Resolução Lista 4

Questão 1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \quad \Rightarrow \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1}{2}L_4 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

QUESTÃO 2.

Definição. Uma matriz $n \times n$ que pode ser obtida da matriz identidade I_n de tamanho $n \times n$ executando uma única operação elementar sobre linhas é dita **matriz elementar**.

Quando uma matriz A é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar E, o resultado é o mesmo o de executar a mesma operação elementar sobre linhas na matriz A:

Teorema. Se a matriz elementar E resulta de efetuar uma certa operação sobre linhas em I_n e se A é uma matriz $n \times n$, então o produto EA é a matriz que resulta quando esta mesma operação sobre linhas é efetuada em A.

Vamos efetuar as operações elementares sobre linhas na matriz A de modo a obter a matriz escalonada reduzida R. E, as mesmas operações elementares que fizermos em A, vamos fazer na matriz identidade I_4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{3}L_3 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}L_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

Agora, as mesmas operações que efetuamos em A para obter R, iremos efetuar em I_4:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \quad \Rightarrow \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Rightarrow \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad \Rightarrow \quad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, pelo Teorema enunciado acima temos que $E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = R$. $\square$

Questão 3. Sejam $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrizes $n \times n$ triangulares inferiores, isto é $a_{ii} = b_{ii} = 1$ e $a_{ij} = b_{ij} = 0$ se $i < j$. Vamos mostrar que AB também é triangular inferior, isto é,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ \color{blue}{a_{i1}} & \color{blue}{a_{i2}} & \color{blue}{a_{i3}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{ij}} & \color{blue}{\cdots} & \color{blue}{a_{in}} \\ & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & \color{red}{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & \color{red}{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & \color{red}{b_{ij}} & \cdots & b_{in} \\ & & & \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & c_{n3} & \cdots & \color{red}{b_{nj}} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & \color{purple}{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ & & & \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

então $c_{ii} = 1$ e $c_{ij} = 0$ para $i < j$.
Sabemos que

$$\color{purple}{c_{ij}} = \color{blue}{a_{i1}}\color{red}{b_{1j}} + \color{blue}{a_{i2}}\color{red}{b_{2j}} + \cdots + \color{blue}{a_{in}}\color{red}{b_{nj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Se $i = j$ então

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

Como k varia de 1 até n, podemos dividir nos seguintes casos:

(1) quando $1 \leq k \leq i-1$ então $a_{ik} \in \mathbb{R}$ e $b_{ki} = 0$;

(2) quando $k = i$ então $a_{ik} = a_{ii} = 1$ e $b_{ki} = b_{ii} = 1$;

(3) quando $i+1 \leq k \leq n$ então $a_{ik} = 0$ e $b_{ki} \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$\begin{aligned} c_{ii} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} &= \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki}}}_{\text{pelo item (1)}} + \underbrace{\cancelto{1}{a_{ii}b_{ii}}}_{\text{pelo item (2)}} + \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{ki}}}_{\text{pelo item (3)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo $\boxed{c_{ii} = 1}$ para todo $i = 1, \cdots, n$.
Suponha agora que $i < j$ então,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

Nós temos que $i < j$ e como k varia de 1 até n, podemos dividir nos seguintes casos:

(1) quando $1 \leq k \leq i < j$ então $a_{ik} \in \mathbb{R}$ e $b_{kj} = 0$;

(2) quando $i < k < j$ então $a_{ik} = 0$ e $b_{kj} = 0$;

(3) quando $i < j \leq k \leq n$ então $a_{ik} = 0$ e $b_{kj} \in \mathbb{R}$.

Assim, se $i < j$ temos que

$$\begin{aligned} c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} &= \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i} a_{ik}b_{ki}}}_{\text{pelo item (1)}} + \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{k=i+1}^{j-1} a_{ik}b_{ki}}}_{\text{pelo item (2)}} + \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{k=j}^{n} a_{ik}b_{ki}}}_{\text{pelo item (3)}}. \\ &= 0 \end{aligned}$$

E, portanto, $\boxed{c_{ij} = 0 \text{ para } i < j}$.

O caso em que $i > j$ não é necessário ser analisado, pois não há exigência para os elementos c_{ij} quando $i > j$ por definição, isto é, eles podem assumir quaisquer valores.

E, assim, concluímos que AB é uma matriz triangular inferior, como queríamos. $\square$

QUESTÃO 4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e } T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vamos calcular $T\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Sabemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as propriedades:

1. $T(x + y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m$;
2. $T(kx) = kT(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^m$ e $\forall k \in \mathbb{R}$.

Dessa forma vamos escrever o vetor $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e usar as propriedades (1.) e (2.) acima.

Seja $r, s \in \mathbb{R}$ escalares tais que

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 8 = r + 2s \\ 3 = s \\ 7 = -r + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ s = 3 \end{cases}.$$

E, usando as propriedades (1.) e (2.) acima nós obtemos:

$$T\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = T\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \underbrace{=}_{(1.)} T\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) + T\left(3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \underbrace{=}_{(2.)}$$

$$\underbrace{=}_{(2.)} 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

QUESTÃO 5. Sabemos que todo vetor no $\mathbb{R}^2$ é escrito como combinação linear dos vetores da base canônica, isto é, se $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nós temos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2.$$

Dessa forma se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, nós temos que

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\,T(e_1) + y\,T(e_2).$$

Se $T(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e $T(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ então

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de modo que a matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ é a matriz associada a transformação T.
Dessa forma, concluímos que para determinarmos a matriz associada a uma transformação linear, basta calcularmos a transformação nos vetores da base canônica.

Vamos encontrar a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que obtemos da seguinte forma, dado um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

1°) projetamos (x, y) na reta $r : (0, 0) + t(1, 1)$;

2°) o resultado, rotacionamos de 30°.

Note que os 1° e 2° passos são as seguintes transformações lineares, respectivamente

$$T_1 := \mathrm{proj}_{v_r} \text{ e } T_2 := rot_{30^\circ},$$

onde $v_r = (1, 1)$ é o vetor diretor da reta r. Sendo assim, $T := T_2 \circ T_1$, de fato,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underbrace{\mapsto}_{(1^\circ)} T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underbrace{\mapsto}_{(2^\circ)} T_2 \left(T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$

Sabemos que $\mathrm{proj}_{v_r}((x, y)) = \dfrac{(x, y) \cdot v_r}{||v_r||^2} v_r$, assim

$$T_1(e_1) = \frac{e_1 \cdot v_r}{||v_r||^2} v_r = \frac{(1,0) \cdot (1,1)}{||(1,1)||^2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{e}$$

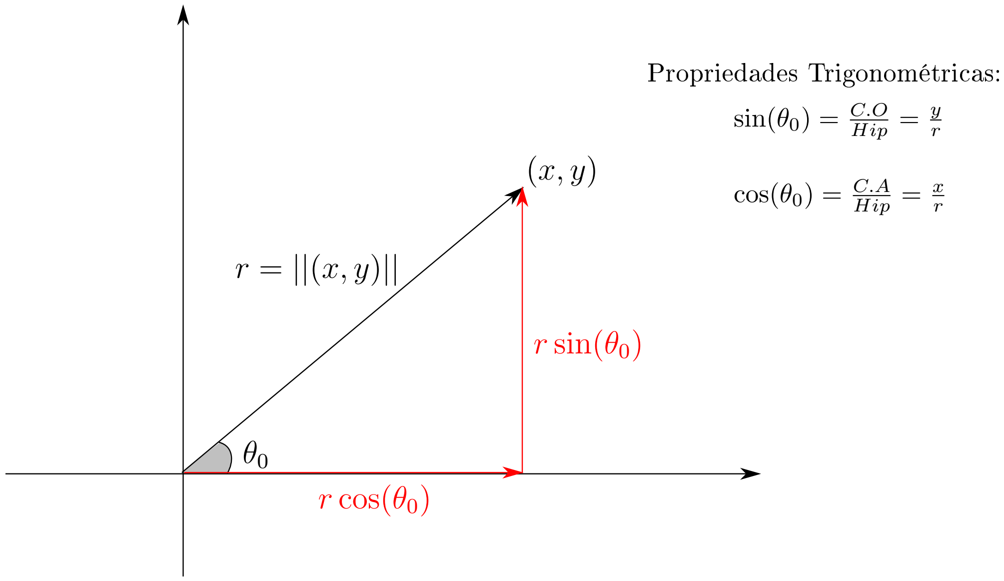
$$T_1(e_2) = \frac{e_2 \cdot v_r}{||v_r||^2} v_r = \frac{(0,1) \cdot (1,1)}{||(1,1)||^2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Portanto,

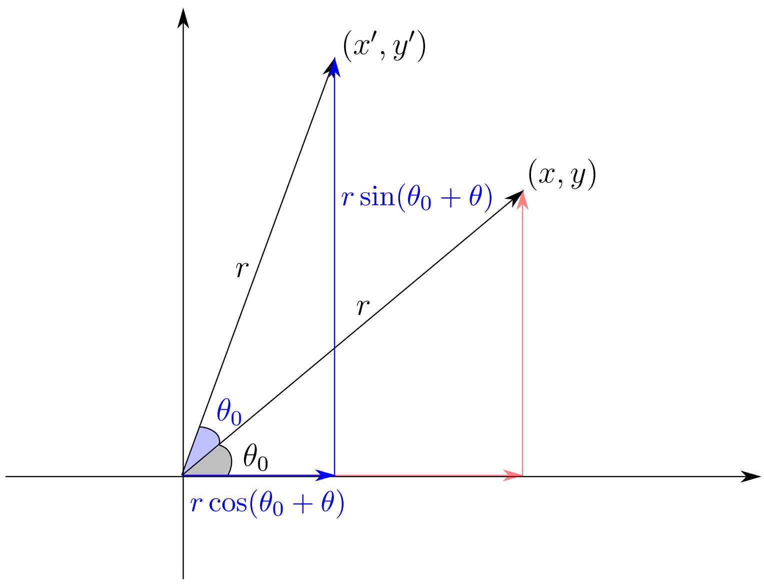
$$\boxed{T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.}$$

Para determinarmos a matriz associada a transformação T_2 vamos, novamente, calcular $T_2(e_1)$ e $T_2(e_2)$.

Sabemos que um vetor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$ escrito em coordenadas polares é $\begin{pmatrix} r\cos(\theta_0) \\ r\sin(\theta_0) \end{pmatrix}$ onde $r = ||(x, y)||$ e θ_0 é o ângulo que o vetor forma com o eixo x:



Além disso, quando rotacionamos um vetor, alteramos somente o ângulo, isto é, se rotacionarmos o vetor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ por um ângulo θ obtemos um novo vetor $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ com mesma norma r, mas ao ângulo inicial θ_0 adicionamos θ, obtendo o novo ângulo $\theta_0 + \theta$.



Sendo assim, lembrando das propriedades do seno e cosseno da soma de dois arcos, temos que

$$\text{rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta_0+\theta) \\ r\sin(\theta_0+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos(\theta_0)\cos(\theta) - \sin(\theta_0)\sin(\theta)) \\ r(\sin(\theta_0)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta_0)) \end{pmatrix}$$

No nosso caso particular, temos que $||e_1|| = ||e_2|| = 1$ e o ângulo que e_1 e e_2 formam com o eixo x é $0°$ e $90°$, respectivamente. Assim,

$$\text{rot}_\theta\,(e_1) = \begin{pmatrix} 1(\cos(0°)\cos(\theta) - \sin(0°)\sin(\theta)) \\ 1(\sin(0°)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(0°)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\text{rot}_\theta\,(e_2) = \begin{pmatrix} 1(\cos(90°)\cos(\theta) - \sin(90°)\sin(\theta)) \\ 1(\sin(90°)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(90°)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Desse modo, temos que

$$T_2(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$T_2(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(30°) \\ \cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\boxed{T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}.$$

Por fim, para determinarmos T, basta calcularmos a composição $T_2 \circ T_1$. Seja $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ então

$$\begin{aligned} T_2\left(T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_2\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &= \underbrace{\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right)}_{\text{Produto de Matrizes}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} & \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$