Sistemas Dinâmicos Lineares

MAP 2110 - Diurno

IME USP

30 de junho

Quando o polinômio característico tem raízes duplas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ (e portanto os mesmos autovalores), mas não tem os mesmos autovetores! A segunda matriz tem apenas uma direção de autovetores.

Recuperando informações com testes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se $\mathbf{v}_1$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ de uma matriz A e $\mathbf{v}_2$ é outro autovetor de A, será que podemos achar a matriz original A sabendo que

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}?$$

$$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3$$

trajetória de um sistema

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}$$

Então a solução deste sistema é $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{v}$ e a sequência de vetores $\{\mathbf{v}_k\}$ com $v_k = A^k\mathbf{v}$ dizemos que é a trajetória que passa por $\mathbf{v}$.
De uma forma geral a teoria dos sistemas dinâmicos procura saber o que acontece com as trajetórias do sistema.

Sistemas dinâmicos e autovalores

No caso linear, o que acontece com as trajetórias depende dos autovalores da matriz A. **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

que tem a solução

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^k x_0 \\ 2^k y_0 \end{bmatrix} = 3^k x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2^k y_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Temos, neste caso, dois autovalores reais, com autovalores maiores que 1,
- como consequência, as trajetórias por qualquer ponto fora da origem se afastarão cada vez mais da origem.
- O autovalor 3 é maior do que 2 (em valor absoluto), então dizemos que é um autovalor dominante e as trajetórias se acumularão na direção do autovetor associado a este autovalor.
- A origem $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio instável

Exemplo 2

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ (0.5)^k y_0 \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0.5)^k y_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Um autovalor é 1 e o outro tem valor absoluto menor que 1.
- Como $(0.5)^k$ tende a zero a trajetória se aproxima de um equilíbrio.
- $x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um equilíbrio para todo x_0.

Exemplo 3

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.4)^k x_0 \\ (0.3)^k y_0 \end{bmatrix} = (0.4)^k x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (0.3)^k y_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Dois autovalores com valor absoluto menor que 1
- A trajetória se aproxima da origem sempre.
- A origem é um ponto de equilíbrio estável.

Caso de uma matriz diagonalizável

Vamos supor que uma matriz 2×2 seja diagonalizável com autovalores λ_1 e λ_2 com autovetores associados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

queremos saber como são as trajetórias de

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k a \\ \lambda_2^k b \end{bmatrix} = \lambda_1^k a \mathbf{v}_1 + \lambda_2^k b \mathbf{v}_2$$

E agora podemos repetir as análises anteriores substituindo os vetores canônicos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ pelos autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

Tem como autovalores 3 e 2 e como autovetores associados $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. As trajetórias crescem com fator 3 na direção do $\mathbf{v}_1$ e com fator 2 na direção do $\mathbf{v}_2$ e para $k \to \infty$ tende para a direção de $\mathbf{v}_1$

Autovalores complexos

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

A matriz deste sistema tem o polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e os autovalores são os números complexos $\pm i$

Neste caso sabemos que $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de rotação de 90° Então a trajetória por qualquer ponto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ tem só quatro pontos

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right\}$$

Matriz de rotação

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

é a matriz de rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário. Os autovalores desta matriz são $\cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$. Note que

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \text{ com } \theta = \arccos(3/5$$

Os autovalores de A são $3 \pm 4i$ e as trajetórias são

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = 5^n \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$$

tem autovalores

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

Podemos achar os "autovetores complexos"

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Agora definindo

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ temos } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$