

Aula de Fis Mat 2 (26/06/2020)

Problemas de Sturm-Liouville

$$P(x) y''(x) + Q(x) y'(x) + R(x) y(x) = 0$$

$$[p(x) y'(x)]' - q(x) y(x) + \lambda r(x) y(x) = 0$$
$$0 \leq x \leq L$$

$$L[y(x)] = -p(x) y'(x) + q(x) y(x)$$

$$p(x) > 0 \text{ e } r(x) > 0$$

$p(x), p'(x), q(x)$ e $r(x)$ são contínuas em $0 \leq x \leq L$

$$\mathcal{L}[y(x)] = -[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) \quad \text{operador de Liouville}$$

Eg. de Autovalores e autofunções

Problema de Sturm-Liouville

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[y(x)] = \lambda r(x)y(x) \quad 0 \leq x \leq L \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \\ b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \end{array} \right.$$

produto interno

$$\langle v(x); u(x) \rangle = \int_0^1 dx v^*(x) u(x)$$

identidade de Lagrange

$$\langle v(x); \mathcal{L}[u(x)] \rangle - \langle \mathcal{L}[v(x)]; u(x) \rangle = 0$$

Exemplo: oscilador harmônico $y''(x) + \lambda y(x) = 0$

problema de Sturm-Liouville

$$[p(x)y'(x)]' - q(x)y(x) + \lambda r(x)y(x) = 0$$

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 0 \text{ e } r(x) = 1 \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

Condições de contorno

$$y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 0 \quad \text{condição de normalização}$$

$$\sqrt{\lambda_n} = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = 1$$

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$$

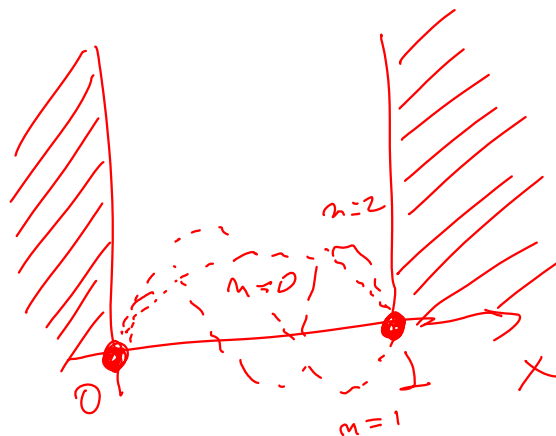
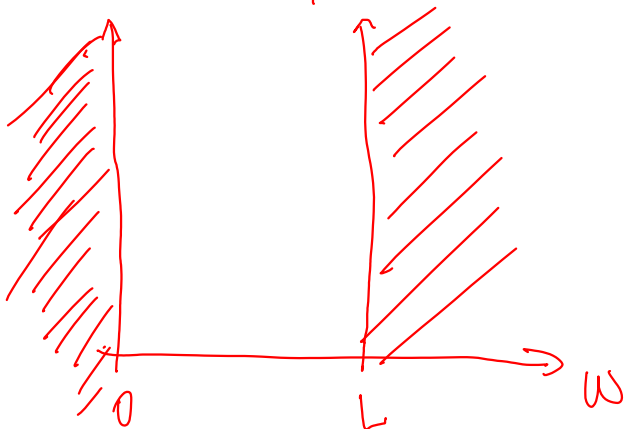
para $n = 1, 2, \dots$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2$$

Autovalores

A solução dessa equação:

$$x = \frac{\omega}{2}$$



$$y(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

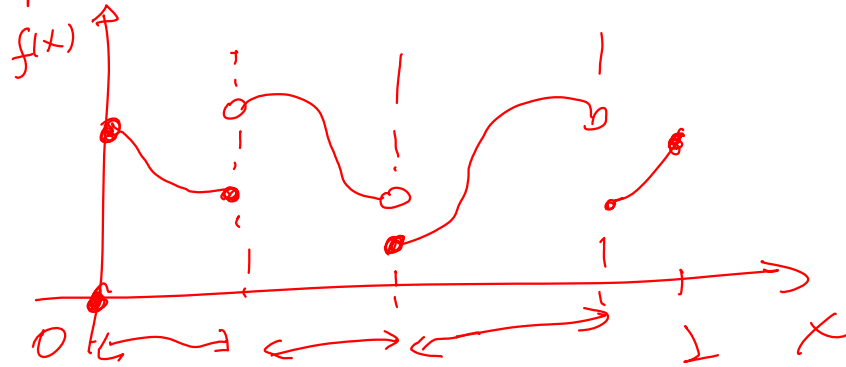
$$y(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi \quad \text{quando } n = 1, 2, \dots$$

No oscilador harmônico:

Autovalores: $\lambda_n = n\pi$ $n=1,2,3,\dots$
 Autofunções: $\phi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$

$f(x)$ que é seccionamente contínua



$f(x)$ $0 \leq x \leq 1$

$f(0) = 0$ $f(1) = 0$

Objetivo: expandir $f(x)$ em termo das

Autofunções do problema de Sturm Liouville.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

série de Fourier

$$b_n = 2 \int_0^1 dx \underbrace{\sin(n\pi x)}_{\phi_n} f(x)$$

$$= 2 \langle \phi_n, f \rangle$$

Oscilador harmônico estudado no contexto do problema de Sturm-Liouville.

Problema de
Sturm-Liouville
(PSL)

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y(x)] = \lambda r(x) y(x) & 0 \leq x \leq L \\ a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0 \\ b_1 y(L) + b_2 y'(L) = 0 \end{cases}$$

produto interno $\langle v(x); u(x) \rangle = \int_0^L dx v^*(x) u(x)$

Teorema I: todos os auto-valores λ_m PSL são reais:

no caso do oscilador
harmônico (OH)

$$\lambda_m = m\pi$$

$m=1,2,\dots$

II: Se $\psi_m(x)$ e $\psi_n(x)$ são duas autofunções
PSL

$$\mathcal{L}[\psi_m(x)] = \lambda_m r(x) \psi_m(x)$$

$$\mathcal{L}[\psi_n(x)] = \lambda_n r(x) \psi_n(x)$$

NO OH

$$\lambda_m = m\pi \Rightarrow \psi_m = \sqrt{2} \sin(m\pi x)$$

$$\lambda_n = n\pi \Rightarrow \psi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$$

Teorema III: Os autovalores λ_i são Simples (Não degenerados)

Para cada $\lambda_i \Leftarrow \phi_i(x)$ Associado (linearmente independente) e he si

Além disso, é possível ordená-los em ordem crescente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Break

$$\text{Considere } \mathcal{L}[\phi_i] = \lambda_i r(x) \phi_i$$

ϕ_i é uma auto função de $\mathcal{L}$

Associado ao autovalor λ_i

Obtido através de uma constante multiplicativa (como usado em Mec. Q.)

$$\langle \phi_i | r(x) \phi_i \rangle = 1$$

$$\langle \phi_i | r(x) \phi_i \rangle = \int_0^1 dx r(x) |\phi_i(x)|^2 = 1$$

constante multiplicativa

As auto funções ϕ_i são normalizadas por $\langle \phi_i; \Gamma(x)\phi_i \rangle = 1$

elas também formam um conj. ortornormal completo

$$\langle \Gamma(x)\phi_m; \phi_m \rangle = \delta_{m,m} = \int_0^1 dx \Gamma(x) \phi_m^*(x) \phi_m(x)$$

delta de
Kronecker

As funções ϕ_m e ϕ_n são ortogonais se $\langle \Gamma(x)\phi_m; \phi_n \rangle = 0$ e normalizadas se $\langle \Gamma(x)\phi_m; \phi_m \rangle = 1$. " ϕ_i formam uma base ortornormal no espaço de funções!"

Considere uma função $f(x)$ (com as condições que vimos)
no OH e $f(0) = f(1) = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x)$$

$$C_n = \langle \Gamma(x)\phi_n; f(x) \rangle = \int_0^1 dx \Gamma(x) \phi_n^*(x) f(x)$$

OH
 $\phi_n = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$ série de Fourier!!
 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)$

Teorema IV: Considere ϕ_i auto funções normalizadas do PSL

Suponha $f(x)$ e $f'(x)$ seccionamente contínuas

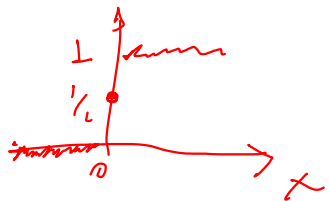
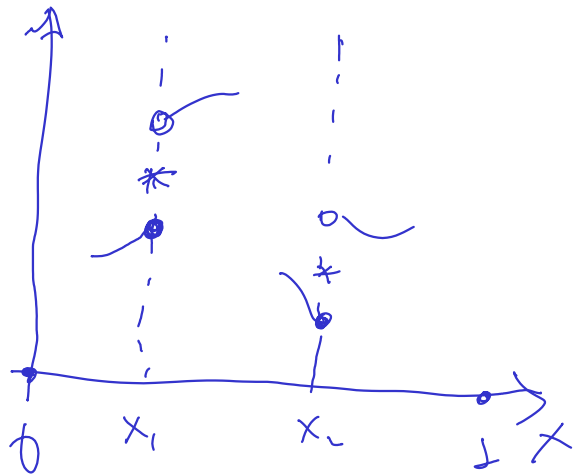
em $0 \leq x \leq 1$

A série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad \text{com coeficientes}$$

$$c_n = \langle \sqrt{x} \phi_n(x); f(x) \rangle = \int_0^1 dx \sqrt{x} \phi_n^*(x) f(x)$$

$f(x)$ converge para $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ para cada
ponto x no intervalo $0 \leq x \leq 1$.



exemplo
função de
Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Até o momento consideramos EDOs homogêneas!
Como fica o caso de EDOs não-homogêneas?

Eq. não homogênea

$$0 \leq x \leq 1 \quad \mathcal{L}[y(x)] = \underbrace{\mu}_{\substack{\neq \\ \text{é uma constante} \\ \text{conhecida}}} \Gamma(x) y(x) + \underbrace{f(x)}_{\text{fonte}}$$

Condições de
contorno

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0$$

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

$p(x), p'(x), q(x)$ e $\Gamma(x)$ contínuas em $0 \leq x \leq 1$

$$p(x) > 0 \quad r(x) > 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(x) = ?$$

Eq. homogêneas : $\mathbb{L}[y(x)] = \lambda \Gamma(x) y(x)$

com autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$
e subfunções associadas $\phi_1(x)$ $\phi_2(x)$ $\phi_n(x)$

Vamos supor que $y(x) = \phi(x)$ no problema não-homogêneo

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) \quad \text{com} \quad b_n = \langle \Gamma(x) \phi_n; \phi \rangle$$

$n=1, 2, \dots$

$\phi = ?$

não tem como calcular b_n por enquanto !!

PSL nas bordas, pois conhecemos as condições de contorno

$$\phi(0) = 0 \quad \phi(1) = 0 \quad \phi_i(0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi_i(1) = 0$$

$$\mathbb{L}[\phi(x)] = \mu \underline{\Gamma(x)} \phi(x) + f(x) \quad \text{Eq. não homogênea}$$

$$\mathbb{L}\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\mathbb{L}[\phi_n(x)]}_{\lambda_n \Gamma(x) \phi_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \underline{\Gamma(x)} \phi_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \Gamma(x) \phi_n = \mu \Gamma(x) \phi(x) + f(x) \quad \Gamma(x) > 0$$

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n \phi_n} = \mu \phi + \frac{f(x)}{\Gamma(x)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{conhecido} \\ \leftarrow \text{conhecido} \end{array}$$

$$r \in \mathbb{R} \quad r^*(x) = r(x)$$

$$\frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

$$c_n = \left\langle \phi_n; \cancel{r(x)} \frac{f(x)}{\cancel{\Gamma(x)}} \right\rangle = \left\langle \phi_n; f(x) \right\rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x) \phi_n(x) = \mu r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + r(x) \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)}_{f(x)}$$

$\parallel$
 $\parallel [\phi]$

$\parallel$
 $\mu r(x) \phi(x)$

$$r(x) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{[(\lambda_n - \mu) b_n - c_n]}_{=0} \phi_n(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

para $\forall n$

Se $\mu \neq \lambda_n \quad n=1, 2, \dots$ $\left(\mu \text{ é diferente de todos os autovalores da eq. homogênea} \right)$

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}$$

$$c_n = \langle \phi_n, f \rangle$$

Se $\mu = \lambda_n$ o problema de contorno somente pode ser resolvido se $f \perp \phi_n$

$$\langle \phi_n, f \rangle = 0$$

Se $\langle \phi_n, f \rangle \neq 0$ não tem solução!!

Se $\mu \neq \lambda_n$ a solução $y(x) = \phi(x)$
é única!!

Se $\mu = \lambda_n$ e $\langle \phi_n, f \rangle = 0$ solução linearmente dependentes!!
e $\langle \phi_n, f \rangle \neq 0$ aí não tem jeito!!