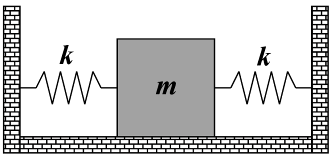
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Física para Engenharia II - 4320196
Solução da Lista de exercícios 2 - 2011
Monitor: Daniel Câmara de Souza

(Quando necessário utilize $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$)

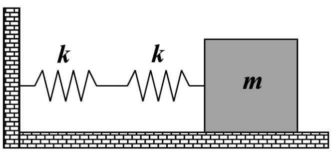
1. Na figura abaixo, mostramos duas molas idênticas (de constante k) ligadas a um mesmo bloco de massa m, sendo que as outras extremidades das molas estão fixas em suportes rígidos. Mostre que a frequência de oscilação do bloco sobre a superfície horizontal sem atrito é dada por:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Suponha agora que as duas molas sejam conectadas ao bloco de massa m, conforme é indicado na figura abaixo. Mostre que a frequência de oscilação é dada por:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$



Solução: no primeiro caso as forças das duas molas que atuam no bloco tem mesma direção, mesmo sentido e mesma intensidade, de modo que a segunda lei de Newton $\sum F = ma$ aplicada no bloco fica $-2kx = m\ddot{x}$, que fornece a equação diferencial

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0,$$

de onde obtemos a frequência angular $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. E isso junto com $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ fornecem a frequência de oscilação

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

No segundo caso o deslocamento x do bloco estica cada mola em $x/2$ de modo que a segunda lei de Newton aplicada no bloco fica $-k\frac{x}{2} = m\ddot{x}$, de onde vem a equação diferencial

$$\ddot{x} + \frac{k}{2m}x = 0,$$

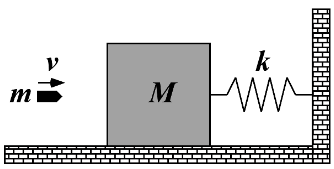
e a frequência angular $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$. Com $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ temos

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

2. A figura abaixo mostra um bloco de massa M, em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a uma mola de constante k. Uma bala de massa m e velocidade v atinge o bloco em $t = 0$, conforme é indicado na figura abaixo. A bala permanece dentro do bloco. Determine:

(a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão;

(b) a expressão do deslocamento x do sistema para $t > 0$.



Solução:

(a) Pela conservação do momento linear

$$mv = (m+M)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{m+M}\,v.$$

(b) Pela conservação da energia, quando a energia cinética inicial se transforma totalmente em energia cinética potencial, a mola foi comprimida de A, logo

$$E_c = E_p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{(m+M)}{k}V^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$$

A segunda lei de Newton aplicada ao sistema massa mola resultante fica

$$-kx = (m+M)\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{(m+M)}x = 0.$$

Logo, a frequência angular será $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$ e as soluções serão do tipo

$$\begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ v(t) = a\,\omega\cos(\omega t) - b\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \end{cases}$$

impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = b = 0, \\ v(0) = a\,\omega = V, \end{cases}$$

segue que $b = 0$, $a = V/\omega = A$ e

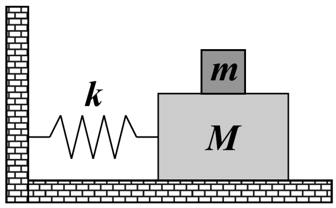
$$\begin{cases} x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)), \\ v(t) = A\,\omega\cos(\omega t). \end{cases}$$

Reescrevendo $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$ como $\omega = \frac{\sqrt{k(m+M)}}{(m+M)}$ podemos reescrever $A = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}}$ como $A = \frac{mv}{(m+M)\omega}$.

3. Um disco de massa M, preso por uma mola de constante elástica k e massa desprezível a uma parede vertical, desliza sem atrito sobre uma mesa de ar horizontal. Um bloquinho de massa m está colocado sobre o disco, com cuja superfície tem um coeficiente de atrito estático μ_e. Qual é a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue sobre ele?

Solução: a força de atrito estático é $F_{\mu_e} \leq \mu_e N$, logo a força de atrito estático máxima é $F_{\mu_e}^{max} = \mu_e mg$. Seja x_{max} a amplitude máxima de oscilação do disco para que o bloquinho não escorregue, então, a segunda lei de Newton aplicada no sistema disco+bloquinho fornece

$$(m+M)a = -kx_{max} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-kx_{max}}{(m+M)}$$



Para $x > 0$, no referencial não inercial do bloquinho ele sente uma força fictícia $-ma$ e a força de atrito máximo $-\mu_e mg$, de modo que a condição de equilíbrio fica $-ma = \mu_e mg$, de onde vem

$$m\frac{kx_{max}}{(m+M)} = \mu_e mg \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \frac{\mu_e(m+M)g}{k}.$$

4. Certa mola sem massa está suspensa no teto com um pequeno objeto preso a sua extremidade inferior. O objeto é mantido inicialmente em repouso, numa posição y_i tal que a mola não fique esticada. O objeto é então liberado e oscila para cima e para baixo, sendo sua posição mais baixa 10 cm de y_i.

(a) Qual a frequência da oscilação?

(b) Qual a velocidade do objeto quando está 8 cm abaixo da posição inicial?

(c) Um objeto de massa 300 g é ligado ao primeiro objeto; logo após, o sistema oscila com metade da frequência original. Qual a massa do primeiro objeto?

(d) Com relação a y_i, onde é o novo ponto de equilíbrio (repouso) com ambos os objetos presos a mola?

Solução: a equação de movimento do bloco será

$$m\ddot{y} = -mg - ky.$$

Na condição de equilíbrio $-mg - ky_e = 0 \Rightarrow y_e = -\frac{mg}{k}$, ou com $\omega^2 = \frac{k}{m}$, temos $y_e = -\frac{g}{\omega^2}$. Reescrevendo a equação de movimento na forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(y - y_e) + \omega^2(y - y_e) = 0$$

segue que

$$\begin{cases} y(t) = y_e + a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ v(t) = a\,\omega\cos(\omega t) - b\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \end{cases}$$

e impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} y(0) = y_e + b = 0, \\ v(0) = a\,\omega = 0, \end{cases}$$

vem que $b = -y_e$, $a = 0$ e

$$\begin{cases} y(t) = y_e\left[1 - \cos(\omega t)\right], \\ v(t) = y_e\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t). \end{cases}$$

(a) A posição mais baixa $y_{min} = -0{,}10\,\mathrm{m}$ ocorre quando $t = -\pi/\omega$, e é dada por $y(-\pi/\omega) = 2y_e = y_{min}$. Com isso, a frequência angular $\omega = \sqrt{\frac{g}{-y_e}}$ fica

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{-y_{min}}} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \omega = 14\,\mathrm{rad/s}.$$

(b) As energias inicial e final são

$$\begin{cases} E_i = mgy(0) + \frac{1}{2}mv(0)^2 + \frac{1}{2}y(0)^2 = 0, \\ E_f = mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}y^2. \end{cases}$$

Pela conservação da energia $E_i = E_f \Rightarrow$

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\sqrt{-2gy - \omega^2 y^2}$$

Com $\omega = 10\sqrt{2}\,\mathrm{rad/s}$ e $y = -0{,}080\,\mathrm{m}$ temos

$$v = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\,\mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad v = -0{,}56\,\mathrm{m/s}$$

(c) Inicialmente temos $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, adicionando a massa $m_0 = 300\,\mathrm{g}$ a frequência do sistema será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$, logo

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m+m_0}{m}} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m_0}{3} = 100\,\mathrm{g}.$$

(d) Inicialmente temos $y_e = -\frac{g}{\omega^2}$, depois a nova posição de equilíbrio será $y_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$. Com $m_0 = 3m$ temos $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{\omega}{2}$, logo

$$y_0 = -\frac{4g}{\omega^2} = 4y_e \quad \Rightarrow \quad y_0 = -0{,}2\,\mathrm{m},$$

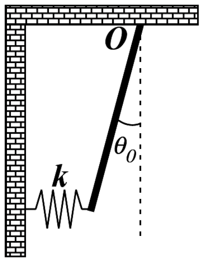
ou seja, nova posição de equilíbrio será 0,2 m abaixo de y_i.

5. Uma haste rígida de comprimento L e massa M está suspensa, podendo girar em torno do ponto O, por uma das suas extremidades, como mostra a figura abaixo. Na outra extremidade a barra está ligada a uma mola de constante k que está na posição relaxada quando a barra se encontra na posição vertical. No instante $t = 0$, a barra é deslocada para a esquerda, até um ângulo θ_0 com a direção vertical, e abandonada a partir do repouso. Dado: $I_O = \frac{1}{3}ML^2$ e considerando que a mola sempre permanece na horizontal,

(a) obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da barra.

(b) Determine a frequência angular ω de oscilação da barra, considerando oscilações de pequenas amplitudes.

(c) Obtenha a equação $\theta(t)$ que descreve o movimento de oscilação da barra.



Solução:

(a) Considere a origem do sistema de coordenadas no ponto de equilíbrio da extremidade inferior da barra. O torque devido à força da mola aplicada na extremidade da barra e o torque da força gravitacional no centro de massa serão

$$\begin{cases} \tau_m = F_m L\cos(\theta) = -kL\,\mathrm{sen}(\theta) L\cos(\theta), \\ \tau_g = F_g L\,\mathrm{sen}(\theta) = -Mg\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}(\theta). \end{cases}$$

A segunda lei de Newton na forma angular $\sum\tau = \tau_m + \tau_g = I\alpha$ junto com $I = \frac{1}{3}ML^2$ e $\alpha = \ddot{\theta}$ fornecem a equação de movimento

$$-kL^2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) - Mg\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}(\theta) = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}\cos(\theta)\right]\mathrm{sen}(\theta) = 0.$$

(b) Para oscilações com pequenas amplitudes podemos tomar as aproximações $\cos(\theta) \approx 1$ e $\mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$, assim

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}\right]\theta = 0,$$

e a frequência angular da oscilação da barra será

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{L} + \frac{3k}{M}}.$$

(c) Sabemos que as soluções serão do tipo

$$\begin{cases} \theta(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t) + b\cos(\omega t), \\ \dot\theta(t) = a\,\omega\cos(\omega t) - b\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t), \end{cases}$$

e impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} \theta(0) = b = \theta_0, \\ \dot\theta(0) = a\,\omega = 0, \end{cases}$$

vem que $b = \theta_0$, $a = 0$ e

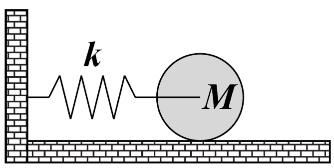
$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0\cos(\omega t)), \\ v(t) = -\theta_0\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t). \end{cases}$$

6. Uma mola horizontal sem massa está ligada ao eixo de rotação que passa pelo centro de massa de um cilindro sólido, de massa M, de forma que ele possa rolar, sem deslizamento, sobre uma superfície horizontal (figura abaixo). A constante da mola é $k = 3{,}0\,\mathrm{N/m}$. Se o sistema for liberado de uma posição de repouso em que a mola esteja esticada de 0,25 m, ache

(a) a energia cinética translacional e a energia cinética rotacional do cilindro quando ele passa pela posição de equilíbrio.

(b) Mostre que nessas condições o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples com período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$



Solução: seja $x_0 = 0{,}25\,\mathrm{m}$ o deslocamento inicial, $I = \frac{1}{2}MR^2$ o momento de inércia do cilindro sólido em relação ao eixo de simetria axial do cilindro e $v = \omega R$ a condição de rolamento sem deslizamento, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro.

(a) A energia total inicial será a energia potencial inicial

$$E_i = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(3{,}0\,\mathrm{N/m})(0{,}25\,\mathrm{m})^2 = \frac{3}{32}\,\mathrm{J} = 0{,}094\,\mathrm{J},$$

e a energia total, quando o cilindro passa pela posição de equilíbrio, será

$$E_e = E_{trans} + E_{rot} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

mas com $v = \omega R$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$ vem

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}Mv^2 = \frac{E_{trans}}{2},$$

logo

$$E_i = E_e = \frac{3}{2}E_{trans} = 3E_{rot},$$

de onde temos

$$E_{trans} = \frac{2}{3}E_i = \frac{1}{16}\,\mathrm{J} = 0{,}063\,\mathrm{J},$$

$$E_{rot} = \frac{1}{3}E_i = \frac{1}{32}\,\mathrm{J}, = 0{,}031\,\mathrm{J}.$$

(b) Considere a rotação como positiva no sentido horário com relação ao eixo que passa pelo eixo de simetria axial do cilindro. Para $x > 0$ as equações de movimento na forma linear e angular

$$\begin{cases} \sum\tau = I\alpha, \\ \sum F = Ma, \end{cases}$$

ficam

$$\begin{cases} RF_\mu = \frac{I}{R}a, \\ F_\mu - kx = Ma, \end{cases}$$

logo $F_\mu = \frac{1}{2}Ma$ e $-kx = Ma + F_\mu = Ma + \frac{1}{2}Ma = \frac{3}{2}M\ddot x$, resultando na equação

$$\ddot x + \frac{2k}{3M}x = 0,$$

Portanto, a frequência angular será $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}} = \frac{2\pi}{T}$, e o período será dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}.$$

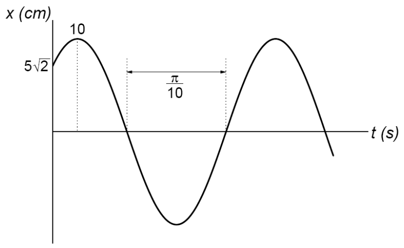
7. (Poli 2007) A figura abaixo mostra a oscilação de um corpo com massa 0,5 kg preso a uma mola.

(a) Quanto vale a constante elástica da mola?

(b) Escreva a equação que descreve $x(t)$.

(c) Obtenha expressões para as energias potencial, cinética e mecânica total do oscilador em função do tempo.

Solução:



(a) Da figura temos $T = \frac{2\pi}{10}$ s, logo $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\,\mathrm{s}^{-1}$, e com isso e $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ podemos calcular a constante elástica

$$k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad k = 50\,\mathrm{kg/s^2} = 50\,\mathrm{N/m}.$$

(b) Sabemos que a solução é do tipo $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Da figura é direto que $A = 10\,\mathrm{cm}$ e $x(0) = A\cos(\varphi) = 5\sqrt{2} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$. Portanto, a solução será

$$x(t) = 10\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{cm},$$

já que $v(t) = -100\,\mathrm{sen}\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)$ m/s e a velocidade inicial é positiva $v(0) = -100\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ cm/s $= 50\sqrt{2}\,\mathrm{cm/s} > 0$.

(c) As energias potencial e cinética em função do tempo ficam

$$\begin{cases} U(t) = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{1}{4}\cos^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{J}, \\ T(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^2\left(10t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{J}, \end{cases}$$

e claramente $E = \frac{1}{4}\,\mathrm{J}$.

8. Uma esfera sólida de 95 kg com um raio de 12 cm é suspensa por um fio vertical preso ao teto de uma sala. Um torque de 0,02 Nm é necessário para girar a esfera de um ângulo de 0,85 rad. Qual o período da oscilação, quando a esfera é liberada dessa posição?

Solução: seja $\theta_0 = 0{,}85\,\mathrm{rad}$ o deslocamento angular inicial devido ao torque inicial $\tau_0 = 0{,}02\,\mathrm{Nm}$. A segunda lei de Newton na forma angular $\tau_0 = -\kappa\theta_0$ fornece a constante de torção $\kappa = -\frac{\tau_0}{\theta_0} = 0{,}02353\,\mathrm{Nm/rad}$. Agora, para o movimento geral a segunda lei de Newton na forma angular $\tau = I\alpha$ fica $-\kappa\theta = I\ddot{\theta}$, de onde vem a equação

$$\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I}\,\theta = 0,$$

logo

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} = \frac{2\pi}{T},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = 2\pi(4{,}822)\,\mathrm{s} = 9{,}62\pi\,\mathrm{s} = 30{,}2\,\mathrm{s}.$$

9. (Poli 2006) Uma plataforma de massa m está presa a duas molas iguais de constante elástica k. A plataforma pode oscilar sobre uma superfície horizontal sem atrito. Um bloco de massa $M = 2m$ é colocado sobre a plataforma. O sistema "bloco + plataforma" oscila com frequência angular ω.

(a) Determine, em função de m e ω, o valor da constante k das molas.

(b) Calcule, em termos da amplitude A, a força horizontal máxima exercida no bloco de massa M durante o movimento.

(c) Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a plataforma é μ_e, encontre o valor máximo da amplitude para o qual o bloco não desliza sobre a plataforma durante a oscilação.

Solução:

(a) A segunda lei de Newton aplicada no sistema bloco+plataforma fica $-2kx = (m+M)\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{(m+M)}x = 0$, logo $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m+M}} \Rightarrow k = \frac{(m+M)\omega^2}{2}$. No presente caso $M = 2m$ e com isso

$$k = \frac{3m\omega^2}{2}.$$

(b) No referencial do bloco ele sofre uma força não inercial (força fictícia) $F = -M\ddot{x}$, onde $\ddot{x}$ é a aceleração da plataforma. Do movimento harmônico vem que $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Dado que a massa do bloco é $M = 2m$, na condição em que a força de atrito é máxima para a amplitude A teremos

$$F_{max} = 2m\omega^2 A.$$

(c) Sabendo que $F_{\mu_e} \leq \mu_e N$ e $N = Mg = 2mg$, vem que a força de atrito estático máxima será $F_{\mu_e}^{max} = 2mg\mu_e$. Da condição de equilíbrio para o bloco $F_{max} = F_{\mu_e}^{max}$, na situação em que a amplitude é máxima A_{max}, tem-se

$$2m\omega^2 A_{max} = 2mg\mu_e \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \frac{\mu_e g}{\omega^2}.$$

10. Ache o movimento resultante de dois movimentos harmônicos simples na mesma direção, dados por: $x_1 =$

$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ e $x_2 = \mathrm{sen}(\omega t)$. Represente graficamente os respectivos vetores girantes.

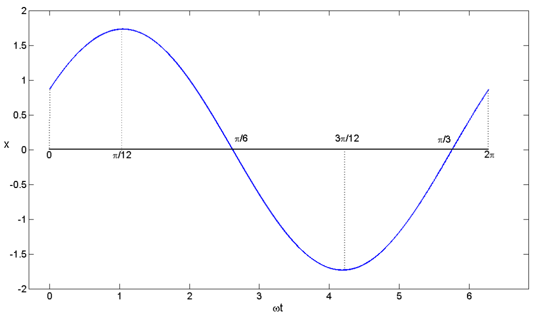
Solução: podemos, respectivamente, representar graficamente o vetor girante x_1, x_2 como um vetor no plano $y - z$ de comprimento $l_1 = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$, $l_2 = \mathrm{sen}(\omega t)$, que gira com velocidade angular $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega$ e que no instante t forma um ângulo $\theta_1 = \omega t - \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \omega t$ em relação ao eixo y.

O movimento resultante da superposição dos movimentos harmônicos simples $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ pode ser reescrito como

$$x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\omega t) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{sen}(\omega t) + \mathrm{sen}(\omega t),$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t) + \frac{3}{2}\mathrm{sen}(\omega t).$$

A figura abaixo exibe o movimento resultante em função do tempo



11. Um pêndulo com fio de comprimento 1,00 m é abandonado do repouso de um ângulo inicial de 15°. Após 1000 s, sua amplitude é reduzida para 5,5°. Qual é o valor da constante de amortecimento γ?

Solução: vimos que no regime de oscilação subcrítico a solução é do tipo $x(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$. Denotando a amplitude por $A(t) = A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e o comprimento por $l = 1{,}00\,\mathrm{m}$, para pequenas oscilações a amplitude inicial será $A_0 = l\theta_0$ e a amplitude num instante t será $A(t) = l\theta = l\theta_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$, e onde vem que

$$\frac{\theta_0}{\theta} = \mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}t} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{2}{t}\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)$$

Dado que em $t = 0$ temos $\theta_0 = 15°$ e em $t = 1000\,\mathrm{s}$ temos $\theta = 5{,}5°$, vem que

$$\gamma = \frac{2}{1000\,\mathrm{s}}\ln\left(\frac{15°}{5{,}5°}\right) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0{,}002\,\mathrm{s}^{-1}$$

12. Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ($m = 2\,\mathrm{kg}$), uma mola ($k = 10{,}0\,\mathrm{N/m}$) e uma força de amortecimento $F = -\rho v$. Inicialmente, ele oscila com amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos do seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações.

(a) Qual o valor de ρ?

(b) Quanta energia foi "perdida" durante essas oscilações?

Solução: vimos que no regime de oscilação subcrítico a solução é do tipo $x(t) = A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$, onde $\gamma = \frac{\rho}{m}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

(a) Com $A(t) = A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e dado que em $t = \frac{8\pi}{\omega}$ temos $A\left(\frac{8\pi}{\omega}\right) = \frac{3}{4}A_0 \Rightarrow A_0\mathrm{e}^{-\frac{4\pi\gamma}{\omega}} = \frac{3}{4}A_0 \Rightarrow \frac{4}{3} = \mathrm{e}^{\frac{4\pi\gamma}{\omega}} \Rightarrow \frac{4\pi\gamma}{\omega} = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$, e usando $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ temos

$$\left(\frac{4\pi}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\right)\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{4\pi}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{\rho}{m} \quad \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{m\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{4\pi}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \quad \Rightarrow \quad \rho = 0{,}102\,\mathrm{kg/s}.$$

(b) Tendo em vista que as soluções são do tipo

$$\begin{cases} x(t) = A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t), \\ v(t) = -A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\frac{\gamma}{2}\cos(\omega t) + \omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\right], \end{cases}$$

e que a energia total do bloco é

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

vamos calcular a energia total em $t = 0$ e $t = \frac{8\pi}{\omega}$:

$$\begin{cases} E(0) = \frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}m\frac{\gamma^2}{4}A_0^2 = \frac{A_0^2}{2}\left(k + \frac{m\gamma^2}{4}\right), \\ E\left(\frac{8\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{2}kA_0^2\mathrm{e}^{-\frac{8\pi\gamma}{\omega}} + \frac{1}{2}m\frac{\gamma^2}{4}A_0^2\mathrm{e}^{-\frac{8\pi\gamma}{\omega}} = \frac{9}{16}E(0), \end{cases}$$

onde usamos que $\mathrm{e}^{-\frac{8\pi\gamma}{\omega}} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{4\pi\gamma}{\omega}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. Portanto, usando $\gamma = \frac{\rho}{m}$ a variação da energia será

$$\Delta E = E(0) - E\left(\frac{8\pi}{\omega}\right) = \left(1 - \frac{9}{16}\right)\frac{A_0^2}{2}\left(k + \frac{\rho^2}{4m}\right)$$

e substituindo $m = 2\,\text{kg}$, $k = 10{,}0\,\text{N/m}$, $A_0 = 25{,}0\,\text{cm}$ e $\rho = 0{,}102\,\text{kg/s}$ temos

$$\Delta E = 0{,}137\,\text{J}.$$

13. Em um sistema oscilatório com uma força de atrito temos:

$$F_{mola} + F_{atrito} = -kx - \rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

onde k é a constante da mola e ρ é a constante de amortecimento. Logo, a equação de movimento fica:

$$M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0.$$

Considere o oscilador como estando no regime subcrítico e resolva a equação diferencial para as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$.

Solução: utilizando o ansatz $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ na equação de movimento $M\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = 0$ temos a equação característica $M\lambda^2 + \rho\lambda + kx = 0$, cujas soluções são $\lambda_\pm = -\frac{\rho}{2M} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$. No regime de oscilação subcrítico $\frac{\rho^2}{4M^2} < \frac{k}{M}$, logo $\lambda_\pm = -\frac{\rho}{2M} \pm \mathrm{i}\omega$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{\rho^2}{4M^2}}$. Sendo assim, as soluções serão do tipo

$$\begin{cases} x(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\rho t}{2M}}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi), \\ v(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\rho t}{2M}}\left[\omega\cos(\omega t + \varphi) - \frac{\rho}{2M}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)\right]. \end{cases}$$

Impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = A\,\mathrm{sen}(\varphi) = 0, \\ v(0) = A\left[\omega\cos(\varphi) - \frac{\rho}{2M}\,\mathrm{sen}(\varphi)\right] = v_0, \end{cases}$$

temos $\varphi = 0$ e $A = \frac{v_0}{\omega}$ e com isso

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\rho t}{2M}}\,\mathrm{sen}(\omega t), \\ v(t) = \frac{v_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\rho t}{2M}}\left[\omega\cos(\omega t) - \frac{\rho}{2M}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]. \end{cases}$$

14. (Poli 2007) Um corpo de massa $m = 40\,\text{g}$ está preso a uma mola de constante elástica $k = 100\,\text{N/m}$. Este sistema é colocado para oscilar e depois imerso num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0{,}08\,\text{kg/s}$.

(a) Determine a frequência natural do sistema.

(b) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).

(c) Qual é o regime de oscilação? (justifique)

(d) Qual é a frequência de oscilação?

Solução:

(a)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100\,\text{N/m}}{0{,}040\,\text{kg}}} \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = 50\,\text{rad/s}$$

(b) Reescrevendo a equação de movimento

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - kx$$

temos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0,$$

onde $\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0{,}08\,\text{kg/s}}{0{,}040\,\text{kg}} = 2\,\text{s}^{-1}$ e $\omega_0^2 = (50\,\text{rad/s})^2 = 2500\,\text{rad}^2/\text{s}^2$.

(c) Dado que $\omega_0 = 50\,\text{s}^{-1}$ e $\frac{\gamma}{2} = 1\,\text{s}^{-1}$, logo $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$, ou seja, o regime de oscilação é subcrítico.

(d) Vimos em outros exercícios que no regime de oscilação subcrítico a frequência de oscilação é dada por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{2500 - 1}\,\text{rad/s} = \sqrt{2499}\,\text{rad/s}$$

15. (Poli 2006) Um corpo de massa $m = 1{,}0\,\text{kg}$ oscila livremente, quando preso a uma mola, com frequência angular $\omega_0 = 2{,}0\,\text{rad/s}$. Posteriormente este conjunto é colocado num líquido, cujo coeficiente de resistência viscosa é $\rho = 2\sqrt{3}\,\text{kg/s}$.

(a) Escreva a equação diferencial do movimento harmônico amortecido, e a sua solução com as condições iniciais $x(0) = 0{,}50\,\text{m}$ e $v(0) = 0$.

(b) Determine o tempo necessário T para que a amplitude do movimento diminua de um fator $1/e$ em relação ao valor inicial.

Solução:

(a) A equação de movimento será:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

e substituindo os dados $m = 1{,}0\,\text{kg}$, $\rho = 2\sqrt{3}\,\text{kg/s}$ e $k = m\omega_0^2 = 4\,\text{N/m}$ temos

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\sqrt{3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+4x=0.$$

Utilizando o ansatz $x=\mathrm{e}^{\lambda t}$ na equação de movimento temos a equação característica $\lambda^2+2\sqrt{3}\lambda+4=0$, cujas soluções são $\lambda_\pm=(-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-16})/2=-\sqrt{3}\pm\mathrm{i}$. Logo, a solução é do tipo

$$\begin{cases} x(t)=A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}\cos(t+\varphi), \\ v(t)=-A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}\left[\sqrt{3}\cos(t+\varphi)+\mathrm{sen}(t+\varphi)\right], \end{cases}$$

Impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0)=A\cos(\varphi)=0{,}5, \\ v(0)=-A\left[\sqrt{3}\cos(\varphi)+\mathrm{sen}(\varphi)\right]=0, \end{cases}$$

vem que $\tan(\varphi)=-\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{3}$ e com isso $A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow A=1$. Portanto,

$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right), \\ v(t)=-\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}\left[\sqrt{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{sen}\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\right]. \end{cases}$$

(b) No instante t a amplitude é dada por $A(t)=\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t}$, em $t=0$ temos $A(0)=1$. Logo, o instante T em que a amplitude é reduzida por um fator $1/\mathrm{e}$ será dado por

$$A(T)=\mathrm{e}^{-\sqrt{3}T}=\mathrm{e}^{-1}\quad\Rightarrow\quad T=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{s}.$$

16. Considere uma situação em que você está examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel. A suspensão "cede" 10 cm, quando o peso do automóvel inteiro é colocado sobre ela. Além disso, a amplitude da oscilação diminui 50 % durante uma oscilação completa. Estime os valores de k e ρ para o sistema de mola e amortecedor em uma roda, considerando que cada uma suporta 500 kg.

Solução: para cada suspensão a equação de movimento será

$$m\ddot{x}+\rho\dot{x}+kx+mg=0,$$

No ponto de equilíbrio $x_0=-0{,}10\,\mathrm{m}$ a equação de movimento fica $kx_0+mg=0$, logo a constante elástica será

$$k=-\frac{mg}{x_0}=-\frac{500\times 10}{-0{,}10}\,\mathrm{N/m}\quad\Rightarrow\quad k=5{,}0\times10^4\,\mathrm{N/m}.$$

Com $\gamma=\frac{\rho}{m}$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ e $x_0=-\frac{mg}{k}$ podemos reescrever a equação de movimento na forma

$$(x-x_0)''+\gamma(x-x_0)'+\omega_o^2(x-x_0)=0.$$

Dado que o regime de oscilação é subcrítico, a solução será do tipo

$$x(t)=x_0+A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t+\varphi),$$

onde $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$. Denotando a amplitude de oscilação por $A(t)=A_0\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e dado que em $t=\frac{2\pi}{\omega}$ temos $A\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)=\frac{1}{2}A_0\Rightarrow A_0\mathrm{e}^{-\frac{\pi\gamma}{\omega}}=\frac{1}{2}A_0\Rightarrow 2=\mathrm{e}^{\frac{\pi\gamma}{\omega}}$ $\Rightarrow\frac{\pi\gamma}{\omega}=\ln(2)$, e usando $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}$ temos

$$\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)\gamma=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}\quad\Rightarrow$$

$$\gamma=\frac{\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)^2+\frac{1}{4}}}=\frac{\rho}{m}\quad\Rightarrow$$

$$\rho=\frac{m\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{\ln(2)}\right)^2+\frac{1}{4}}}\quad\Rightarrow\quad\rho=1{,}1\times10^3\,\mathrm{kg/s}.$$

17. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo.

(a) Qual é o valor de v_0?

(b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0=2\,\mathrm{m}$ com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?

Solução: a equação de movimento será do tipo

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0.$$

com o ansatz $x=\mathrm{e}^{\lambda t}$ temos a equação característica $\lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2=0$, cujas soluções são $\lambda_\pm=-\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}$. No regime criticamente amortecido tem-se que $\omega_0=\frac{\gamma}{2}$ e com isso as raízes da equação características são iguais $\lambda_+=\lambda_-=-\frac{\gamma}{2}$, resultando em apenas uma solução. Logo, precisamos buscar uma segunda solução. Tentando uma solução do tipo $x=t\mathrm{e}^{\lambda t}$ vem que $\dot{x}=(1+\lambda t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ddot{x}=(2\lambda+\lambda^2t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ e isso na equação de movimento fornece a equação característica

$$(2\lambda+\lambda^2t)\mathrm{e}^{\lambda t}+(1+\lambda t)\gamma\mathrm{e}^{\lambda t}+\omega_0^2t\mathrm{e}^{\lambda t}=0,$$

$$(\lambda^2+\gamma\lambda+\omega_0^2)t+(2\lambda+\gamma)=0.$$

Uma vez que $\omega_0=\frac{\gamma}{2}$, facilmente obtemos que a solução da equação característica é $\lambda=-\frac{\gamma}{2}$. Portanto,

$x_2(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$ é solução juntamente com $x_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$, e a combinação linear das duas soluções resulta na solução geral $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$:

$$x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t},$$

e a velocidade será

$$v(t) = \left[b - \frac{\gamma}{2}(a + bt)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Tomando a posição inicial $x(0) = 0$ e dado que a velocidade inicial é $v(0) = v_0$ tem-se que $a = 0$, $b = v_0$ e

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}, \\ v(t) = v_0\left(1 - \frac{\gamma}{2}t\right)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}, \end{cases}$$

(a) No regime criticamente amortecido a posição é máxima quando $v(t) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\gamma}{2}t = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{t}$. Dado que o deslocamento máximo ocorre em $t = 1\,\mathrm{s}$ temos $\gamma = 2\,\mathrm{s}^{-1}$. Nesse instante temos $x(1) = v_0(1\,\mathrm{s})\mathrm{e}^{-1} = 3{,}68\,\mathrm{m} \Rightarrow v_0 = 3{,}68\mathrm{e}\,\mathrm{m/s}$ de onde obtemos a velocidade inicial $v_0 = 10{,}0\,\mathrm{m/s}$ e

$$\begin{cases} x(t) = 10\,t\,\mathrm{e}^{-t}, \\ v(t) = 10\,(1 - t)\,\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$$

(b) Com $\gamma = 2\,\mathrm{s}^{-1}$ as soluções gerais ficam

$$\begin{cases} x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-t}, \\ v(t) = [b - (a + bt)]\mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$$

e impondo as condições iniciais $x(0) = a = 2\,\mathrm{m}$ e $v(0) = b - a = 10\,\mathrm{m/s}$ temos que $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 12\,\mathrm{m/s}$ e

$$\begin{cases} x(t) = (2 + 12t)\mathrm{e}^{-t}, \\ v(t) = (10 - 12t)\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

18. (Poli 2006) O gráfico de $x(t)$, mostrado na figura abaixo, representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa ρ.

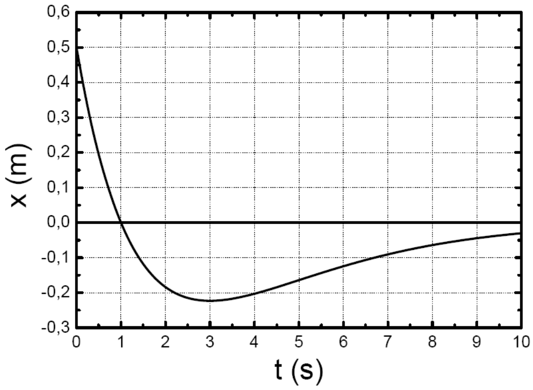
(a) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico?

(b) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

Determine os valores de a e b da equação.

(c) Determine o coeficiente de resistência viscosa ρ e a constante elástica k da mola.



(d) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador.

Solução:

(a) A velocidade será nula em aproximadamente $t = 3\,\mathrm{s}$.

(b) Em $t = 0$ temos $x(0) = a = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Já em $t = 1\,\mathrm{s}$ o gráfico mostra que $x(1) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}}(a + b) = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -0{,}5\,\mathrm{m}$.

(c) Com isso, e impondo que a velocidade $v(t) = \left[b - \frac{\gamma}{2}(a + bt)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$ seja nula em $t = 3\,\mathrm{s}$ vem que $v(3) = \left[-\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\right]\mathrm{e}^{-\frac{3\gamma}{2}} = 0 \Rightarrow \gamma = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. E assim podemos calcular o coeficiente de resistência viscosa $\rho = m\gamma \Rightarrow \rho = 1\,\mathrm{kg/s}$.

Uma vez que o amortecimento é crítico, temos $\omega_0 = \frac{\gamma}{2} = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$. E com $k = m\omega_0^2$ obtemos a constante elástica $k = 0{,}25\,\mathrm{N/m}$.

(d) Agora, usando que $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $b = -0{,}5\,\mathrm{m}$ e $\gamma = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ as soluções

$$\begin{cases} x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}, \\ v(t) = \left[b - \frac{\gamma}{2}(a + bt)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}, \end{cases}$$

ficam

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}(1 - t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}, \\ v(t) = \dfrac{1}{4}(t - 3)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}, \end{cases}$$

Portanto, a velocidade inicial do oscilador $v(0) = v_0$ será $v_0 = -0{,}75\,\mathrm{m/s}$.

19. Um corpo de massa $m = 1000\,\mathrm{kg}$ cai de uma altura $H = 1\,\mathrm{m}$ sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2\,\mathrm{m}$ abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

(a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento ρ do amortecedor.

(b) Obtenha a equação que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

Solução: a equação de movimento será

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx + mg = 0,$$

e com $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ podemos reescrevê-la na forma $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + g = 0$, ou ainda com $y = x + \frac{g}{\omega_0^2}$ ela pode ser reescrita na forma $\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$, cuja solução foi obtida anteriormente.

Para que o equilíbrio seja atingido tão rápido quanto o possível o amortecimento de ser crítico, ou seja, devemos impor que $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$.

(a) Para que o equilíbrio ocorra em $-d$ a constante elástica deve ser tal que $-kd + mg = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{d} \Rightarrow k = 5 \times 10^3\,\text{N/m}$.

Reescrevendo a relação $\omega_0 = \frac{\gamma}{2}$ temos $\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\rho}{2m} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{mk} \Rightarrow \rho = 2\sqrt{5} \times 10^3\,\text{kg/s}$. Logo, $\gamma = \frac{\rho}{m}$ implica que $\gamma = 2\sqrt{5}\,\text{s}^{-1}$.

(b) Com $x(t) = y(t) - \frac{g}{\omega_0^2}$ e $v(t) = \dot{x}(t) = \dot{y}(t)$ as soluções para o amortecimento crítico serão do tipo

$$\begin{cases} x(t) = (a + bt)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} - \frac{g}{\omega_0^2}, \\ v(t) = \left[b - \frac{\gamma}{2}(a + bt)\right]\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}. \end{cases}$$

A velocidade inicial v_0 vem da conservação da energia $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH} \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{5}\,\text{m/s}$. A posição inicial é $x(0) = x_0 = 0$. Impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = a - \frac{g}{\omega_0^2} = 0, \\ v(t) = b - \frac{\gamma}{2}a = v_0, \end{cases}$$

vem que $a = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{mg}{k} = d = 2\,\text{m}$ e $b = v_0$. Com isso, e usando que $\gamma = 2\sqrt{5}\,\text{s}^{-1}$ tem-se as soluções

$$\begin{cases} x(t) = 2(1 + \sqrt{5}\,t)\mathrm{e}^{-\sqrt{5}\,t} - 2, \\ v(t) = -10\,t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{5}\,t}. \end{cases}$$

20. Um oscilador não amortecido de massa m e frequência própria ω_0 move-se sob a ação de uma força externa $F = F_0\,\text{sen}(\omega t)$, partindo da posição de equilíbrio com velocidade inicial nula. Ache o deslocamento $x(t)$.

Solução: a equação de movimento será

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\,\text{sen}(\omega t).$$

Sabemos que a solução da equação homogênea é do tipo $x_h(t) = a\,\text{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$. Tentando uma solução particular do tipo $x_p(t) = A\,\text{sen}(\omega t)$ temos

$$-\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t) + \omega_0^2\,\text{sen}(\omega t) = \frac{F_0}{m}\,\text{sen}(\omega t) \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Logo, a solução geral é $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = a\,\text{sen}(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + A\,\text{sen}(\omega t), \\ v(t) = a\omega_0\cos(\omega_0 t) - b\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t) + A\omega\cos(\omega t), \end{cases}$$

e impondo as condições iniciais

$$\begin{cases} x(0) = b = 0, \\ v(0) = a\omega_0 + A\omega = 0, \end{cases}$$

chega-se em $b = 0$, $a = -\frac{\omega}{\omega_0}A$ e

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\text{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\,\text{sen}(\omega_0 t)\right], \\ v(t) = \dfrac{\omega F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right]. \end{cases}$$

21. (Poli 2006) Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma força elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k, uma força devido à resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa ρ e uma força externa periódica $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, sendo Ω a frequência externa.

(a) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e encontre a sua solução estacionária.

(b) Considerando que $m = 50\,\text{kg}$, $k = 5000\,\text{N/m}$, $F_0 = 50\,\text{N}$ e $\rho = 500\,\text{kg/s}$, calcule a frequência natural do sistema e o seu fator de qualidade.

(c) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de Ω para o qual a amplitude do movimento é máxima.

(d) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

Solução:

(a) A segunda lei de Newton aplicada ao corpo fica

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} + F_0\cos(\Omega t),$$

e com $\gamma = \dfrac{\rho}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ podemos reescrever essa equação de movimento na forma

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

A solução da equação homogênea tem um fator multiplicativo $\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$, independente do regime de oscilação, e pode ser considerado como um efeito transiente. A solução estacionária será uma solução particular da equação não homogênea. De um modo geral vamos procurar por uma solução particular do tipo $x(t) = A\cos(\Omega t + \Phi)$, e substituindo isso na equação de movimento obtém-se a equação

$$-\Omega^2 A\cos(\Omega t + \Phi) - \gamma\Omega A\,\mathrm{sen}(\Omega t + \Phi) +$$
$$\omega_0^2 A\cos(\Omega t + \Phi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t),$$

que pode ser reescrita como

$$\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)A\cos(\Phi) - \gamma\Omega A\,\mathrm{sen}(\Phi) - \frac{F_0}{m}\right]\cos(\Omega t) -$$
$$\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)A\,\mathrm{sen}(\Phi) + \gamma\Omega A\cos(\Phi)\right]\mathrm{sen}(\Omega t) = 0,$$

igualando os coeficiente que não dependem do tempo a zero é direto que

$$\begin{cases} A\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)\cos(\Phi) - \gamma\Omega\,\mathrm{sen}(\Phi)\right] = \dfrac{F_0}{m}, \\ A\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)\,\mathrm{sen}(\Phi) + \gamma\Omega\cos(\Phi)\right] = 0, \end{cases}$$

Dessa segunda igualdade obtemos a fase Φ em função de Ω:

$$\tan(\Phi) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Utilizando esse resultado e a identidade trigonométrica $\mathrm{sen}^2(\Phi) + \cos^2(\Phi) = 1$ temos

$$\cos(\phi) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \tan^2(\Phi)}} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}(\Phi) = \frac{\pm\tan(\Phi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\Phi)}},$$

e usando esses resultados na primeira igualdade vamos obter amplitude A em função de Ω:

$$A\,\mathrm{sen}(\Phi)\left[\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)}{\tan(\Phi)} - \gamma\Omega\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow$$

$$A\,\mathrm{sen}(\Phi)\left[-\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\gamma\Omega} - \gamma\Omega\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow$$

$$-A\frac{\mathrm{sen}(\Phi)}{\gamma\Omega}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow$$

que junto com o resultado

$$\frac{\mathrm{sen}(\Phi)}{\gamma\Omega} = \frac{\pm\tan(\Phi)}{\gamma\Omega}\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\Phi)}} =$$

$$\frac{\pm 1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

fornece que

$$A\,\frac{\pm 1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma\Omega}}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow$$

$$A(\Omega) = \pm\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

Portanto, a solução estacionária é

$$x(t) = A(\Omega)\cos[\Omega t + \Phi(\Omega)],$$

com

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}},$$

e

$$\Phi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right).$$

(b) A frequência angular natural é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5000\,\mathrm{N/m}}{50\,\mathrm{kg}}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}.$$

O fator de qualidade será dado por $Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}$. Dado que $A(\omega_0) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\omega_0}$ e $A(0) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2}$ temos $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$. Com $\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{500\,\mathrm{kg/s}}{50\,\mathrm{kg}} \Rightarrow \gamma = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ tem-se que $\omega_0 = \gamma$ e portanto $Q = 1$.

(c) Derivando $A(\Omega)$ em relação a Ω temos

$$A'(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\left[-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\gamma^2\Omega\right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad 2(\omega_0^2 - \Omega^2) = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

O valor de Ω em que a amplitude $A(\Omega)$ é máxima é a frequência de ressonância

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \Omega_R = 5\sqrt{2}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

De fato, note que para $\Omega > \Omega_R$ temos $A'(\Omega) < 0$, e para $\Omega < \Omega_R$ temos $A'(\Omega) > 0$, ou seja, a amplitude é máxima em Ω_R.

(d) Agora, vamos calcular o valor máximo da amplitude. Primeiro, note que usando $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$ temos $(\omega_0^2 - \Omega_R^2)^2 = \frac{\gamma^4}{4}$ e $\gamma^2\Omega_R^2 = \gamma^2\omega_0^2 - \frac{\gamma^4}{2}$. Assim,

$$A(\Omega_R) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_R^2)^2 + \gamma^2\Omega_R^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \gamma^2\omega_0^2 - \frac{\gamma^4}{2}}},$$

e

$$A_{max} = A(\Omega_R) = \frac{F_0}{\gamma m} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad \Rightarrow$$

$$A_{max} = \frac{1}{50\sqrt{3}}\,\mathrm{m}.$$

22. (Poli 2007) Um corpo de massa 50 g está preso a uma mola de constante $k = 20\,\mathrm{N/m}$ e oscila, inicialmente, livremente. Esse oscilador é posteriormente colocado num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0{,}9\,\mathrm{kg/s}$. Depois disso o oscilador, ainda no meio viscoso, é excitado por uma força externa $F = F_0\cos(\Omega t)$, onde $F_0 = 9{,}0\,\mathrm{N}$ e $\Omega = 20{,}0\,\mathrm{rad/s}$.

(a) Determine a frequência natural do sistema.

(b) Qual o regime de oscilação do sistema quando imerso no meio viscoso, mas antes de ser excitado pela força externa? Justifique a resposta.

(c) Depois que a força externa é aplicada e que o sistema entrou no regime estacionário, qual o valor da amplitude do movimento?

(d) Qual deveria ser o valor exato da frequência externa de excitação para que a amplitude de oscilação, no regime estacionário, fosse máxima?

Solução:

(a) A frequência natural do sistema será $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0 = 20\,\mathrm{s}^{-1}$.

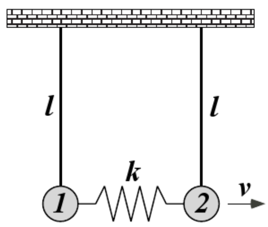
(b) Usando $\gamma = \frac{\rho}{m}$ vem que $\gamma = 18\,\mathrm{s}^{-1}$. Logo, $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ e o regime de oscilação é subcrítico.

(c) Vimos que a amplitude de oscilação é dada por $A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}}$. Dado que $\omega_0 = \Omega = 20\,\mathrm{s}^{-1}$ e $\gamma = 18\,\mathrm{s}^{-1}$ a amplitude de movimento será

$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\Omega} \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}5\,\mathrm{m}.$$

(d) Também vimos que a amplitude é máxima na frequência de ressonância Ω_R: $A'(\Omega) = 0 \Rightarrow \Omega = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{238}\,\mathrm{s}^{-1}$.

23. Duas partículas de mesma massa $m = 250\,\mathrm{g}$, estão penduradas no teto por barras idênticas, de comprimento $l = 0{,}4\,\mathrm{m}$ e massa desprezível, e estão ligadas uma à outra por uma mola de constante elástica $k = 25\,\mathrm{N/m}$. No instante $t = 0$, a partícula 2 (figura abaixo) recebe um impulso que lhe transmite uma velocidade $v = 15\,\mathrm{cm/s}$. Determine os deslocamentos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das posições de equilíbrio das duas partículas (em cm) para $t > 0$.



Solução: sabemos que para um pêndulo simples a equação de movimento pode ser obtida pela segunda lei de Newton na forma angular $\tau = I\alpha$. Tomando o eixo perpendicular ao plano de oscilação e que passa pelo ponto onde o pêndulo está pendurado temos a equação $[-mg\,\mathrm{sen}(\theta)]l = (ml^2)\ddot{\theta} \Rightarrow -g\,\mathrm{sen}(\theta) = l\ddot{\theta}$. Considerando o eixo x na horizontal e com origem no ponto de equilíbrio, para pequenas oscilações, temos $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{x}{l}$ e $\ddot{x} = l\ddot{\theta}$ e a equação de movimento fica $\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$. Tomando um referencial para cada partícula, com origem no seu ponto de equilíbrio, as equações de movimento para cada partícula, adicionando a força devido a mola, serão

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{l}x_1, \\ \ddot{x}_2 = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{l}x_2, \end{cases}$$

Somando e subtraindo essas equações chega-se em

$$\begin{cases} (x_2 + x_1)'' + \frac{g}{l}(x_2 + x_1) = 0, \\ (x_2 - x_1)'' + \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{l}\right)(x_2 - x_1) = 0, \end{cases}$$

e definindo as frequências $\omega_+ = \frac{g}{l}$ e $\omega_- = \frac{2k}{m} + \frac{g}{l}$ as soluções serão do tipo

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = A_+ \operatorname{sen}(\omega_+ t + \varphi_+), \\ x_2 - x_1 = A_- \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-), \end{cases}$$

e as soluções procuradas e as respectivas velocidades serão do tipo

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A_+}{2} \operatorname{sen}(\omega_+ t + \varphi_+) - \frac{A_-}{2} \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-), \\ x_2(t) = \frac{A_+}{2} \operatorname{sen}(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{A_-}{2} \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-), \\ v_1(t) = \frac{A_+\omega_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \frac{A_-\omega_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-), \\ v_2(t) = \frac{A_+\omega_+}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{A_-\omega_-}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-). \end{cases}$$

Impondo as condições iniciais $x_1(0) = x_2(0) = v_1(0) = 0$ e $v_2(0) = v$ vem que

$$\begin{cases} x_1(0) = \frac{A_+}{2} \operatorname{sen}(\varphi_+) - \frac{A_-}{2} \operatorname{sen}(\varphi_-) = 0, \\ x_2(0) = \frac{A_+}{2} \operatorname{sen}(\varphi_+) + \frac{A_-}{2} \operatorname{sen}(\varphi_-) = 0, \\ v_1(0) = \frac{A_+\omega_+}{2} \cos(\varphi_+) - \frac{A_-\omega_-}{2} \cos(\varphi_-) = 0, \\ v_2(0) = \frac{A_+\omega_+}{2} \cos(\varphi_+) + \frac{A_-\omega_-}{2} \cos(\varphi_-) = v. \end{cases}$$

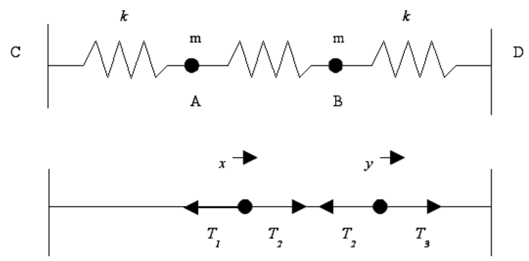
Somando a primeira equação com a segunda tem-se que $\varphi_+ = 0$, e subtraindo a segunda equação da primeira vem que $\varphi_- = 0$. Somando a terceira equação com a quarta obtém-se que $A_+ = \frac{v}{\omega_+}$, e subtraindo a quarta equação da terceira chega-se em $A_- = \frac{v}{\omega_-}$. Portanto, as soluções serão

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{v}{2\omega_+} \left[\operatorname{sen}(\omega_+ t + \varphi_+) - \dfrac{\omega_+}{\omega_-} \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-)\right], \\ x_2(t) = \dfrac{v}{2\omega_+} \left[\operatorname{sen}(\omega_+ t + \varphi_+) + \dfrac{\omega_+}{\omega_-} \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-)\right], \\ v_1(t) = \dfrac{v}{2} \left[\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-)\right], \\ v_2(t) = \dfrac{v}{2} \left[\cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \operatorname{sen}(\omega_- t + \varphi_-)\right], \end{cases}$$

onde $\omega_+ = \frac{g}{l}$ e $\omega_- = \frac{2k}{m} + \frac{g}{l}$. Finalmente, substituindo os valores dados temos

$$\begin{cases} x_1(t) = 1{,}5 \operatorname{sen}(5t) - 0{,}5 \operatorname{sen}(15t), \\ x_2(t) = 1{,}5 \operatorname{sen}(5t) + 0{,}5 \operatorname{sen}(15t), \\ v_1(t) = 7{,}5 \cos(5t) - 0{,}5 \cos(15t), \\ v_2(t) = 7{,}5 \cos(5t) + 0{,}5 \cos(15t). \end{cases}$$

24. Considere duas partículas A e B cada uma com massa m conectadas por uma mola de constante elástica k e comprimento natural a. Cada partícula está ligada a dois suportes C e D por duas molas com as mesmas características da primeira mola. Os dois suportes são separados por uma distância $3b$, como mostrado na figura abaixo. Em um dado instante de tempo t o deslocamento das partículas A e B é x e y a partir da posição de equilíbrio, resultando nas forças mostradas na figura. Calcule as frequências de oscilação do sistema.



Solução: considerando um referencial para cada partícula, com origem no seu ponto de equilíbrio, as equações de movimento ficam

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A = -kx_A + k(x_B - x_A), \\ m\ddot{x}_B = -kx_B - k(x_B - x_A), \end{cases}$$

somando e subtraindo as equações e dividindo ambos os lados por m chega-se em

$$\begin{cases} (x_B + x_A)'' = -\frac{k}{m}(x_B - x_A), \\ (x_B - x_A)'' = -\frac{3k}{m}(x_B - x_A), \end{cases}$$

e definindo as frequências $\omega_1 = \frac{k}{m}$ e $\omega_2 = \frac{3k}{m}$ as soluções serão

$$\begin{cases} x_B + x_A = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1), \\ x_B - x_A = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2), \end{cases}$$

e subtraindo e somando essas as equações temos as soluções procuradas

$$\begin{cases} x_A = \frac{A_1}{2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_B = \frac{A_1}{2} \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2). \end{cases}$$

Dependendo das condições iniciais podemos ter soluções do tipo $x(t) = a_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1)$ de frequência angular $\omega_1 = \frac{k}{m}$, ou $x(t) = a_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)$ de frequência angular $\omega_2 = \frac{3k}{m}$, ou ainda com as frequências acopladas $x(t) = a_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2)$.