec{F_A} = 20N\vec{j}$ $\qquad \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{F_{ru}} = -10\vec{i} + 25\vec{j} = 26{,}9N\,\angle 112° \therefore$

$\vec{F_B} = -10\vec{i} + 5\vec{j}$ $\qquad |\vec{F_{ru}}| = 26{,}9 = m_E R_E \omega_{bal}^2 \therefore \boxed{m_E = 14{,}7g \text{ a ser retirada a } 112°}$

$\omega_{bal} = \frac{2\pi}{0{,}036} = 174{,}5\ rd/s$ $\qquad R_E = 60\ mm$

Após essa etapa de balanceamento restaram as seguintes forças nos mancais

$\vec{F_A'} = \vec{F_A} - \vec{F_{ru}} \cdot 0{,}6 = 6\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{F_B'} = \vec{F_B} - \vec{F_{ru}} \cdot 0{,}4 = -6\vec{i} - 5\vec{j} \therefore \vec{F_A'} = 7{,}8N\,\angle 40°$, $\vec{F_B'} = 7{,}8N\,\angle 220°$

Portanto, para compensar o binário de forças nos planos C e D basta fazer $\vec{F_C} = -7{,}8 \frac{L}{L-a}\angle 40°$, $\vec{F_D} = +7{,}8 \frac{L}{L-a}\angle 220° \therefore 9{,}75N = m_C R_C \omega_{bal}^2$

$\boxed{m_C = 8g \text{ a ser retirada a } 40°}$ e $\boxed{m_D = 8g \text{ a ser retirada a } 220°}$

ISO G 6.3 ; $\omega_{op} = \frac{6000}{60}\cdot 2\pi = 628$ rad/s

$e_{ad}\cdot\omega_{op} < 6{,}3$ mm/s $\therefore$ $e_{ad} \leq 0{,}01$ mm

$U_{ad} = M\cdot e_{ad} = 150$ g·mm

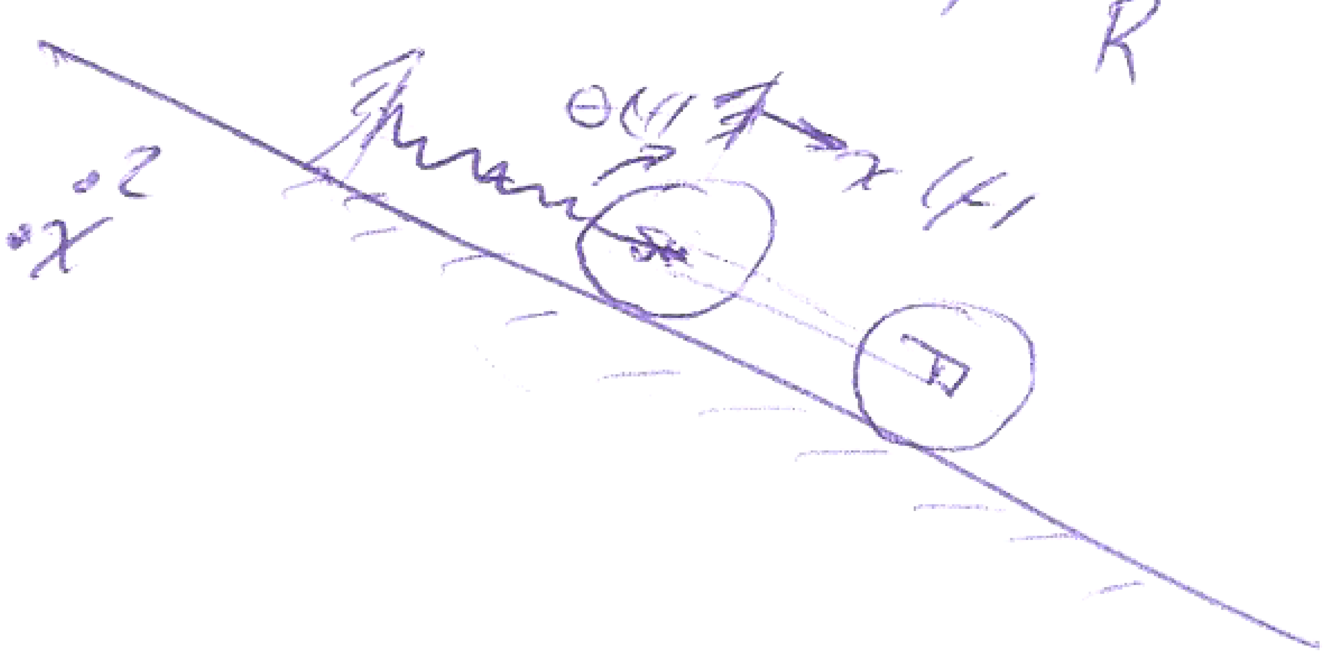
Suposto: Etapa inicial $U_E < 150$ g·mm

Etapa final $U_C = U_D < 75$ g·mm

3ª Q) 1 grau de liberdade $\rightarrow x(t) > 0$ descendo a rampa ~~para baixo~~

$x=0$ na posição de equilíbrio estático

$\theta(t) = \frac{x(t)}{R}$



$$E_c = 2\cdot\left(\frac{M}{2}\cdot\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + 2\cdot\frac{J}{2}\cdot\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{M}{2}\cdot\dot{x}^2 + \frac{J}{R^2}\cdot\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{2J}{R^2}\right)\cdot\dot{x}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k x^2$$

Variação de energia potencial do centro de massa compensa o trabalho realizado pela força ~~inicial~~ [illegible] (equilíbrio estático) na mola.

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = -\text{Potência dissipada por atrito} = -F_{at_{eq}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\cdot\dot{x}$$

$$\left(M + \frac{2J}{R^2}\right)\cdot\dot{x}\cdot\ddot{x} + kx\cdot\dot{x} = -F_{at_{eq}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\cdot\dot{x}$$ Como $\dot{x}$ não é permanentemente nulo

$$\boxed{\underbrace{\left(M + \frac{2J}{R^2}\right)}_{M_{eq}}\cdot\ddot{x} + F_{at_{eq}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + kx = 0}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{2J}{R^2}}}$$

Partindo de uma amplitude inicial $x(0) = x_0 > \frac{F_{at_{eq}}}{k}$ e com $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \ddot{x} < 0$ $t>0$

$x_h = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ $\qquad M_{eq}\ddot{x}(t) + k\,x(t) = -F_{at_{eq}}\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = F_{at_{eq}}$

$x_p = \frac{F_{at_{eq}}}{k}$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{F_{at_{eq}}}{k} \qquad \left(\begin{matrix}\dot{x} < 0 \\ 0 < t < \,?\end{matrix}\right)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$$

C.I. $\begin{cases} x(0) = x_0 = B + \frac{F_{at_{eq}}}{k} \therefore \boxed{B = x_0 - \frac{F_{at_{eq}}}{k}} \\ \dot{x}(0) = 0 = A\omega \therefore \boxed{A = 0} \end{cases}$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_{atr}}{k}\right)\cdot \cos(\omega t) + \frac{F_{atr}}{k}$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{F_{atr}}{k}\right)\omega\, \text{sen}(\omega t)$$ Equação válida enquanto $\text{sen}(\omega t) > 0$

$\therefore\ 0 < t < \frac{\pi}{\omega}$

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -x_0 + \frac{2F_{atr}}{k}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0$$

a partir deste $t = \frac{\pi}{\omega}$ $\dot{x}$ passa a ser positivo

$$M_{eq}\ddot{x} + kx(t) = -F_{atr}$$

$$x_h(t) = A'\text{sen}(\omega t) + B'\cos(\omega t)$$

$$x_p(t) = -\frac{F_{atr}}{k} \quad \therefore \quad x(t) = A'\text{sen}(\omega t) + B'\cos(\omega t) - \frac{F_{atr}}{k}$$

$$\dot{x}(t) = A'\omega\cos(\omega t) - B'\omega\,\text{sen}(\omega t)$$

C.I. deste trecho

$$x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -x_0 + \frac{2F_{atr}}{k} = -B' - \frac{F_{atr}}{k} \quad \therefore \boxed{B' = x_0 - \frac{3F_{atr}}{k}}$$

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0 = A'\omega \quad \therefore \boxed{A' = 0}$$

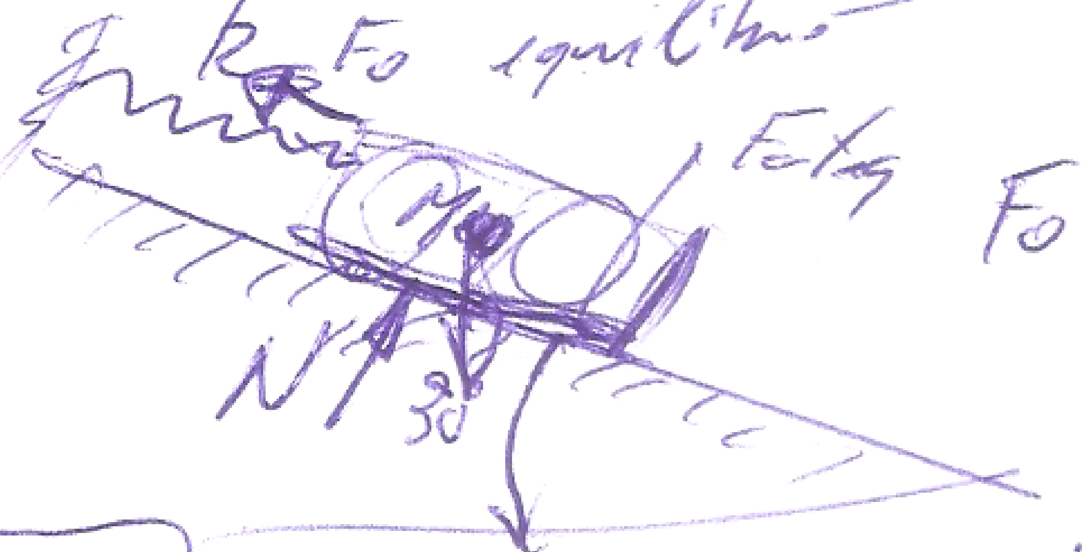
$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3F_{atr}}{k}\right)\cdot\cos(\omega t) - \frac{F_{atr}}{k} \qquad \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\dot{x}(t) = -\left(x_0 - \frac{3F_{atr}}{k}\right)\cdot\text{sen}(\omega t) > 0 \quad \therefore !$$

Em cada $\frac{1}{2}$ ciclo a perda de amplitude foi $\frac{2F_{atr}}{k}$

1 ciclo $\frac{4F_{atr}}{k}$

c)



$$F_0 = Mg\cdot\text{sen}\,30° = \frac{Mg}{2}$$

$$k = \frac{Mg}{2\cdot A} = \frac{20\cdot 9{,}81}{2\cdot 0{,}1}$$

$$k = 981\ N/m$$

$$T_p = 2s = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\omega = \pi\ rad/s}$$

10 ciclos $\frac{(50-10)\,mm}{10} = \frac{4F_{atr}}{k} \therefore \boxed{F_{atr} = 0{,}98\,N}$

$$\omega^2 = \pi^2 = \frac{k}{M + 2J/R^2} \therefore M + \frac{2J}{R^2} = \frac{k}{\pi^2} = 99{,}4\ kg \therefore$$

$$\frac{2J}{R^2} = 79{,}4\ kg \therefore \boxed{J = \frac{0{,}794}{2}\,kg\cdot m^2} = 0{,}397\ kg\,m^2$$

d) 1- A frequência natural não muda com α

2 - Qto maior o valor de α menor a resistência ao rolamento, pois as forças normais às rodas diminuem ($\frac{1}{2}\frac{M}{2}g\cdot\cos\alpha$) em cada roda.

3 - Qto maior o valor de α maior a força de intensão na mola e de contato entre ~~os~~ cada eixo e o chassi ($\frac{M}{2}\cdot g\,\text{sen}\alpha$) para cada eixo e portanto maior o atrito de escorregamento nos mancais (eixos chassi)