Análise de Dados e Simulação

Márcia Branco

Universidade de Sao Paulo
Instituto de Matematica e Estatistica
http:www.ime.usp.br/m̃branco

Exercícios

Exercício 2 da Lista 6

Seja X uma v.a. com média conhecida $E[X] < \infty$. O interesse é estimar $P(X \leq a)$ para alguma constante a. O estimador ingênuo é dado por $I = 1$, se $X \leq a$ e $I = 0$, se $X > a$. Considere o estimador alternativo dado por $T = I + c(X - E[X])$.

(a) Determine a constante c tal que a variância de T seja minima.
(b) Obtenha a expressão para a porcentagem de redução da variância obtida com o uso de T no lugar de I. Considere o c ótimo obtido anteriormente.
(c) Para $X \sim U_{(0,1)}$, determinar a porcentagem de redução da variância.

Solução

(a) Determine a constante c tal que a variância de T seja minima.

$$Var[T] = Var[I] + c^2 Var[X - E[X]] + 2Cov[I, c(X - E[X])]$$

Note que $var[X - E[X]] = Var[X]$ e

$$Cov[I, c(X - E[X])] = cE[I(X - E[X])] - cE[I]E[X - E[x]] =$$

$$c\{E[IX] - E[X]E[I]\} = cCov[I, X]$$

Então

$$Var[T] = Var[I] + c^2 Var[X] + 2cCov[I, X]$$

Solução

Derivando $Var[T]$ em relação a c e igualando a zero, obtemos o resultado

$$c^* = \frac{-Cov[I,X]}{Var[X]}$$

(b) Obtenha a expressão para a porcentagem de redução da variância obtida com o uso de T no lugar de I. Considere o c ótimo obtido anteriormente.

Substituindo c por c^* temos

$$Var[T] = Var[I] + \frac{Cov^2[I,X]}{Var[X]} - 2\frac{Cov^2[I,X]}{Var[X]}$$

Portanto,

$$\frac{Var[I] - Var[T]}{Var[I]} = \frac{Cov^2[I,X]}{Var[X]Var[I]} = R^2$$

Solução

(c) Para $X \sim U_{(0,1)}$, determinar a porcentagem de redução da variância.

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$Var[I] = E[I^2] - (E[I])^2 = P(X \leq a) - [P(X \leq a)]^2 = a(1 - a)$$

Solução

$$Cov[I,X] = E[IX] - E[I]E[X]$$

Para $0 < a < 1$, temos $E[I] = a$ e $E[X] = \frac{1}{2}$ e

$$E[IX] = \int_0^1 xf(1,x)dx = \int_0^a xf(x)dx = \frac{a^2}{2}$$

Logo

$$Cov[I,X] = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(a-1)}{2} < 0$$

A porcentagem de redução da variância é dada por

$$\frac{12a^2(1-a)^2}{4a(1-a)} = 3a(1-a)$$

Exercício 1 da Lista 5

Deseja-se usar o algoritmo de rejeição para simular de uma v.a. normal positiva, cuja densidade é dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \quad , \quad x > 0.$$

Foram propostas duas densidades:

$$\begin{array}{l} \text{(i) } g_1(x) = e^{-x} \ , x > 0 \ \ \text{(exponencial)} \ \ \text{e} \\ \text{(ii) } g_2(x) = xe^{-x} \ , x > 0 \ \ \text{(gama)} \ . \end{array}$$

a) Verifique a possibilidade de usar o algoritmo nas duas situações.
b) No caso do algoritmo ser adequado, obtenha o número médio esperado de iterações.

Solução

Para solução do item (a) precisamos mostrar que existe uma constante c tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq C$$

No caso (i) a razão acima é dada por

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2+x}$$

Derivando e igualando a zero obtemos $x = 1$ como ponto de máximo. [Melhor derivar o logaritmo da função] Assim

$$C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-1/2+1} = 1.315$$

Esse é o número esperado de iterações para obtenção de um valor.

Solução

No caso (ii) a razão acima é dada por

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-x^2/2+x}}{x}$$

Derivando e igualando a zero, chegamos a um sistema que não tem raizes reais. Logo, não existe um valor x cuja derivada é zero.

Avaliando o gráfico da função podemos notar que ela não é limitada. Portanto, não existe a constante C e o algortimo não pode ser utilizado.