

Exercícios da Nota Explicativa V2 (Produto Escalar)

- 1) Determine um vetor unitário e ortogonal aos vetores:
 $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.

Seja $\vec{w} = (x, y, z)$ o vetor procurado.

Tem-se:

$$\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \quad (2)$$

$$\|\vec{w}\| = 1 \quad (3)$$

Representando as condições algebricamente, tem-se:

De (1): $3x + y - z = 0$

De (2): $-x + y + z = 0$

De (3): $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Resolvendo o sistema:

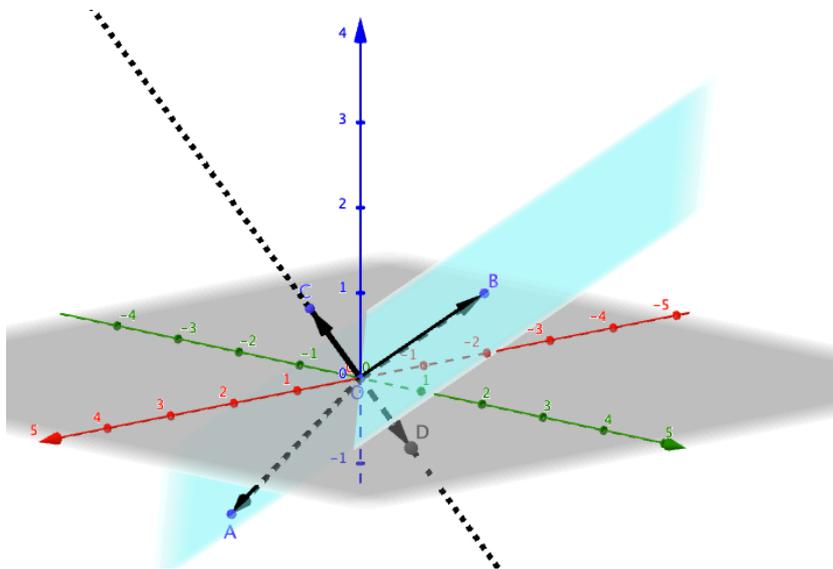
(1)+(2): $2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x \quad (4)$

Subst. (4) em (2): $-x - x + z = 0 \Leftrightarrow z = 2x \quad (5)$

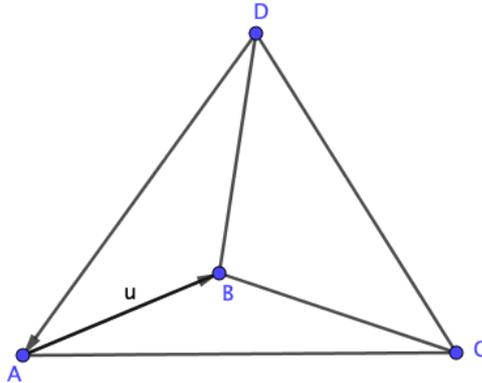
Subst. (4) e (5) em (3): $x^2 + (-x)^2 + (2x)^2 = 1 \Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$|x| = \sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Logo, $\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ou $\vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$



2) Sendo $ACBD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \rangle$.



Note que $ABCD$ é tetraedro regular de aresta unitária, logo:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = 1$$

$$\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 120^\circ$$

Pela definição (geométrica) do produto escalar:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{DA}\| \cos 120 = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$