Campo Electromagnético Produzido por Cargas em Movimento

[J. Frenkel; Princípios da Eletrodinâmica Básica; Cap. 8]

[W. Panofsky and M. Phillips; Classical Electricity and Magnetism; Chap. 19]

Métodos

- Cálculo clássico, sem utilizar relatividade restrita – referências desta aula e também

  [B. Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec. Edition; Section 6.5]

  [J.B. Marion; Classical Electromagnetic Radiation; Chap. 7]

- Usando formulação covariante do electromagnetismo

  [J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Chap. 14]

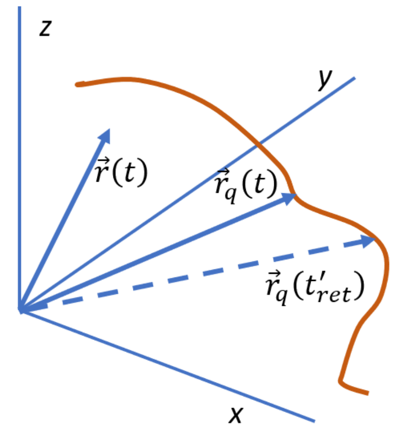
  [B. Thidé; Electromagnetic Field Theory; Sec. Edition; Section 7.3]

Potenciais Retardados

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{[\rho(\vec{r}\,',t')]_{ret}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'; \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[\vec{J}(\vec{r}\,',t')]_{ret}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Cargas em movimento (Seção 6.5 e problema 6.2 do Jackson e problema 4; sexta lista)

$$\vec{r} = \vec{r}_q(t); \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}_q}{dt}$$



Densidades de carga e corrente associadas

$$\rho(\vec{r}', t') = q\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_q(t')\right]; \; \vec{j}(\vec{r}', t') = q\vec{v}(t')\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_q(t')\right]$$

Substituindo nas expressões para os potenciais, temos

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\left[\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_q(t')\right]\right]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int \frac{\left[\vec{v}(t')\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_q(t')\right]\right]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Usando o artifício de representar a especificação de uma grandeza no instante retardado como a integração no tempo de uma função delta, conforme explicado no problema 4 da sexta lista, podemos escrever o potencial como

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt' \int dV' \delta(t' - t_{ret}) \frac{\delta\left[\vec{r}' - \vec{r}_q(t')\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt' \frac{\delta\big(f(t')\big)}{|\vec{r} - \vec{r}'_q|}$$

Onde $f(t') = t' - t + \left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|/c$. A função $f(t')$ só tem um zero, $t' = t_{ret}$.

Assim, usando a propriedade da função delta mencionada no problema 4, podemos escrever

$$\delta\big(f(t')\big) = \frac{\delta(t' - t_{ret})}{\left[\frac{df}{dt'}\right]_{t_{ret}}}$$

$$\frac{df}{dt'} = 1 + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left[\left(x - x_q(t')\right)^2 + \left(y - y_q(t')\right)^2 + \left(z - z_q(t')\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{c}\frac{\left(x - x_q\right)\frac{dx_q}{dt'} + \left(y - y_q\right)\frac{dy_q}{dt'} + (z - z)\frac{dz_q}{dt'}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|}$$

$$\therefore \left[\frac{df}{dt'}\right]_{ret} = \left[1 - \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right)\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q(t')\right|}\right]_{ret} \;;\; \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

Substituindo este resultado na expressão para o potencial, temos

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt' \frac{\delta(t'-t_{ret})}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q(t')\right| - \left(\vec{r}-\vec{r}_q(t')\right)\cdot\vec{\beta}}$$

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}}\right]_{ret} \quad ; \ \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q}$$

Fazendo o mesmo para o potencial vetor, obtemos

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\vec{v}}{R-\vec{R}\cdot\vec{\beta}}\right]_{ret}}$$

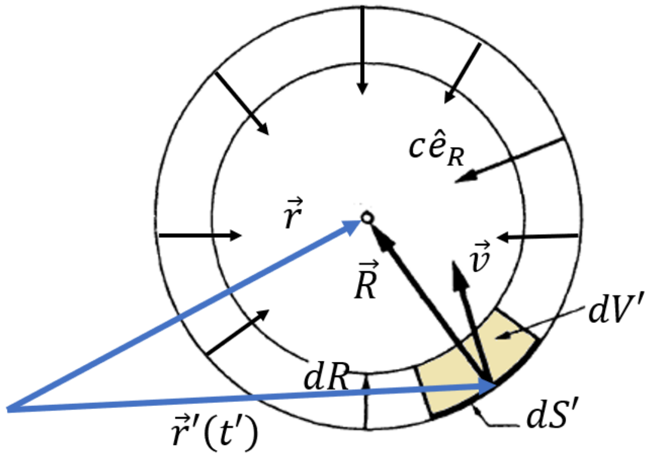
Essas expressões são denominadas *Potenciais de Liénard-Wiechert*, que as obtiveram em 1898 e 1900, respectivamente, portanto antes da formulação da Teoria da Relatividade. Apesar disso, elas fornecem o campo eletromagnético relativisticamente correto, produzido por cargas pontuais em movimento arbitrário.

É também importante realçar que os potenciais de Liénard-Wiechert só são válidos no Calibre de Lorentz

"Derivação Física" dos Potenciais de Liénard-Wiechert (Panofsky & Phillips)

Modelo

- Suponhamos que a carga não seja pontual, mas uma distribuição de cargas em um volume elementar muito pequeno.
- A carga total do sistema não será igual a $\int [\rho(\vec{r}', t')]_{ret} dV'$, porque as várias contribuições para a integral são determinadas em instantes diferentes.
- Consideremos um observador no ponto $\vec{r}$ e uma "*esfera coletora de dados*", vindo do infinito com velocidade c, que convirja para ele exatamente no instante t.
- A esfera pa pelo ponto $\vec{r}'$ no instante retardado $t' = t - R/c$, registrando a carga que contribuirá para o potencial medido em $\vec{r}$ no instante t.



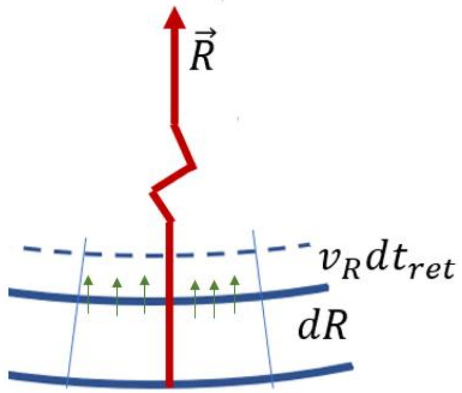
- Se as cargas no volume elementar tiverem uma velocidade na mesma direção do movimento da esfera, a integral de volume da densidade de carga dará um valor aparentemente maior que a carga total do sistema

Quantidade de carga varrida pela esfera quando encolhe de dR

a) Cargas em repouso

$$dq_0 = [\rho]_{ret} dR dS'$$

b) Cargas em movimento com velocidade $\vec{v} = d\vec{r}_q/dt'$ → durante o intervalo de tempo $dt_{ret} = dR/c$ escapa do volume varrido a quantidade de carga



$$dq_1 = [\rho]_{ret} dS' \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \frac{dR}{c} \right)$$

c) Quantidade de carga amostrada pela esfera dentro do volume dV'

$$dq = dq_0 - dq_1 = [\rho]_{ret} \left[1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR} \right] dS' dR \implies [\rho]_{ret} dV' = \frac{dq}{\left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{\beta}}{R} \right]}$$

Substituindo na expressão para o potencial retardado

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho(\vec{r}', t')]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\left[R - \vec{R} \cdot \vec{\beta} \right]_{ret}}$$

No limite de carga puntiforme, os termos que dependem da distância variam pouco na integral; portanto

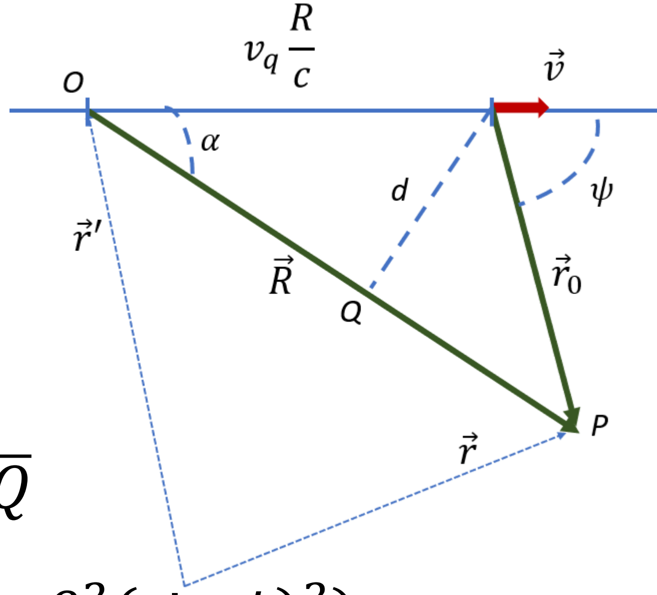
$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{R - \vec{R}\cdot\vec{\beta}}\right]_{ret}$$

que é o potencial escalar de Liénard-Wiechert. Naturalmente, o mesmo modelo se aplica ao potencial vetor.

<u>Comentários</u>

- Os potenciais de Liénard-Wiechert ordinariamente só permitem o cálculo dos campos em termos das posições e velocidades retardadas. Isto ocorre porque são expressos em termos da velocidade $\vec{v}(t')$ e da "distancia relativa" $s\left(\vec{r},t^{\acute{}\prime}\right) = R - \vec{R}\cdot\vec{v}(t')/c$; $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t')$, calculados no instante retardado. Portanto, os potenciais são expressos <u>explicitamente</u> em termos de t', que, por sua vez, é expresso <u>implicitamente</u> em termos de t através da expressão que define o instante retardado. Como a relação entre a posição *retardada* e a *atual* em geral não é conhecida, não é possível expressar os potenciais somente em termos de t, a não ser no caso de movimento uniforme.

- É interessante notar que, em 1904, portanto antes do advento da Teoria da Relatividade, Arnold Sommerfeld observou que os potenciais de Liénard-Wiechert divergem quando a carga se desloca na direção de $\vec{R}$ e $v \to c$.
- Na derivação clássica que fizemos, o observador está na posição $\vec{r}$, em um referencial que tem um significado absoluto, e $\vec{v}(t')$ é a velocidade da carga neste referencial. Como veremos no próximo curso, os potenciais de Liénard-Wiechert podem ser derivados de uma forma muito mais elegante e simples utilizando o formalismo relativístico covariante. Neste caso, $\vec{v}$ é a velocidade relativa entre dois referenciais inerciais.



<u>Caso particular: carga em movimento uniforme</u>

$\vec{v}(t') = \vec{v}_q \to const;\ \vec{r}_0$distância entre a carga e o ponto de observação no instante atual. Pela figura vemos que

$$s = R - \vec{R}\cdot\frac{\vec{v}_q}{c} = R - R\frac{v_q}{c}\cos\alpha = R - \overline{OQ} = \overline{PQ}$$

$$\therefore\quad s^2 = r_0^2 - d^2 = r_0^2 - \beta^2(R\sin\alpha)^2 = r_0^2 - \beta^2(r_0\sin\psi)^2 = r_0^2(1-\beta^2(\sin\psi)^2)$$

Usando este resultado nas expressões para os potenciais de Liénard-Wiechert, temos

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_0\sqrt{1-(\beta\sin\psi)^2}}; \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_q}{r_0\sqrt{1-(\beta\sin\psi)^2}}$$

O cálculo dos campos a partir desses potenciais será visto na sétima série de exercícios.