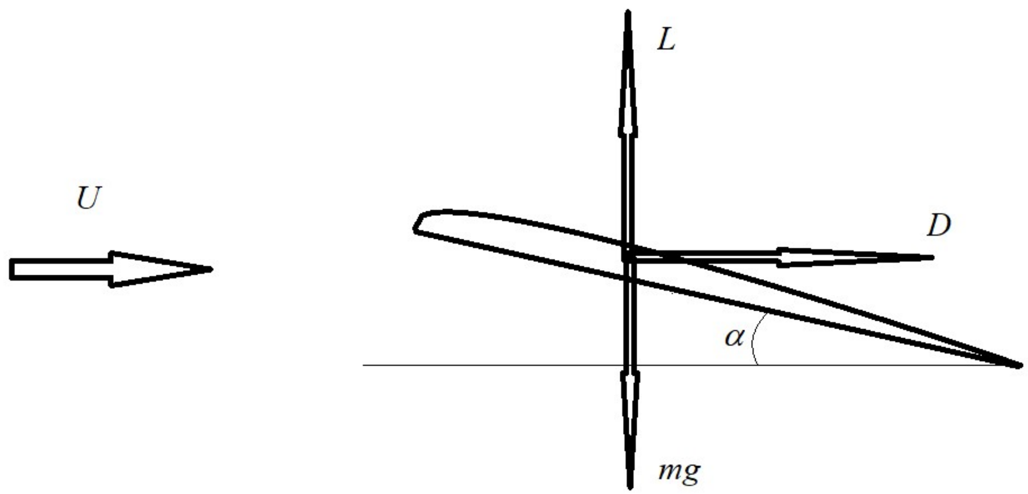
Exercícios – Teoria de Asa

Um avião tem massa m=20000kg e voa com velocidade U=175m/s em ar com ρ=0,74kg/m^3. A asa é retangular e tem corda c=3m. O aerofólio é simétrico (β=0^o) e o ângulo de ataque é α=2,5^o. Estime a envergadura b, a razão de aspecto RA e o arrasto induzido Di. Considere g=9,8m/s^2.

Solução: Em vôo horizontal sustentação tem que igualar o peso, assim:



$$mg = C_L \frac{1}{2} \rho U^2 Ap$$

O coeficiente de sustentação, a área planiforme e a razão de aspecto são dados por:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} \quad ; \quad Ap = bc \text{ (asa retangular)} \quad ; \quad RA = \frac{b^2}{Ap} = \frac{b}{c}$$

Lembrando que $\beta = 0^{\circ}$, as substituição das expressões acima na primeira resulta:

$$mg = \frac{\pi \operatorname{sen} \alpha}{b + 2c} \rho U^2 b^2 c$$

Substituindo os dados numéricos:

$$20000 \times 9{,}8 = \frac{\pi\, sen\, 2{,}5^{o}}{b + 2 \times 3} \times 0{,}74 \times 175^{2} \times b^{2} \times 3$$

Isso resulta:

$$b^{2} - 21{,}0\, b - 126{,}2 = 0$$

O único valor positivo das raízes dessa equação é $\boxed{b = 25{,}9\, m}$.

Com esse valor de envergadura, a razão de aspecto resulta:

$$RA = \frac{b}{c} = \frac{25{,}9}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{RA = 8{,}6}$$

O coeficiente de arrasto é dado por $C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$, assim, o coeficiente de arrasto induzido C_{Di} é:

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

O coeficiente de sustentação resulta:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}} = \frac{2\pi \operatorname{sen}\left(2{,}5^o + 0^o\right)}{1 + \frac{2}{8{,}6}} = 0{,}222$$

Assim, $C_{Di} = \dfrac{0{,}222^2}{\pi 8{,}6} = 0{,}0018$

O arrasto induzido é dado por:

$$D_i = C_{Di} \frac{1}{2} \rho U^2 bc = 0{,}0018 \times \frac{1}{2} \times 0{,}74 \times 175^2 \times 25{,}9 \times 3$$

Isso resulta:

$$\boxed{D_i = 1606\, N}$$

Exercício 8.85: Uma asa com arqueamento de 2%, corda constante c=12,7cm e envergadura b=76,2cm é testada em um túnel de vento com ar (ρ=1,2kg/m^3) e velocidade U=61m/s. São medidos um arrasto D=0,7kgf e uma sustentação L=13,6kgf. Estime:

a)O ângulo de ataque α;

b)O coeficiente de arrasto mínimo e o ângulo de ataque para o qual ocorre;

c) A máxima relação C_L / C_D.

Dado: considere g=9,8m/s^2

Solução: O coeficiente de sustentação é dado por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 Ap} = \frac{2\times 9{,}8\times 13{,}6}{1{,}2\times 61^2 \times 0{,}127\times 0{,}762} = 0{,}62$$

Com esse valor podemos estimar o ângulo de ataque. O arqueamento β é dado por:

$$\beta = \arctan\left(2\frac{h}{c}\right) = \arctan(2 \times 0{,}02) \quad \Rightarrow \quad \beta = 2{,}29^{\mathrm{o}}$$

A razão de aspecto é $RA = \dfrac{b^2}{Ap} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{0{,}762}{0{,}127} = 6$

O coeficiente de sustentação também é dado por:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \dfrac{2}{RA}} \;\Rightarrow\; 0{,}62 = \frac{2\pi \operatorname{sen}\left(\alpha + 2{,}29^{o}\right)}{1 + \dfrac{2}{6}} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = 5{,}27^{o}}$$

O coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

Assim, o valor mínimo do coeficiente de arrasto ocorre quando o coeficiente de sustentação é nulo, $C_D = C_{D\infty}$, ou seja, para o ângulo $\alpha = -\beta$.

Assim, o ângulo de ataque para coeficiente de arrasto mínimo é $\boxed{\alpha = -2{,}29^o}$

O coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 Ap} = \frac{2 \times 9{,}8 \times 0{,}7}{1{,}2 \times 61^2 \times 0{,}127 \times 0{,}762} = 0{,}030$$

$$C_{D_\infty} = C_D - \frac{C_L^2}{\pi RA} = 0{,}030 - \frac{0{,}62^2}{\pi \times 6} = 0{,}010$$

Esse é o valor de C_{D_∞} para $\alpha = 5{,}27^o$. Se considerarmos que longe do estol C_{D_∞} varia pouco com o ângulo de ataque, podemos tomar esse valor como próximo do valor para $\alpha = -2{,}29^o$. Assim:

O coeficiente de arrasto mínimo é $\boxed{C_{D_{mín}} = 0{,}010}$

Finalmente, a máxima relação C_L/C_D ocorre quando $C_D = 2C_{D_\infty}$, e nessa situação:

$$\frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D_\infty}$$

Se considerarmos novamente que C_{D_∞} varia pouco com o ângulo de ataque, teremos:

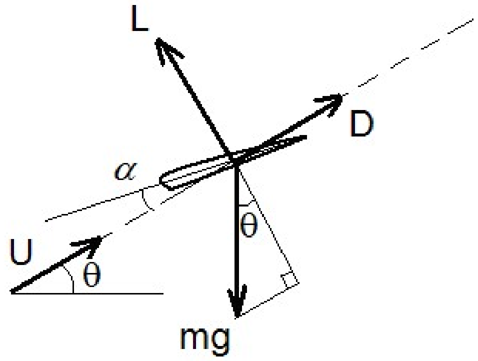
$$C_L = \sqrt{\pi RA C_{D_\infty}} = \sqrt{\pi \times 6 \times 0{,}010} = 0{,}43$$

$$\frac{C_L}{C_D}_{\max} = \frac{0{,}43}{2 \times 0{,}010} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{C_L}{C_D}_{\max} = 21{,}5}$$

Exercício 7.121: Em vôo planado a sustentação L e o arrasto D entram em equilíbrio com o peso.

a)Mostre que, se não há vento, o planador desce com um ângulo de planeio θ tal que $\mathrm{tg}\,\theta = D/L$;

b)Para um planador com massa m=200kg, área planiforme Ap=12m^2, razão de aspecto RA=11 e aerofólio simétrico, estime a velocidade de estol, o ângulo mínimo de planeio e a máxima distância que a aeronave pode planar em ar sem vento, partindo de uma altitude h=1200m. Considere uma massa específica do ar ρ=1,09kg/m^3. Dados: C_{Lmax}=1,3; $C_{D\infty} = 0{,}006$; g=9,81m/s^2.



Solução:

a)Da figura, é fácil,ver, decompondo o peso, que:

$$mg\cos\theta = L \quad ; \quad mg\,\mathrm{sen}\,\theta = D$$

Assim, $\boxed{\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{D}{L}}$

b)A velocidade de estol é a mínima velocidade para a qual a aeronave se mantém voando, e é obtida para o máximo coeficiente de sustentação. Assim:

$$mg = C_{L\,\mathrm{max}} \frac{1}{2} \rho U_{estol}^{2} Ap$$

Substituindo os dados numéricos:

$$200\times 9{,}8=1{,}3\times\frac{1}{2}\times 1{,}09\times U_{estol}^{2}\times 12 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U_{estol}=15{,}2\,\mathrm{m/s}}$$

Finalmente, o ângulo mínimo de planeio corresponde à mínima relação D/L, ou seja, à máxima relação L/D. Nesta condição, sabemos, de exercícios anteriores (que constituem um dos resultados mais importantes da teoria de asa) que:

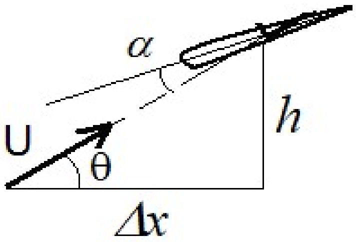
$$C_D=2\,C_{D\infty} \quad \text{e} \quad \frac{C_L^2}{\pi\,RA}=C_{D\infty}$$

Dos dados numéricos:

$$C_D = 2 \times 0{,}006 = 0{,}012$$

$$C_L = \sqrt{C_{D\infty}\, \pi\, RA} = \sqrt{0{,}006 \times \pi \times 11} = 0{,}46$$

$$tg\,\theta = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{0{,}012}{0{,}46} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 1{,}49^o}$$



Com esse resultado, $\Delta x = \dfrac{h}{\text{tg}\,\theta} = \dfrac{1200}{\text{tg}\,1{,}49^{\text{o}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 46\,\text{km}}$

Para um aerofólio com arqueamento $h/c = 4\%$, corda constante $c = 4$cm e razão de aspecto $RA = 20$, mediram-se a força de arrasto $D = 0{,}4$N e a força de sustentação $L = 12$N em ar com velocidade $U = 20$ m/s e $\rho = 1{,}1$ kg/m^3 para um dado ângulo de ataque α. Mantendo-se o ângulo de ataque, a velocidade e propriedades do ar, a corda c e diminuindo-se a envergadura b de forma a ter $RA = 4$, quais valores serão obtidos para o coeficiente de arrasto C_D e coeficiente de sustentação C_L?

Solução: nas condições de teste (RA=20) temos que os coeficientes de arrasto e sustentação são dados por:

$$C_D = \frac{2D}{\rho U^2 Ap} \quad ; \quad C_L = \frac{2L}{\rho U^2 Ap}$$

Como a corda é c = 0,04 m, resulta que se RA=20 temos b = 0,80 m e Ap=0,032 m^2. Assim:

$$C_D = \frac{2 \times 0{,}4}{1{,}1 \times 20^2 \times 0{,}032} = 0{,}057$$

$$C_L = \frac{2 \times 12}{1{,}1 \times 20^2 \times 0{,}032} = 1{,}700$$

Levando em conta o arrasto induzido, temos:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\, RA} \quad \Rightarrow \quad 0{,}057 = C_{D\infty} + \frac{1{,}700^2}{\pi \times 20}$$

Resulta:

$$\boxed{C_{D\infty} = 0{,}011}$$

Por outro lado, da expressão válida para o coeficiente de sustentação, lembrando que o ângulo de arqueamento é $\beta = arctg\,(0{,}08) = 4{,}6^{o}$:

$$1{,}700 = \frac{2 \times \pi \times sen\left(\alpha + 4{,}6^{o}\right)}{1 + \dfrac{2}{20}}$$

Resulta, nas condições de teste (*RA*=20) um ângulo de ataque:

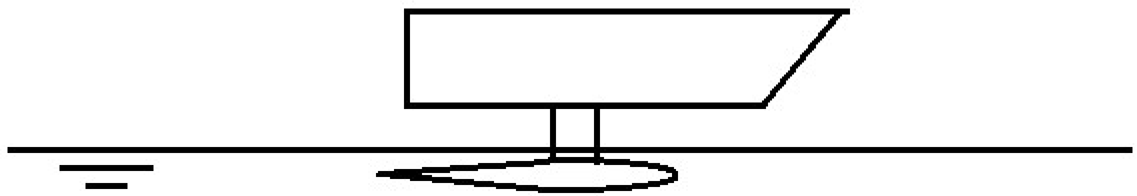
$$\boxed{\alpha = 12{,}7^{o}}$$

Se mudarmos a razão de apsecto para *RA*=4:

$$\boxed{C_L = \frac{2 \times \pi \times sen(12{,}7^{o} + 4{,}6^{o})}{1 + \frac{2}{4}} = 1{,}250}$$

$$\boxed{C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\, RA} \quad \Rightarrow \quad C_D = 0{,}011 + \frac{1{,}250^2}{\pi \times 4} = 0{,}135}$$

Um barco de massa m=5000kg desloca-se em água de massa específica ρ=1000kg/m^3 sustentado por um hidrofólio simétrico ($\beta = 0^o$) com ângulo de ataque ajustável, área planiforme Ap=2,4 m^2, razão de aspecto RA=5 e coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita $C_{D\infty}$ = 0,08. O motor tem potência $\dot{W}$= 410 kW. (a)Estime a velocidade máxima possível considerando apenas o arrasto do hidrofólio na água (despreze o arrasto do barco no ar) e calcule o ângulo de ataque; (b)Se o barco navega em cruzeiro na condição em que C_L / C_D é máximo, calcule a velocidade de cruzeiro, ângulo de ataque de cruzeiro e potência consumida de cruzeiro.



Dado: Considerar a aceleração da gravidade g = 10m/s^2.

Solução:

a)Para obter a velocidade máxima temos que considerar o arrasto na condição em que toda a potência do motor é aproveitada:

$$\dot{W} = D \times U = \frac{1}{2} C_D \, \rho U^3 \, Ap$$

Substituindo o coeficiente de arrasto:

$$\dot{W} = \frac{1}{2}\left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi \, RA} \right) \rho U^3 \, Ap \qquad \text{(i)}$$

O coeficiente de sustentação é dado por:

$$mg = \frac{1}{2}\rho U^2 C_L\, Ap \quad \Rightarrow \quad C_L = \frac{2mg}{\rho U^2\, Ap} \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (ii) em (i):

$$\dot{W} = \frac{1}{2}\left(C_{D\infty} + \frac{4m^2 g^2}{\pi RA\, \rho^2\, U^4\, Ap^2} \right)\rho U^3\, Ap$$

Logo:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} C_{D\infty}\, \rho U^3\, Ap + \frac{2m^2 g^2}{\pi\, RA\, \rho\, U\, Ap}$$

Isso resulta:

$$410000 = \frac{1}{2} \times 0{,}08 \times 1000 \times U^3 \times 2{,}4 + \frac{2 \times (50000)^2}{\pi \times 5 \times 1000 \times U \times 2{,}4}$$

Que resulta:

$$410000 = 96U^3 + \frac{132629}{U}$$

Podemos escrever:

$$U^4 = 4271U - 1382 \quad \Rightarrow \quad U = (4271U - 1382)^{0,25}$$

Fazendo uma solução iterativa partindo de um chute inicial U=1m/s do lado direito da equação:

U	*U novo*
1	7,33
7,33	13,15
13,15	15,30
15,30	15,90
15,90	16,06
16,06	16,10
16,10	16,11
16,11	16,11

Assim, a velocidade máxima é $\boxed{U_{max} = 16{,}11\,\mathrm{m/s}}$

Da expressão (ii) podemos obter o coeficiente de sustentação na condição de velocidade máxima:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U^2\, Ap} = \frac{2 \times 50000}{1000 \times 16{,}11^2 \times 2{,}4} \quad \Rightarrow \quad C_L = 0{,}161$$

Para um aerofólio simétrico (β=0°):

$$C_L = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \dfrac{2}{RA}} \;\Rightarrow\; 0{,}161 = \frac{2\pi\,\mathrm{sen}\left(\alpha + 0^o\right)}{1 + \dfrac{2}{5}} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = 2{,}06^o}$$

b) Em cruzeiro, se C_L / C_D é máximo:

$$C_D = 2\,C_{D\infty} \quad \text{e} \quad \frac{C_L^2}{\pi\, RA} = C_{D\infty}$$

Destas relações resultam:

$$C_D = 2 \times 0{,}08 = 0{,}16$$

$$C_L = \sqrt{0{,}08 \times \pi \times 5} = 1{,}121$$

Da expressão (ii) podemos obter agora a velocidade de cruzeiro:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U^2 \, Ap} \Rightarrow 1{,}121 = \frac{2 \times 50000}{1000 \times U^2 \times 2{,}4} \Rightarrow \boxed{U = 6{,}1\,\mathrm{m/s}}$$

O novo ângulo de ataque resulta:

$$1{,}121 = \frac{2\pi \,\mathrm{sen}\left(\alpha + 0^o\right)}{1 + \frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 14{,}46^o}$$

A potência consumida em cruzeiro será dada por:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} C_D \, \rho U^3 \, Ap$$

Substituindo os dados numéricos:

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \times 0{,}16 \times 1000 \times 6{,}1^3 \times 2{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\dot{W} = 43{,}58 \, \text{kW}}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 7º edição, Ed. McGraw Hill, 2011.