

MAP 3122: Métodos Numéricos e Aplicações

Prova de recuperação (3 horas) - 27/06/2020

Prof. Antoine Laurain

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Calculadora e notas de aula são permitidos. **Justifique suas respostas e verifique seus cálculos.**

Exercício 1. (2.5 pontos) Consideramos a função $g(x) = x \cos(x) - \frac{x^4}{24}$.

1. Usando uma tabela de variações, mostre que a função g tem um único ponto de máximo $x^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Escreva a iteração do método de Newton para aproximar x^* (não precisa calcular as iterações).
3. Determine um ponto inicial $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que a convergência desta iteração de Newton seja garantida e a sequência gerada seja monotônica. Justifique a resposta usando um teorema do curso.

Exercício 2. (3 pontos) Neste problema, os cálculos dos $T_k(m)$ devem ser feitos usando truncamento a 7 decimais.

1. Calcule o valor exato da integral $L = \int_0^\pi x \sin x dx$ (sem usar calculadora).
2. Seja $T_0(m)$ a fórmula dos trapézios composta para m intervalos em $[0, \pi]$ que aproxima L . Calcule $T_0(m)$ para $m = 1, 2, 4$. (escreva também a expressão explícita de $T_0(m)$ para cada m).
3. Escreva a tabela de Romberg para a aproximação de L usando os valores $m = 1, 2, 4$. Qual é a melhor aproximação de L nessa tabela? (justifique comparando os erros de aproximação). Calcule o erro cometido (exato) correspondente a essa melhor aproximação.
4. Qual é o valor mínimo de m que devemos escolher para aproximar L com uma precisão ε usando apenas $T_0(m)$? Calcule esse valor mínimo de m quando a precisão ε é igual ao erro calculado no item 3.

Dica: o erro cometido E ao calcular a integral duma função f num intervalo $[a, b]$ usando $T_0(m)$ satisfaz

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Exercício 3. (2 pontos) Determine os valores de α, β, a, b, c , de modo que a função $s(x)$ definida abaixo seja um spline cúbico (isto é $s \in C^2([0, 2])$), e satisfaz também $s'(0) = 2$, $s'(2) = 4$.

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c & \text{if } x \in [0, 1], \\ \alpha(x-1)^3 + \beta(x-2) & \text{if } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Exercício 4. (2.5 pontos) Consideramos a EDO de segunda ordem seguinte:

$$y''(t) = \sin(y(t)), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

1. Calcule duas iterações do método de Euler, com passo h , para calcular aproximações de $y(2h)$ e $y'(2h)$ (escreva as expressões em função de h).
2. Calcule uma iteração usando o método numérico abaixo, com passo h , para calcular aproximações de $y(h)$ e $y'(h)$ (escreva as expressões em função de h):

$$w_{i+1} = w_i + hf \left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i) \right).$$