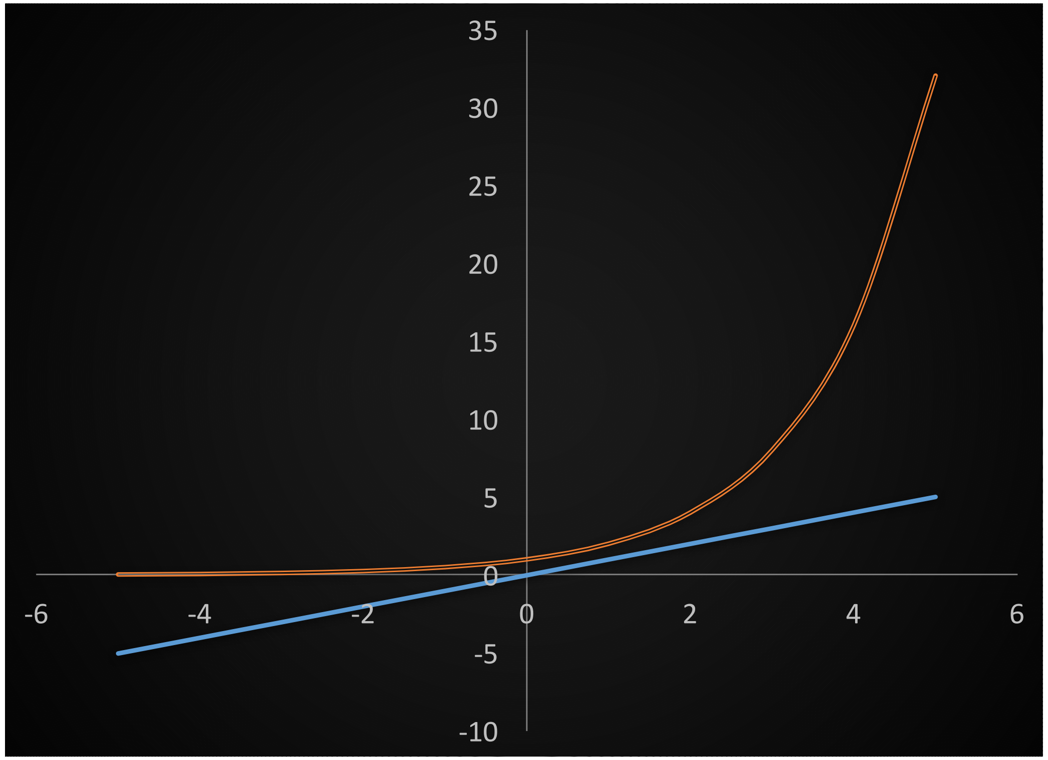
# Funções Exponenciais e Logaritimicas

# Funções Exponenciais



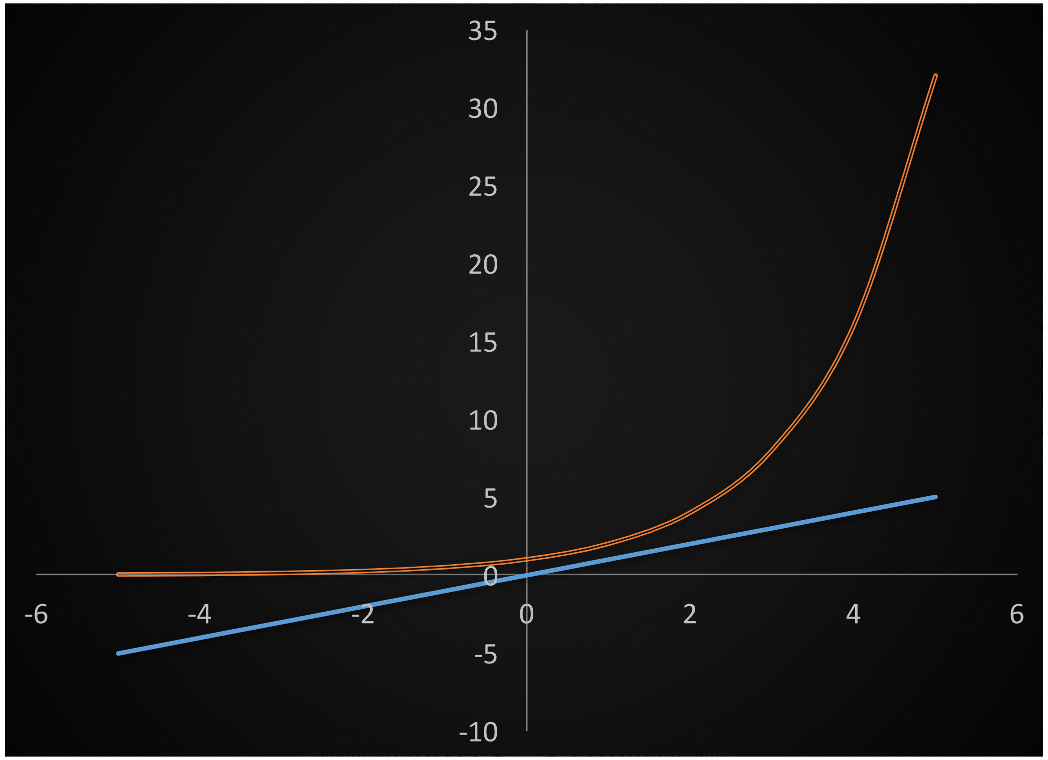

Características

- A variável independente está no expoente

$$\boldsymbol{f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)}$$

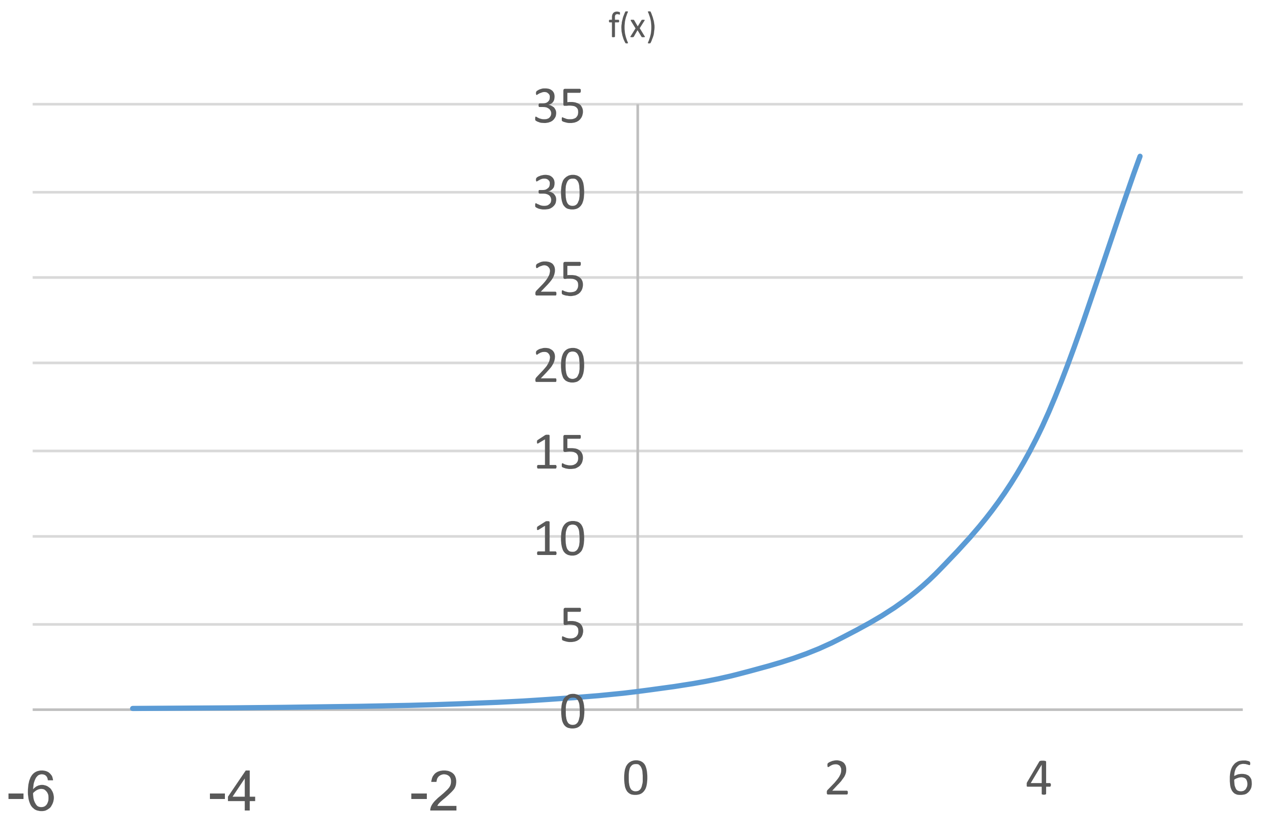
  - $a > 0$ – sem essa restrição, os valores da imagem $a^x$ poderiam não pertencer a $\mathbb{R}$
  - Por exemplo $f(x) = a^{1/2}, com\ a = -2$
  - Se $a = 0$... Indeterminação
  - $a \neq 1$ – para qualquer expoente, $f(x) = 1$

# Funções Exponenciais



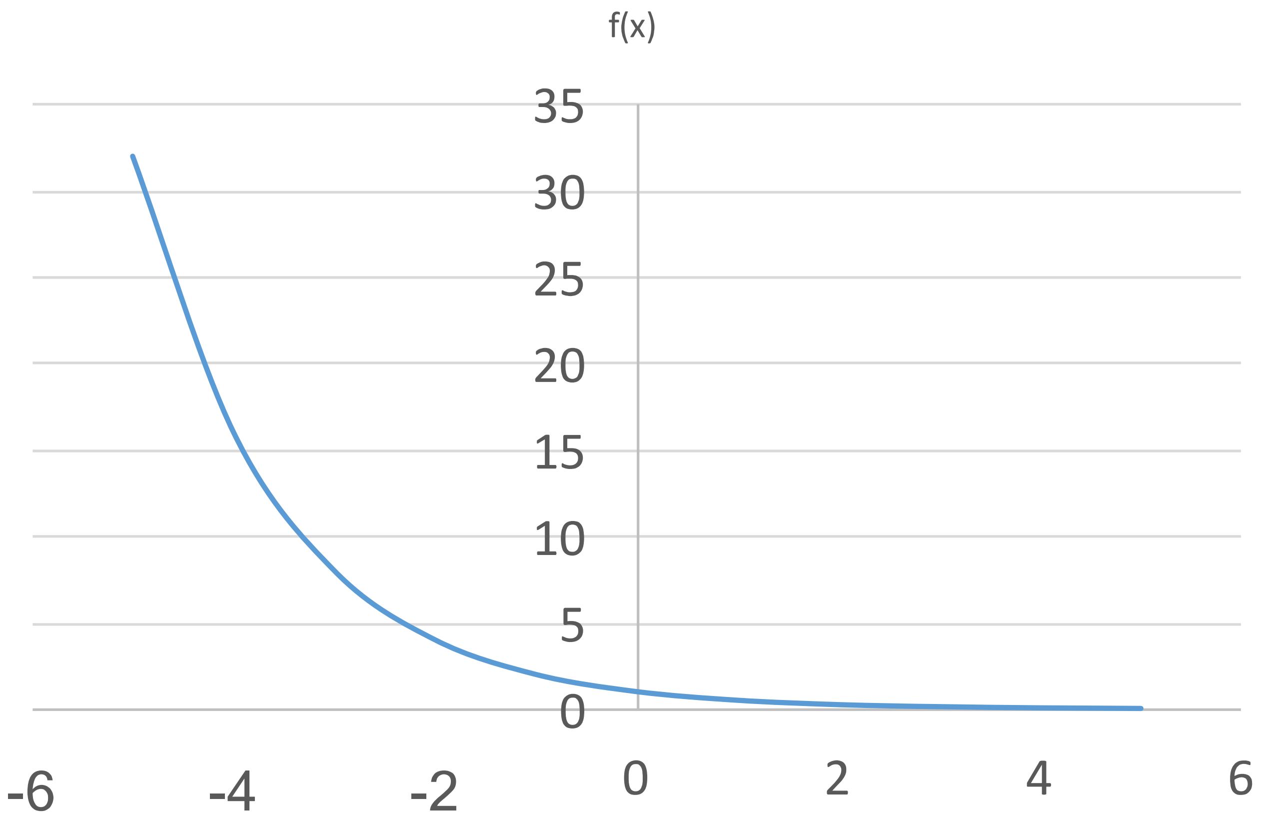

- Aplicação mais conhecida: juros compostos
- No gráfico temos duas funções
  - $f(x) = x$
  - $g(x) = 2^x$
- Repare que $g$ cruza o eixo $y$ em $f(x) = 1$ e que não há interseção no eixo $x$

# Funções Exponenciais



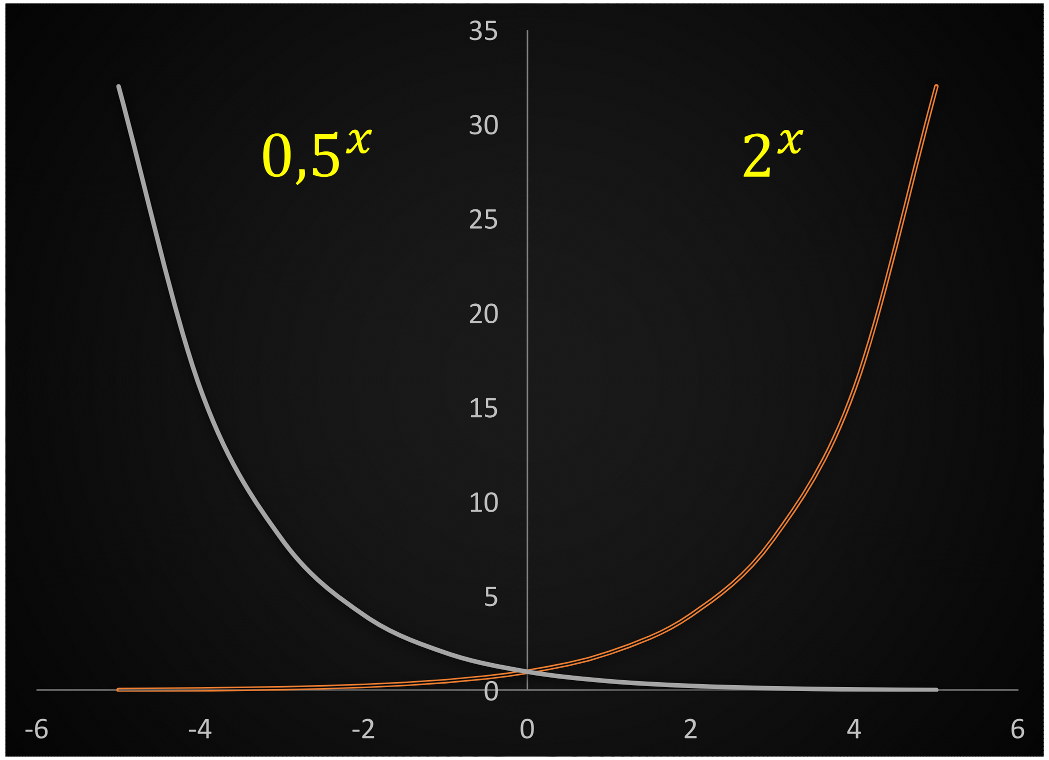

| $x$ | $f(x) = 2^x$ |
|---|---|
| -5 | 0,03125 |
| -4 | 0,0625 |
| -3 | 0,125 |
| -2 | 0,25 |
| -1 | 0,5 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |

# Funções Exponenciais




| $x$ | $f(x) = 1/2^x$ |
|---|---|
| -5 | 32 |
| -4 | 16 |
| -3 | 8 |
| -2 | 4 |
| -1 | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0,5 |
| 2 | 0,25 |
| 3 | 0,125 |
| 4 | 0,0625 |
| 5 | 0,03125 |

# Funções Exponenciais



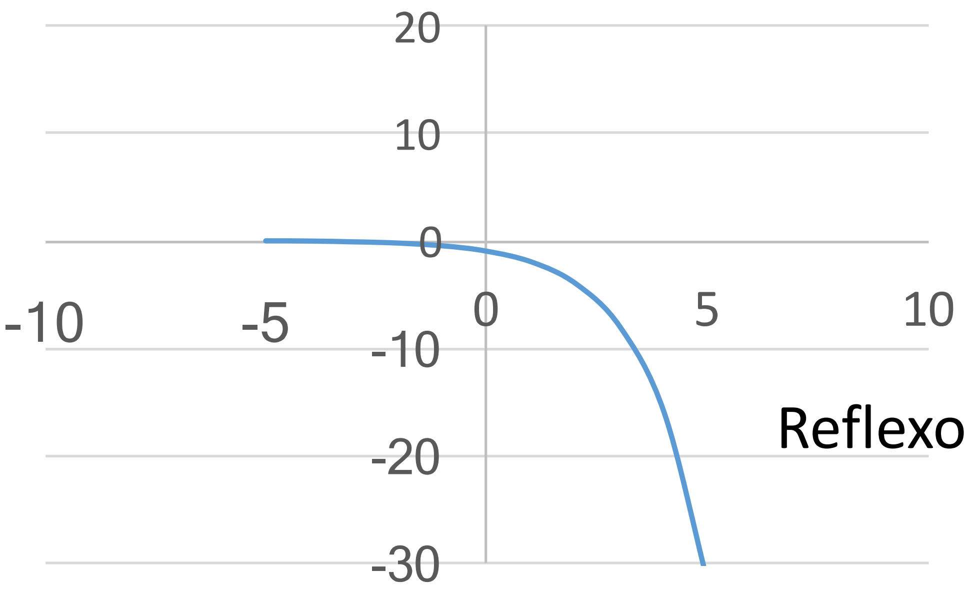

Propriedades

- Domínio: $\mathbb{R}$
- Contradomínio: $\mathbb{R}_+^*$
- Gráfico passa pelo ponto $(0,1)$
- Contínua em $(-\infty, \infty)$
- Crescente em $(-\infty, \infty)$ se $a > 1$
- Decrescente em $(-\infty, \infty)$ $se\ a < 1$

Essas propriedades são base para qualquer função em que a variável aparece no expoente

# Funções Exponenciais

- Por exemplo: $f(x) = -2^x$? Não é função?
- Vamos chamar $g(x) = 2^x$
- Podemos dizer que $f(x) = -g(x)$?

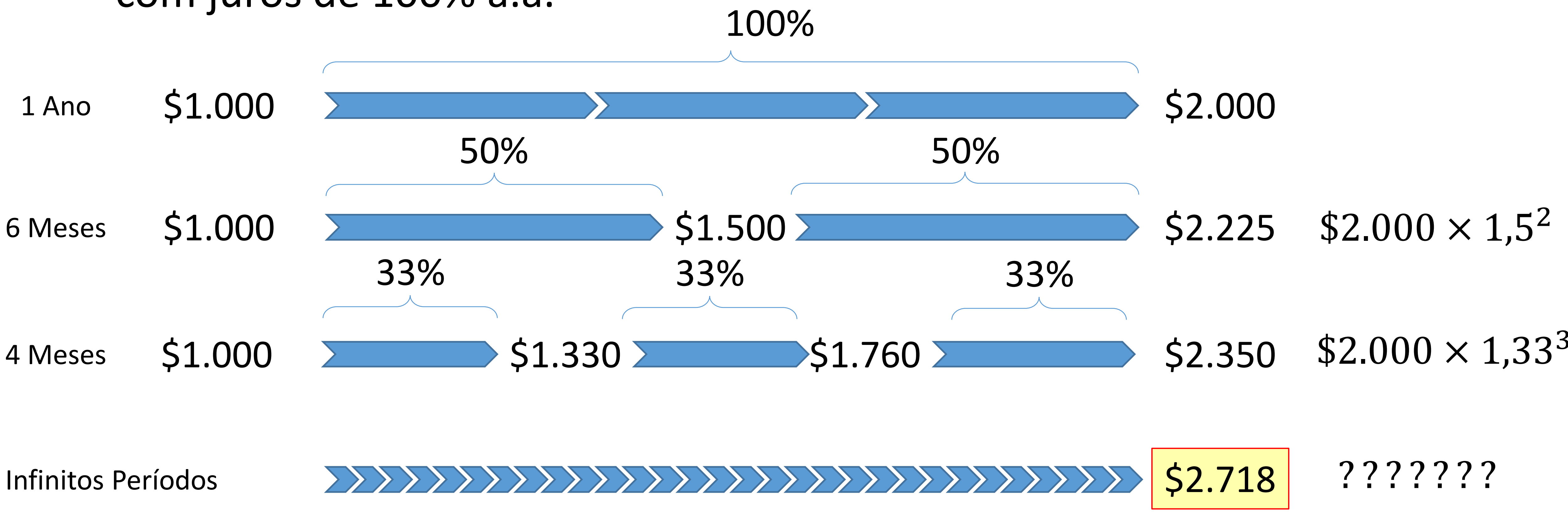



Reflexo de $f(x) = 2^x$

| $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{f(x) = -2^x}$ |
|---|---|
| -5 | -0,03125 |
| -4 | -0,0625 |
| -3 | -0,125 |
| -2 | -0,25 |
| -1 | -0,5 |
| 0 | -1 |
| 1 | -2 |
| 2 | -4 |
| 3 | -8 |
| 4 | -16 |
| 5 | -32 |

# Uma aplicação dessas coisas...

- Situação hipotética: empréstimo de \$1.000 para pagar em um ano com juros de 100% a.a.



# Uma aplicação dessas coisas...

- Adivinhação?
  - Para 1 ano: 1 período
  - Para 6 meses : 2 períodos
  - Para 4 meses: 3 períodos
  - …
  - Composição infinitesimal máxima

$$y = \left(1 + \frac{100\%}{1}\right)^{1} \text{ x } \$1.000$$

$$y = \left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^{2} \text{ x } \$1.000$$

$$y = \left(1 + \frac{100\%}{3}\right)^{3} \text{ x } \$1.000$$

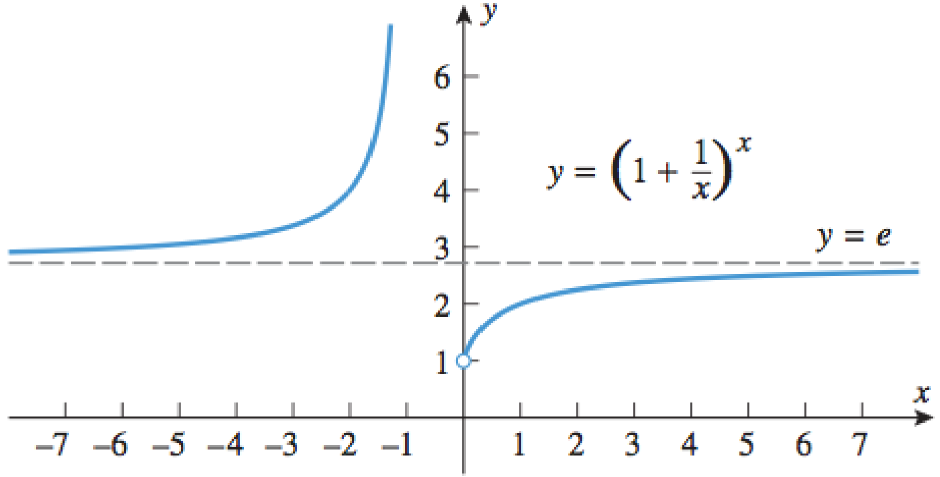
$$y = \left(1 + \frac{100\%}{x}\right)^{x} \text{ x } \$1.000$$

# Uma aplicação dessas coisas...

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\cancel{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}} = 1^{\infty}$

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

  - Constante de Euler – número irracional
  - Assim como $\pi$, esse número é usado para calcular uma série de coisas
    - $e^{\pi i}+1=0$ (cálculo com variáveis complexas)
  - Um dos chamados limites fundamentais




APROXIMAÇÕES DE $e$ POR $(1 + 1/x)^x$ COM VALORES CRESCENTES DE $x$

| $x$ | $1+\frac{1}{x}$ | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | ≈2,000000 |
| 10 | 1,1 | 2,593742 |
| 100 | 1,01 | 2,704814 |
| 1000 | 1,001 | 2,716924 |
| 10.000 | 1,0001 | 2,718146 |
| 100.000 | 1,00001 | 2,718268 |
| 1.000.000 | 1,000001 | 2,718280 |

# Alguns exercícios com funções exponenciais

- $f(x) = Ae^{kx}$. Encontre a lei de formação de $f$, sabendo que $f(0) = 100$ e $f(1) = 120$
  - Dica: $e^{kx} = (e^k)^x$

- $f(x) = Axe^{-kx}$. Encontre $f(3)$, sabendo que $f(1) = 5$ e $f(2) = 7$

- $f(t) = \frac{1.000}{1+Be^{-kt}}$ Encontre $f(5)$, sabendo que $f(0) = 20$ e $f(2) = 30$

# Problemas...

- Se tivermos algo do tipo...
  - $2^x = 16$
  - Como $2^x = 16 = 2^4$, sabemos que $x = 4$

- Mas e quando não for possível igualar as bases?
  - $2^x = 3$
  - Qual o valor de $x$?

# Logarítmo

- Tome $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1)$
- Se $a^x = b$, então...

$$\boldsymbol{log_a b = x} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{a^x = b}$$

  - Com $0 > a \neq 1$
  - $b > 0$
  - Não á restrições com relação a $x$
  - Em essência... A que número precisa-se elevar $a$ para que ele seja igual a $b$?

# Logarítmo

- Se $a^x = b$, então $\log_a b = x$
  - $\log_{10} 10 = 1$, porque $10^1 = 10$
  - $\log_2 8 = 3$, porque $2^3 = 8$
  - $\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$
  - **$\ln 2,718280 = 1$, porque $e^1 = 2,718280$**
- Relembrando $0 < a \neq 1$ e $b > 0$
  - $\log_3(-27) = \nexists$
  - $\log_5 0 = \nexists$
  - $\log_0 3 = \nexists$
  - $\log_{-2} 16 = \nexists$
  - $\log_1 7 = \nexists$

# Logarítmo

- Propriedades dos logaritmos
  1. $\log_a bc = \log_\mathrm{a} b + \log_a c$
  2. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
  3. $\log_a b^c = c.\log_a b$
  4. $\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_\mathrm{c} a}}$
     - $log_b a = \frac{1}{log_a b}$
     - $log_a b \times log_b a = 1$

E não esqueçam... $\log b = \log_{10} b$

Além disso $\ln b = \log_e b$

# Logarítmo

- Simplifique as expressões abaixo
  - $\ln \frac{x^{1/2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
  - $12 - e^{0,4t} = 3$
  - $\frac{A}{1+Be^{t/2}} = C$

# Funções Logarítmicas

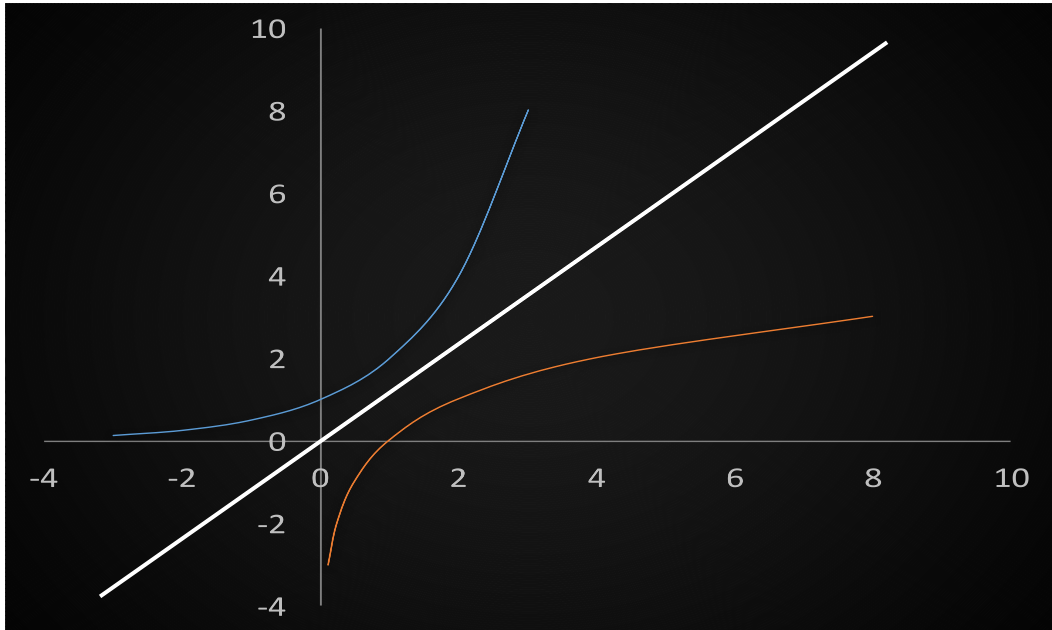
- $f(x) = \log_a x$ com $a$ e $x$ positivos e a $\neq 1$
- $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
- Têm estreita relação com as funções exponenciais
  - Por exemplo, ache a função inversa de...

$$f(x) = \log_2 x$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1/4 | -2 |
| 1/2 | -1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |

$$f^{-1}(x) = 2^x$$

| $x$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|
| -2 | 1/4 |
| -1 | 1/2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |



# Funções Logarítmicas

Propriedades ($f(x) = a^x$) – em laranja

- Domínio: $(-\infty, \infty)$ ou $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
- Contra-domínio: $(0, \infty)$
- Gráfico passa pelo ponto $(0,1)$
- Contínua em $(-\infty, \infty)$
- Crescente em $(-\infty, \infty)$ se $a > 1$
- Decrescente em $(-\infty, \infty)$ $se\ 0 < a < 1$

Propriedades ($f(x) = \log_a x$) – em azul

- Domínio: $(0, \infty)$ ou $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
- Contra-domínio: $(-\infty, \infty)$
- Gráfico passa pelo ponto $(1,0)$
- Contínua em $(0, \infty)$
- Crescente em $(0, \infty)$ se $a > 1$
- Decrescente em $(0, \infty)$ $se\ 0 < a < 1$

- Uma função $f$ tem a forma $f(x) = a + b \ln x$. Encontre a lei de formação de $f$ sabendo que $f(1) = 2$ e $f(2) = 4$

# Derivada de Funções Exponenciais

- Se $f(x) = a^x$, $(0 < a \neq 1)$ tem-se que...
  - $\boldsymbol{f'(x) = a^x . \ln a}$
- Exemplo
  - $f(x) = 5^x$
- Normalmente trabalhamos com $e^x$, de modo que
  - $f'(x) = e^x . \ln e \; = e^x . 1 = e^x$
  - Único caso de função que tem a sim mesma como derivada
- Resolva
  - $f(x) = x^2 e^x$
  - $f(x) = (e^x + 2)^{\frac{3}{2}}$

# Derivada de Funções Exponenciais

- Regra da Cadeia

$$h(x) = e^{x^2-2x}$$

  - Se assumirmos $h(x) = g[f(x)]$...
    - $g(x) = e^x$
    - $f(x) = x^2 - 2x$

  - Então, $h'(x) = g'[f(x)] \times f'(x)$
  - Ou seja...
    - $h'(x) = e^{x^2-2x}(2x-2)$

# Derivada de Funções Exponenciais

- Resolva
  - $f(x) = 2e^{3x-1}$
  - $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- Ache a segunda derivada de $f(x) = 2xe^{3x}$
- Determine onde a função é crescente/descrescente de $f(x) = x^2e^{-x}$
- Determine o sentido da concavidade em $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Encontre a equação da reta tangente no ponto de inflexão de $f(x) = xe^{-x}$
- Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{3}{1+e^{-x}}$

# Derivada de Funções Logarítmicas

- $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ tem-se que...
- $f'(x) = \boxed{\frac{1}{x}.\log_a e}$
- No entanto, vimos que...

$$\log_a e = \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}$$

- Portanto

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x}.\frac{1}{\ln a} = \boxed{\frac{1}{x \ln a}}$$

- Exemplo: $f(x) = \log_3 x$

# Derivada de Funções Logarítmicas

- Até em consequência disso, se tivermos $f(x) = \ln x \; (x > 0)$

$$f(x) = \ln x = \log_e x$$

- Então, seguindo a definição

$$f'(x) = \frac{1}{x} . \log_e e \; = \boxed{\frac{1}{x}}$$

- Resolva
  - $f(x) = x \ln x$
  - $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

- $f'(x) = \frac{1}{x} . \log_a e$

# Regra da Cadeia para Funções Logarítmicas

- $f(x) = \log_a u$, sendo que $u$ é uma função derivável de $x$

$$f'(x) \boxed{= \frac{1}{u} . \log_a e \,.\, u'}$$

- No entanto, usando o mesmo raciocínio aplicado anteriormente...

$$f'(x) = \frac{1}{u} . \log_a e \,.\, u' \quad = \frac{1}{u} . \frac{1}{\log_e a} . u' = \boxed{\frac{u'}{u . \ln a}} \quad = \frac{f'(x)}{f(x) . \ln a}$$

- Exemplo: $f(x) = \log_2 3x^4$

# Regra da Cadeia para Funções Logarítmicas

- Se tivermos $f(x) = \ln u$, com $u$ sendo uma função derivável de $x$

$$f'(x) = \frac{u'}{u.\ln e} = \frac{u'}{u} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{u'}{u.\ln a}$$

- Exemplo:
- $f(x) = \ln(5x^3)$
- $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Resolva

- $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$
- $f(u) = \ln(u - 2)^3$
- $f(t) = e^{2t}\ln(t + 1)$
- $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
- $f(x) = \ln(x^2 e^{-x^2})$

# Regra da Cadeia para Funções Logarítmicas

- Encontre a equação da reta tangente do gráfico de $f(x) = x \ln x$ no ponto $(1,0)$
- Verifique se e onde $f(x) = \ln x^2$ é crescente/decrescente
- Analise a inclinação e concavidade para
  - $f(x) = x^2 + \ln x^2$
  - $\mathrm{g}(x) = x^2 \ln x$