Elipsoide

$$+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Intersecção com os eixos coordenados

eixo x , $y=z=0$

$$\frac{x^2}{a^2}+0+0=1$$

$$x=\pm a$$

eixo y , $x=z=0$

$$0+\frac{y^2}{b^2}+0=1$$

$$y=\pm b$$

eixo z , $x=y=0$

$$0+0+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$z=\pm c$$

Análise sobre os planos coordenados

plano xOy

$z=k$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2} \qquad p=1-\frac{k^2}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{p\,a^2}+\frac{y^2}{p\,b^2}=1$$

se $k=0$, elipse

plano xOz

$y = K$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{K^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{b^2} \qquad p = 1 - \frac{K^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{pa^2} + \frac{z^2}{pc^2} = 1$$

se $K=0$, elipse

plano yOz

$x = K$

$$\frac{K^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{a^2} \qquad p = 1 - \frac{K^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{pb^2} + \frac{z^2}{pc^2} = 1$$

se $K=0$, elipse

se $x = \pm a = K$

$$p = 1 - \frac{a^2}{a^2} = 0$$

$$\therefore \frac{y^2}{0} + \frac{z^2}{0} = 1$$

Só existe $x = \pm a$ se, e somente se, $y = z = 0$.

se $K > a$, $x > a$, então $p < 0$.

ou $K < -a$,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -p$$

$$\frac{y^2}{-pb^2} + \frac{z^2}{-pc^2} = 1$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{z^2}{(-pc^2)}\right) \cdot (-pb^2)$$

$$y = \pm\sqrt{-pb^2\left(1 + \frac{z^2}{pc^2}\right)}$$

$$\therefore \{\phi\}$$

$$p = 1 - \frac{(2a)^2}{a^2}$$

$$p = 1 - \frac{4a^2}{a^2}$$

$$p = -3$$

Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Interseção com os eixos coordenados

eixo x, $y = z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + 0 + 0 = 1$

$$x = \pm a$$

eixo y, $x = z = 0$ $0 + \frac{y^2}{b^2} + 0 = 1$

$$y = \pm b$$

eixo z, $x = y = 0$ $0 + 0 - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$z^2 = -c^2$$

$$z = \pm\sqrt{-c^2} \quad \therefore \quad \{\emptyset\}$$

Análise nos planos coordenados

plano xOy

$z = K$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{K^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{K^2}{c^2} \qquad p = 1 + \frac{K^2}{c^2}$$

$$\therefore \frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1$$

Se $K = 0$, elipse

Se $K > 0$ ou $K < 0$, elipse

plano xOz

$y = k$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{b^2} \qquad p = 1 - \frac{K^2}{b^2}$$

$$\frac{x^2}{pa^2} - \frac{z^2}{pc^2} = 1$$

se $K = 0$, hiperbole

se $K = b = y$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x}{a} = \pm \frac{z}{c}$$

$$x = \pm \frac{a}{c} z$$

$\therefore$ Retas concorrentes que se cruzam em b.

se $K > b$, $p < 0$

$$p = 1 - \frac{(2b)^2}{b^2}$$

$$p = -1$$

$\therefore$

$$\frac{x^2}{-pa^2} - \frac{z^2}{-pc^2} = 1$$

$$\frac{z^2}{pc^2} - \frac{x^2}{pa^2} = 1$$

$\rightarrow$ Uma hipérbole, com eixo real sobre o eixo z.

plano yOz

$x = k$

Análogo ao plano xOz.

Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

- Intersecção com os eixos coordenados

eixo x, $y=z=0$

$$-\frac{x^2}{a^2}+0+0=1$$
$$-x^2=a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2} \quad \therefore \{\emptyset\}$$

eixo y, $x=z=0$

$$0+\frac{y^2}{b^2}+0=1$$
$$y^2=b^2$$
$$y=b$$

eixo z, $x=y=0$

$$0+0-\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$-z^2=c^2$$
$$z=\pm\sqrt{-c^2} \quad \therefore \{\emptyset\}$$

- dos planos coordenados

plano xOy

$z=K$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{K^2}{c^2}=1$$
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{K^2}{c^2} \qquad \rho=1+\frac{K^2}{c^2}$$

$$\therefore \frac{y^2}{\rho b^2}-\frac{x^2}{\rho a^2}=1$$

se $K=0$ $\rightarrow$ hipérbole com eixo real sobre o eixo y.

se $K>0$ ou $K<0$, hipérbole com eixo real sobre o eixo y.

plano xOz

$y = K$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{K^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{K^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{K^2}{b^2} - 1$$

se $K = 0$ ou $K < b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$x^2 = -1 - \frac{z^2}{c^2}$$

$$x = \pm\sqrt{-\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)} \quad \therefore \quad \{\phi\}$$

se $K \neq 0$ e $K > b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{K^2}{b^2} - 1 \qquad \rho = \frac{K^2}{b^2} - 1$$

$$\therefore \rho > 0$$

$$\frac{x^2}{\rho a^2} + \frac{z^2}{\rho c^2} = 1$$

→ Elipses, em $y > b$ e $y < b$

plano yOz

$x = K$

$$-\frac{K^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \rho = 1 + \frac{K^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{K^2}{a^2} \rightarrow \therefore \frac{y^2}{\rho b^2} - \frac{z^2}{\rho c^2} = 1$$

se $K = 0$ → hipérbole com eixo real sobre o eixo y.

se $K > 0$ ou $K < 0$ → " " "

Parabolóide Elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Intersecção com os eixos coordenados.

eixo x: $y = z = 0$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + 0 = 0$

$x = 0$

eixo y: $x = z = 0$ $\quad 0 + \frac{y^2}{b^2} = 0$

$y = 0$

eixo z: $x = y = 0$ $\quad 0 + 0 = cz$

$z = 0$

Análise dos planos coordenados

plano xOy

$z = k$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = kc$ $\quad kc = p$

$$\frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1$$

p/ $z = k > 0$, elipse

p/ $z = k < 0$, $\{\phi\}$

plano xOz

$y = K$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{K^2}{b^2} = cz$$

$$z = \frac{x^2}{a^2c} + \frac{K^2}{b^2c}$$

para qualquer K, temos uma parábola com concavidade para cima.

plano yOz

$x = K$

$$\frac{K^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

$$z = \frac{y^2}{b^2c} + \frac{K^2}{a^2c}$$

idem ao plano xOz.

Parabolóide hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Interseção com os eixos coordenados

eixo x, $y = z = 0$

$$0 - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

$$x = 0$$

eixo y, $x = z = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} + 0 = 0$$

$$y = 0$$

eixo z, $x = y = 0$

$$0 + 0 = cz$$

$$z = 0$$

Análise dos planos coordenados

plano xOy

$z = K$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cK \qquad p = cK$$

$$\frac{y^2}{pb^2} - \frac{x^2}{pa^2} = 1$$

$\therefore$ para qualquer valor $K > 0$, tem-se uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y.

p/ $K < 0$, tem-se $p < 0$

$$\therefore \quad -\frac{y^2}{pb^2} + \frac{x^2}{pa^2} = 1$$

$\therefore$ para qualquer valor de $K < 0$, tem-se uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x.

plano xOz

$y = K$

$$\frac{K^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

$$z = -\frac{x^2}{ca^2} + \frac{K^2}{b^2}$$

$\therefore$ para qualquer K, tem-se uma parábola com concavidade voltada para baixo.

plano yOz

$x = K$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{K^2}{a^2} = cz$$

$$z = \frac{y^2}{cb^2} - \frac{K^2}{ca^2}$$

$\therefore$ para qualquer K, tem-se uma parábola com concavidade voltada para cima.