Algumas soluções - Lista 6

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício 2:

Seja $f(x) = x^3 - 4x + 2$, e considere os intervalos $[-3, -2]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$. Fazendo a conta, verificamos que o sinal de f é contrário nos extremos de cada um dos intervalos mencionados. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, podemos utilizar o teorema do anulamento para concluir que existem reais c_1 em $(-3, -2)$, c_2 em $(0, 1)$ e c_3 em $(1, 2)$ que anulam f. É claro que os três números são distintos, pois pertencem a intervalos disjuntos. Portanto, a equação admite três raízes reais distintas.

Exercício 4:

(b) Vamos definir $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{1 + x^2}$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos que f é contínua em $\mathbb{R}$, então também é contínua em $[-1, 1]$. Pelo Teorema de Weierstrass, existem reais x_1 e x_2 em $[-1, 1]$ tais que

$$\frac{x_1^2 + x_1}{1 + x_1^2} = f(x_1) \leq f(x) = \frac{x^2 + x}{1 + x^2}$$

e

$$\frac{x_2^2 + x_2}{1 + x_2^2} = f(x_2) \geq f(x) = \frac{x^2 + x}{1 + x^2}$$

para todo $x \in [-1, 1]$. Os números $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são, portanto, os valores mínimo e máximo, respectivamente, do conjunto A.

Exercício 5:

(e) Para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$2^x - 3^x = 3^x(\frac{2^x}{3^x} - 1) = 3^x \left[\left(\frac{2}{3} \right)^x - 1 \right].$$

Como $\lim_{x\to\infty} 3^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right] = -1$, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty} (2^x - 3^x) = -\infty.$$

Exercício 7:

(f) Para todo $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \ln(x+1) = \ln 2,$$

uma vez que ln é uma função contínua.

Exercício 8:

(b) Vamos fazer a substituição $u = \frac{x}{2}$ para que possamos escrever

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u+1}.$$

Observe que quando $x \to \infty$, $u \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1} = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u+1} = \lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u} \cdot \left(1+\frac{1}{u}\right)\right].$$

Como

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2u} = \left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^2 = e^2$$

e

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right) = 1,$$

concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+1} = e^2 \cdot 1 = e^2.$$

Exercício 9:

(b) Para todo $x \neq 0$, podemos escrever

$$\frac{e^{x^2}-1}{x} = x \cdot \frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

Vamos calcular separadamente o limite de $\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ quando x tende a 0. Para isso, façamos a substituição $u = x^2$, de forma que

$$\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{e^u-1}{u}.$$

Quando $x \to 0$, $u \to 0$ e portanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(x \cdot \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Exercício 11:

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função f (derivável no ponto p) no ponto $(p, f(p))$ é, por definição,

$$y - f(p) = f'(p)(x-p).$$

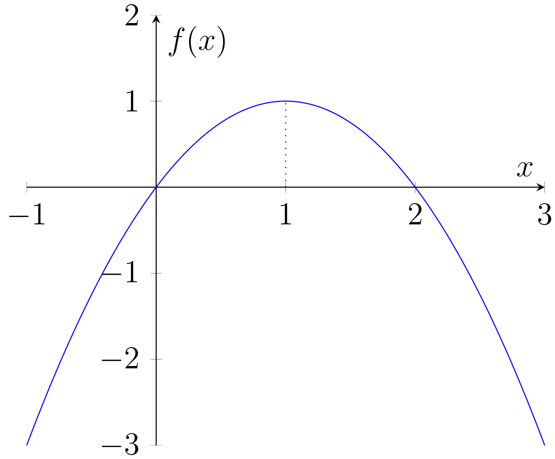
(d) Basta substituir os valores respectivos na equação acima. Como $f'(x) = 2x - 1$, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1)) = (1, 0)$ é

$$y - 0 = f'(1)(x-1) = 1 \cdot (x-1),$$

ou seja, $y = x - 1$.

Exercício 12:

Considere a função $f(x) = -x^2 + 2x$, definida nos reais. Temos que $f'(x) = -2x + 2$, e portanto $f'(1) = 0$. O seu gráfico é:



$f(x)$
x
2
1
−1
−2
−3
−1
1
2
3