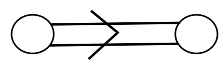
Grupos e Álgebras de Lie e Teoria de Representação - 7600052 (Graduação)
Teoria dos Grupos - SFI 5823 (Pós-Graduação)

Trabalho II - 26/06/2020

Entrega: 03/07/2020

1. **(1,5)** Considere o diagrama de Dynkin de $SO(5)$ dado na figura abaixo



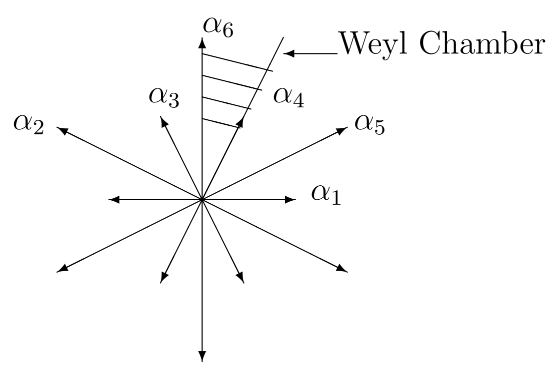
   (a) Calcule a matriz de Cartan.

   (b) Calcule o sistema de raízes.

   (c) Calcule as relações de comutação.

   (d) Mostre como fazer uma escolha consistente dos cociclos $\varepsilon\,(\alpha\,,\,\beta)$.

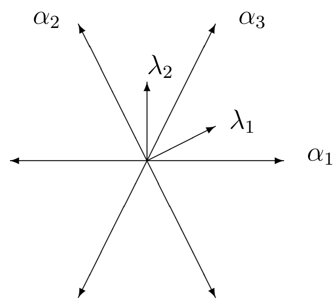
2. **(1,5)** O diagrama de raízes da álgebra de Lie G_2 está mostrado na figura abaixo. Como



sabemos a cada peso dominante λ corresponde uma representação irredutível com peso máximo $\lambda = n_1\,\lambda_1 + n_2\,\lambda_2$, onde n_a são inteiros não negativos e λ_a, $a = 1, 2$, são os pesos fundamentais. Utilizando a fórmula da dimensionalidade de Weyl calcule as dimensões de todas as representações irredutíveis de G_2 em termos dos inteiros n_a, $a = 1, 2$. Calcule o valor numérico das dimensões das cinco representações de dimensões mais baixas.

3. **(1,5)** Construa um tensor totalmente simétrico de rank 3, invariante pela representação adjunta do grupo $SU(3)$. A partir deste tensor construa um operador de Casimir de ordem 3 para o grupo de Lie $SU(3)$. Escreva este operador de Casimir em termos dos operadores do geradores da álgebra de Lie de $SU(3)$, em um base de sua escolha, e em uma representação qualquer $D(T)$. Calcule este operador de Casimir nas representações tripleto e anti-tripleto de $SU(3)$, cujos pesos máximos são λ_1 e λ_2 respectivamente.

4. **(1,5)** O diagrama de raízes da álgebra de Lie $SU(3)$, assim como seus pesos fundamentais, estão mostrado na figura abaixo. Considere a representação irredutível de $SU(3)$



cujo peso máximo é $\lambda = 2\,\lambda_1$.

   (a) Calcule a dimensão desta representação.
   (b) Calcule os pesos desta representação e suas multiplicidades.
   (c) Construa a representação matricial correspondente para os geradores de $SU(3)$ na base de Chevalley.

5. **(1,0)** Considere dois conjuntos A e B de vetores em um espaço Euclideano de dimensão 3, dados por

$$
\begin{aligned}
A &= \{\pm\vec{e}_i\,,\,\pm(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\ ,\ i\neq j\ ;\ \ i,j=1,2,3\} \qquad \text{(12 vetores)}\\
B &= \{\pm\vec{e}_i\,,\,\pm(\vec{e}_i-\vec{e}_j)\ ,\,\pm(\vec{e}_i+\vec{e}_j)\ ,\ i\neq j\ ;\ \ i,j=1,2,3\} \qquad \text{(18 vetores)}
\end{aligned}
$$

onde $\vec{e}_i$, $i=1,2,3$, constitui um conjunto de 3 vetores unitários e ortogonais entre si, i.e. $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$.

   (a) Verifique se cada um destes conjuntos de vetores pode constituir um conjunto de raízes de uma álgebra de Lie. Justifique sua resposta.
   (b) No(s) caso(s) afirmativo(s) determine um conjunto de raízes simples, construa a matriz de Cartan e desenhe o diagrama de Dynkin.

6. **(1,5)** Utilizando a figura do exercício 2, que mostra o diagrama de raízes de G_2, mostre como a representação adjunta de G_2 se decompõe em representações irredutíveis da subálgebra $SU(2) \otimes U(1)$ de G_2, onde $SU(2)$ está associada à raíz simples curta α_1, e cujos geradores são $2\,T_3 \equiv \frac{2\,\alpha_1 \cdot H}{\alpha_1^2}$, $T_\pm \equiv E_{\pm\alpha_1}$, e o gerador de $U(1)$ é $U = \frac{2\,\alpha_6 \cdot H}{\alpha_6^2}$.

7. **(1,5)** Ao fazermos o produto tensorial de duas representações irredutíveis D e D' de um grupo de Lie G, obtemos uma representação $D^{\otimes} \equiv D \otimes D'$ que em geral não é irredutível. Faça a decomposição das seguintes representações $D^{\otimes}$ em termos de representações irredutíveis do mesmo grupo

   (a) $D^{\otimes} = 3 \otimes 3$, onde 3 é a representação tripleto (adjunta) de $SU(2)$.

   (b) $D^{\otimes} = 3 \otimes 3$, onde 3 é a representação tripleto de $SU(3)$, com peso máximo λ_1 (veja diagrama do exercício 4).

   (c) $D^{\otimes} = \bar{3} \otimes \bar{3}$, onde $\bar{3}$ é a representação anti-tripleto de $SU(3)$, com peso máximo λ_2 (veja diagrama do exercício 4).

   (d) $D^{\otimes} = 3 \otimes \bar{3}$, onde 3 e $\bar{3}$ são as representações tripleto e anti-tripleto de $SU(3)$, cujos pesos máximos são λ_1 e λ_2 respectivamente (veja diagrama do exercício 4).