

Sobre o surgimento das equações de Maxwell

On the emergence of Maxwell's equation

Marcelo Costa de Lima*¹ 

¹Universidade Federal do Pará, Faculdade de Física, Belém, PA, Brasil

Recebido em 12 de Abril, 2019. Revisado em 21 de Maio, 2019. Aceito em 25 de Maio, 2019.

Em seu *Sobre linhas de força físicas* Maxwell apresentou a primeira versão de suas equações eletromagnéticas, quando a luz foi então encarada como distúrbio cisalhante em um éter fluido e elástico. No presente artigo procuro discutir os detalhes deste modelo mecânico que serviu de trampolim para Maxwell propor a *teoria eletromagnética da luz*, suas virtudes e limitações.

Palavras-chave: éter magnético, éter luminífero, corrente de deslocamento, sólido elástico.

In his *On physical lines of force* Maxwell presented the primary version of his electromagnetic equations, when light was seen as a shear disturbance in a elastic fluid ether. In the present paper I discuss the details of the mechanical model wich served as a trampoline for Maxwell's proposition of the *electromagnetic theory of light*, its virtues and limitations.

Keywords: magnetic ether, luminiferous ether, displacement current, elastic solid.

1. Introdução

A gênese das equações eletromagnéticas deu-se num contexto bastante adverso ao que nos é apresentado hoje, nos textos didáticos de eletromagnetismo clássico. Temos agora uma percepção das *Equações de Maxwell* como leis fundamentais, que se justificam sem apelo a mais nada senão a experiência (desde que nos limitemos ao domínio de fenômenos não quânticos). Podem ser, a rigor, postuladas. As variáveis de campo, que nelas figuram, possuem uma realidade intrínseca não sendo expressão de mais nada que lhes seja subjacente. Também a carga elétrica se apresenta agora como uma propriedade fundamental da matéria, independente das outras, dando origem à corrente elétrica e juntas são as fontes do campo eletromagnético (o *spin* de partículas elementares também o é, mas não podemos introduzi-lo no domínio clássico). Quando foram moldadas, na segunda metade do século XIX, a situação era bastante distinta. Havia, por um lado, a vaga noção de *linha de força*, surgida da intuição de Michael Faraday (1791-1867) de que o espaço é a morada de forças que estão distribuídas através dele, em linhas curvas. Forças que são comunicadas de um ponto a outro de forma contígua. Sua expressão mais tangível são os padrões exibidos por limalhas de ferro no entorno de um ímã. Esta *linha de força* física se aproxima, tanto quanto possível, da noção atual de campo clássico. Faraday, porém, limitado por sua formação atípica e autodidata, jamais pôde ou interessou-se em formalizar suas teorias em equações matemáticas, deixando-nos suas concepções elaboradas de forma qualitativa [1-3]. No do-

mínio da óptica, por outro lado, se havia testemunhado a pouco o ressurgimento da teoria ondulatória da luz, nas mãos de Thomas Young (1773-1829) e Augustin Fresnel (1788-1827) [4-8]. A nova teoria ondulatória da luz, que se tornara um campo de vigorosas pesquisas teóricas, trouxe consigo a ideia de que o *éter luminífero* possuía estrutura, não similar ao fluido ideal originalmente admitido Christiaan Huygens (1629-1695), em seu *Tratado da luz* [9] de 1690. Talvez similar a um sólido elástico, talvez um fluido visco-elástico, ou até um meio de elasticidade única e exótica. Na trilha aberta por Fresnel, uma sucessão de teóricos viriam a se engajar num amplo programa de adequação da fenomenologia da óptica às deformações, tensões e movimentos do éter luminífero. Dentre eles podemos citar brevemente Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) [10-13], George Green (1793-1841) [14,15], James McCullagh (1809-1847) [16,17], Gabriel Stokes (1819-1903) [18-21], William Thomson (1824-1907) e - o personagem que aqui nos concerne - James Clerk Maxwell (1831-1879). Entre as fontes secundárias de referência, posso sugerir [22-25].

Nas mãos de Thomson e Maxwell, o mencionado programa se converteu numa busca por unificação entre o éter luminífero e um eventual éter magnético, buscando oferecer a fundamentação mecânica não só para a descrição da luz, como se fazia na óptica teórica, mas também para a ação contígua de Faraday, representada por suas *linhas de força*. A trilogia eletromagnética de Maxwell [26-28], em particular, já foi objeto de análise da parte de vários historiadores da ciência, ao que posso citar [29,30]. Mas é em "*Sobre linhas de força físicas*" [27] que vemos as *Equações de Maxwell* surgirem

*Endereço de correspondência: mclima@ufpa.br

completas pela primeira vez nas publicações de Maxwell. Não surgem, entretanto, como leis físicas independentes e fundamentais. Ao contrário, são decorrentes das características estruturais do meio etéreo e de sua dinâmica. Trata-se de um artigo fundamentado na mecânica do contínuo e, em última instância, nas leis de Newton. As leis eletromagnéticas são uma consequência. A carga e corrente elétricas, tal como aí aparecem, são simples nomes dados a uma certa condição mecânica do meio etéreo. É, por excelência, um trabalho do seu tempo. Isto o torna menos penetrável ao leitor dos nossos dias, condicionado, por formação, a pensar no campo eletromagnético e na carga elétrica como dotados de natureza própria. É nele, porém, que vemos nascer tanto a “*corrente de deslocamento*” quanto a sugestão de que a luz e os fenômenos eletromagnéticos são aspectos distintos de um só e mesmo éter. Por tais razões, senti mais fortemente a necessidade de submeter *Sobre linhas de força físicas* [27] ao meu próprio escrutínio. O presente artigo é o resultado deste esforço.

2. Notação anacrônica

Tomei a liberdade de usar um formalismo matemático anacrônico. No tempo de Maxwell a análise vetorial não estava formalizada como a temos hoje. No formalismo de uso então corrente, grandezas vetoriais eram descritas por cada um de seus componentes cartesianos, separadamente. O vetor **intensidade magnética**, \vec{H} , por exemplo, aparece como o conjunto de funções (α, β, γ) . Sua divergência $\nabla \cdot \vec{H}$, não nomeada àquela altura de **divergente**, aparece como

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz},$$

e assim por diante.

As *Equações de Maxwell*, na forma vetorial, em quatro equações, somente surgiriam após a morte de Maxwell, nos trabalhos de Oliver Heaviside (1850-1925) [31]. Vale ressaltar também que Heaviside desempenhou papel fundamental na consolidação da teoria eletromagnética tal como nos é apresentada, ainda hoje, integrando o grupo que ficou conhecido como “*Maxwellianos*”, ao lado de George Francis FitzGerald (1851-1901) e Oliver Lodge (1851-1940) [32].

Eventualmente também transitei entre o formalismo vetorial e o formalismo indicial tensorial, aí assumindo a convenção da soma de Einstein, sobre índices espaciais, quando se fez conveniente. Como consequência, o volume de símbolos matemáticos, presentes nas deduções que conduzem a uma proposição qualquer, ficou enormemente diminuído. Particularmente se comparado aos cálculos originalmente apresentados por Maxwell.

Procurei assim não perder de vista as ideias subjacentes, seu contexto e os pressupostos físicos envolvidos, mas as relações matemáticas que daí surgem foram represen-

tadas na notação corrente da análise vetorial e tensorial, de nossos textos atuais.

3. Faraday assimilado por Thomson

Quando olho para os textos didáticos atuais de eletromagnetismo clássico, nunca me parece excessivo relembrar a obra eletrostática e magnetostática de William Thomson (1824-1907). Ela está fartamente presente neles, mas seu nome não aparece aí associado a praticamente nada.

As primeiras tentativas de descrever matematicamente as linhas de força de Faraday foram devidas a Thomson, a partir de 1845, quando tratou de fenômenos eletrostáticos na presença de dielétricos [33], solucionando o debate de uma aparente incompatibilidade entre a ideia de Coulomb, da ação da força elétrica em linha reta, e a de Faraday, da ação elétrica ao longo de linhas curvas. No mesmo ano ele instigou Faraday sobre possíveis evidências em favor da ação dielétrica sobre a luz plano polarizada. Incapaz de fornecer tais evidências, Faraday anunciou em vez disso a descoberta a ação da “*força magnética*” que induzia uma rotação no plano de polarização da luz. O artigo referente a este que será chamado **efeito Faraday** trouxe ainda a descoberta do **diamagnetismo** [34].

Na mesma ocasião, Faraday publicou um artigo puramente especulativo sugerindo que as *linhas de força* poderiam servir de base para um entendimento alternativo da “*ação direta à distância*” como, em verdade, uma “*ação contígua*”; comunicada através do espaço pela linha de força [1]. Se fosse dotada de algo como elasticidade, a linha de força poderia também originar vibrações laterais que, então, comunicadas às linhas de força adjacentes, se espalhariam no espaço, como ondas. Tais vibrações poderiam então ser a origem dos fenômenos de radiação térmica e da luz!

No ano seguinte Thomson demonstrou que havia uma analogia formal entre certas configurações de linhas de força e configurações de deformação elástica no meio contínuo em “*Sobre uma representação mecânica das forças elétrica, magnética e galvânica*” [35]. Embora ele não tenha aí advogado a equivalência física entre a ação magnética e a deformação elástica do meio, a analogia entre a *linha de força magnética* e a linha que representa o eixo de deformações rotacionais tinha por inspiração clara o caráter rotatório do efeito Faraday. De suas considerações finais fica evidente que ainda considerava prematuro abraçar um programa estritamente faradiano na descrição da interação elétrica e magnética, a partir das analogias que acabara de fazer.

Assim retomou uma abordagem mais próxima a da escola francesa, da qual sua própria formação fora fortemente influenciada, onde se admitia que tais ações ocorriam à distância, provocadas por “*fluidos elétricos e magnéticos*” existentes no interior dos corpos, a semelhança de Coulomb [36] ou Poisson [37]. Manteve, no entanto, a atitude de que as densidades associadas à tais fluidos tivessem afinal utilidade transitória. Foi assim que

em “*Sobre as forças experimentadas por pequenas esferas sob influência magnética*” [38], introduziu a “*intensidade de magnetismo induzido*”, \vec{M} , da esfera, a equação constitutiva $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, na qual a constante χ_m depende da “*capacidade da substância para a indução magnética*” e \vec{H} a força resultante sobre uma “*unidade magnética imaginária*”. A força por ele obtida

$$\vec{f} = \chi_m \nabla \left(\frac{\vec{H}^2}{2} \right), \quad (1)$$

nos indica, retrospectivamente, o aparecimento ainda que latente da densidade de energia magnética. Ele comenta que uma esfera de ferro doce migra para onde \vec{H} cresce e que nos (então) recém descobertos diamagnéticos, ocorre o contrário. Adiante, em 1851, reconheceu que a variação da quantidade sob o gradiente em (1) se associava aos efeitos mecânicos, prenunciando assim a concretização matemática da ideia de Faraday de que a energia magnética está estocada no espaço, no entorno dos corpos magnéticos.

Persistiu em seu esforço para estabelecer uma correspondência precisa entre a linguagem dos físicos matemáticos e as visões de Faraday quando, por exemplo, em [39] comentou que “*atração*” poderia igualmente ser entendida como a tendência de uma pequena esfera ferromagnética “*em direção à região de maior força*” e “*repulsão*” como o que ocorre a uma pequena esfera diamagnética quando é expulsa de “*lugares de força intensa*”. Em 1851 [40] o vemos adotar uma linguagem deliberadamente faradiana, quando introduz definições para “*campo magnético*” e “*linha de força*”. No mesmo ano, em “*Uma teoria matemática do magnetismo*” [41], aproxima-se novamente da abordagem herdada da escola francesa, quando retorna à “*matéria magnética imaginária*” a qual, segundo nos diz ele, não precisamos atribuir nenhuma outra qualidade, como o fazemos com a matéria usual, que a de atrair ou repelir ímãs, bem como outra porção similar dela própria. Assim como no ímã, a “*matéria magnética*” tem duas polaridades, norte e sul. Nesta ocasião estabeleceu o tratamento matemático para caracterização do “*potencial*” devido ao corpo de magnetização prescrita, \vec{M} , na formulação do potencial escalar magnético, como ainda é encontrada nos textos didáticos em nossos dias.

Entretanto, sua inquietação com o significado do efeito Faraday o trouxe de volta à abordagem da força magnética como uma ação contígua. Supôs que o campo magnético era evidência da existência de “*vórtices*” no meio etéreo, sendo a linha de campo magnético o resultado do alinhamento dos eixos de uma infinidade dos vórtices etéreos. Ao publicar “*Ilustrações Dinâmicas dos Efeitos Magnéticos Rotatório e Helicoidal em Corpos Transparentes sobre a Luz Polarizada*” [42], de 1857, falhou em demonstrar que este era fundamento dinâmico subjacente ao **efeito Faraday**, mas persistiu com seus vórtices como base para o entendimento da estrutura não

somente do éter, mas também da matéria, aí incluindo-se sua visão dos átomos [43,44].

Foi neste cenário que o jovem Maxwell nos apresentou sua primeira investigação eletromagnética, em 1855.

4. James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell nasceu em Edimburgo, Escócia, em 13 de junho de 1831. Em 24 de novembro do mesmo ano, Faraday anunciou a descoberta da indução eletromagnética, perante a Royal Society de Londres.

Filho de John Clerk Maxwell e Frances (nascida Cay) Clerk Maxwell, o nome próprio da família paterna era Clerk. O nome Maxwell fora adotado três gerações antes, quando a família herdou a propriedade de Middlebie na região em que existira o feroz clã Maxwell. Família de forte orientação religiosa, o pai Presbiteriano e a mãe de orientação Episcopal. Maxwell não conheceu sua irmã mais velha, Elizabeth, que morrera antes dele nascer. Passou a infância na propriedade rural da família, em Glenlair, ao sudoeste da Escócia. Sua educação inicial deu-se em casa sob a tutoria da mãe.

Os planos familiares de educar Maxwell em casa foram prejudicados pela morte súbita da mãe em 1839. Maxwell deixou Glenlair por Edimburgo em 1841, aos 10 anos, deixando o convívio do pai, que lá permaneceu, indo viver com a tia. Ingressou na “*Edinburgh Academy*”, uma das melhores escolas da Escócia, onde conheceu Lewis Campbell, seu futuro biógrafo [45], e Peter Guthrie Tait. Em 1846, aos 14 anos, elaborou seu primeiro artigo técnico sobre um método de se traçar curvas ovais, o qual foi lido perante a Royal Society de Edimburgo pelo amigo de seu pai e futuro mentor James David Forbes.

Em 1847 Maxwell ingressou na Universidade de Edimburgo, aos 16 anos, estreitando sua relação com Forbes. Na época, o currículo das universidades escocesas era amplo, englobando grego, latim, história e história natural, matemática, filosofia e filosofia natural. Sabemos que tomou emprestado, na universidade, o “*Optiks*”, de Newton, o “*Théorie analytique de La chaleur*”, de Fourier, “*Calcul différentiel*”, de Cauchy, o “*Traité de Mécanique*”, de Poisson, e o livro de geometria descritiva de Gaspar Monge. Suas leituras filosóficas incluíram “*Leviathan*”, de Thomas Hobbes, e “*Theory of Moral Sentiments*”, de Adam Smith. Em 1849 iniciou pesquisas sobre a composição das cores, com supervisão de Forbes, quando obtiveram equações quantitativas para a composição das cores, empregando vermelho azul e verde como cores primárias (independentemente do que fizera Young nos anos de 1820). Amigos como Campbell e Tait já haviam a esta altura deixado Edimburgo, por Oxford e Cambridge, e Forbes logo recomendou fortemente que Maxwell fosse para o Trinity College.

Em outubro de 1850, aos 19 anos, Maxwell ingressou na Universidade de Cambridge, inicialmente na Peterhouse. Sua aspiração de ir para o Trinity, que congregava os estudantes de vocação matemática, somente aconteceu após

um semestre. Em Cambridge Maxwell teve como tutor particular William Hopkins, foi aluno de George Gabriel Stokes, Lucasian Professor de matemática, e William Whewell, o reitor (master) da faculdade. Aí desfrutou de ambiente intelectual efervescente, onde tópicos variados eram objeto de acalorada discussão, em particular, o debate ciência versus religião. A opinião predominante, de incompatibilidade entre as duas, confrontava Maxwell com sua própria educação que o levava à considerá-las complementares, época em que integrou o grupo de 12 estudantes que se denominavam os Apóstolos.

Durante a graduação em Cambridge, Maxwell propôs a primeira teoria matemática geral da foto-elasticidade, já em 1850. Em 1852 deu contribuição decisiva à teoria da visão das cores, a partir de sua hipótese dos três estímulos espectrais, retomando a teoria dos três receptores de cores, de Young. Concluiu a graduação, em 1854, com a segunda melhor nota em matemática. Para obtenção do grau os estudantes deviam se submeter ao *Mathematical Tripos*. O exame básico, sobre assuntos que constavam nos livros, durava três dias e para obter o grau de honra mais quatro dias de problemas mais difíceis. Após isso podiam prestar um exame adicional para concorrer ao *Prêmio Smith*. Para submeter-se ao *Tripos*, Maxwell foi treinado pelo “coach” Hopkins, particularmente nas técnicas de resolução de problemas. Maxwell era dado a erros de atenção e raciocínio não linear, pouco atento “a habilidade de resolver problemas que o professor Forbes me ensinou a desprezar”. Ficou em segundo lugar (*second Wrangler*), assim como nove anos antes o fora William Thomson, em 1845. O primeiro lugar (*senior Wrangler*) ficou com Edward Routh. Maxwell ainda concorreu ao *Prêmio Smith*, dividindo-o com Routh. Dois anos antes o ganhador do Smith fora seu velho amigo Tait, nove anos antes fora Thomson. Eleito fellow, em 1855, Maxwell logo publicou *Experimentos sobre a cor tal como percebida pelo olho* tema por ele cultivado desde os tempos de Edimburgo, com Forbes.

Em 1855 Maxwell fez sua contribuição inaugural à formulação matemática das linhas de força em *Sobre as linhas de força de Faraday* [26], como um discípulo legítimo de Thomson. Supôs que o espaço é preenchido por um fluido sem peso e incompressível, ao qual toda a matéria é permeável. Tal fluido podia mover-se devido a uma diferença de pressão e as linhas de fluxo poderiam representar tanto linhas de “força elétrica” quanto de “força magnética”, conforme o caso. Mostrou que havia, por analogia, uma correspondência entre a pressão e o potencial, bem como entre o gradiente da pressão e a “forças” elétrica ou magnética. As diferentes susceptibilidades dos corpos, elétrica ou magnética, correspondiam aos diferentes graus de porosidade da matéria em relação ao fluido hipotético. Enunciou o teorema de que a circulação do campo magnético é proporcional à corrente que o atravessa, que hoje chamamos impropriamente de Lei de Ampère. Construiu assim seu primeiro modelo para a descrição de fenômenos elétricos e magnéticos estáticos

(estacionários) numa visão de campo, entendido como ação contígua através de um éter subjacente. Ao considerar a indução eletromagnética, buscou caracterizar matematicamente o “estado eletrotônico” de Faraday [46]. Após mergulhar nos trabalhos de Green, Stokes e Thomson, definiu o agente gerador das “forças eletromotrizes” induzidas, a “função eletrotônica” (o nosso atual **potencial vetor**, \vec{A}). A indução eletromagnética ocorria quando a “função eletrotônica” variava no tempo, e isto apontava para o cenário de campos dinâmicos.

Neste mesmo ano, alertado por Forbes, Maxwell se candidatou ao cargo de Professor de Filosofia Natural do Marischal College, em Aberdeen. Um posto em universidade escocesa, com seu ano acadêmico curto, era ideal tanto para a atividade de pesquisa quanto para estar próximo de seu pai, já doente. Retornou a Glenlair na Páscoa, apenas para testemunhar o declínio da saúde de John Clerk, que veio a falecer em 3 de abril, sob os cuidados do filho. Com a morte do pai, assumiu os encargos de Glenlair, especialmente em relação aos trabalhadores da fazenda e suas famílias. Maxwell retornou então a Cambridge, logo recebendo a notícia de sua nomeação em Aberdeen.

Em 1856 Wilhelm Weber (1804-1891) e Rudolf Kohlrausch (1809-1858), na Alemanha, uniformizaram os padrões de medida eletrostático e eletrodinâmico da carga elétrica [47], que não eram equivalentes entre si. Mediram a razão entre as unidades eletrostática e eletrodinâmica, da “quantidade de eletricidade”, encontrando o valor $w = 4,39 \times 10^8 m/s$; logo reconhecido por Bernhard Riemann (1826-1866) como um número similar ao valor da velocidade da luz

$$\nu = \frac{w}{\sqrt{2}} = 3,11 \times 10^8 m/s, \quad (2)$$

quando apontou o possível impacto que a descoberta deste número poderia ter numa teoria da propagação do potencial [48]. A divulgação mais ampla deste trabalho deu-se apenas após a morte prematura de Riemann, o que ajuda a explicar a indiferença geral em relação ao mesmo, no momento de sua aparição.

Já em Aberdeen, Maxwell decidiu concorrer ao *Prêmio Adams*, oferecido a cada dois anos pelo St. John’s College. O problema proposto para o período 1855-1857, cujas monografias seriam aceitas até dezembro de 1857, era o da estabilidade dos anéis de Saturno. Começando pela hipótese de que o anel era sólido, Maxwell admitiu que se tratava de uma distribuição não homogênea de matéria e provou que o mesmo somente seria estável se 4/5 de sua massa fosse concentrada em um ponto de sua circunferência, estando o resto da massa uniformemente distribuída, o que os telescópios não indicavam. Passou à hipótese do anel fluido, introduzindo perturbações ondulatórias para investigar se as mesmas estabilizavam o anel ou terminavam por desagregá-lo. Usando os métodos de Fourier concluiu que as perturbações inevitavelmente desagregariam o anel. Chegou, assim, à conclusão de que o anel de Saturno era feito de partículas de matéria sólida.

Considerou o anel como uma distribuição de partículas igualmente espaçadas, mostrando que podiam vibrar de quatro modos diferentes. Se a sua densidade média fosse pequena comparada a de Saturno, o sistema seria estável. Em 1858 Maxwell ganhou o *Prêmio Adams* com o ensaio “*Sobre a estabilidade do movimento dos anéis de Saturno*”, publicado no ano seguinte [49]. Fora o único a submeter uma monografia para concorrer ao prêmio. O astrônomo real George Airy considerou o trabalho “*uma das mais impressionantes aplicações da matemática à física que jamais vi*”. Maxwell era agora visto, entre os físicos britânicos, como alguém da estatura de um William Thomson ou Gabriel Stokes [50]. Ano auspicioso para Maxwell, também se casou com Katherine Mary Dewar. A lua de mel passaram em Glenlair. Não teriam filhos.

Em abril de 1859 Maxwell leu o artigo “*Sobre o comprimento dos caminhos médios descritos por moléculas isoladas de corpos gasosos na ocorrência de movimento molecular*” [51] de Rudolf Clausius (1822-1888), que o levou a explorar outro campo da física no qual se imortalizou: a teoria cinética dos gases. A questão central abordada por Clausius era a velocidade de difusão relativamente lenta de um gás, em oposição às velocidades muito elevadas que eram assumidas para suas moléculas. Clausius propôs que toda molécula sofria um grande número de colisões, de modo que seus movimentos estavam sempre mudando de direção e daí a velocidade relativamente lenta de difusão. Assumiu porém que a velocidade das moléculas a uma certa temperatura, entre cada duas colisões, era a mesma. Diferentemente, Maxwell assumiu que as velocidades obedeciam a uma certa distribuição estatística, admitindo que os componentes das velocidades eram estatisticamente independentes entre si. Em artigos publicados no ano seguinte [52, 53], apresentou pela primeira vez a distribuição das velocidades, das moléculas em um gás, que leva seu nome.

Em 1860 o Marischal College foi fundido ao King’s College de Aberdeen, ficando a única cadeira de filosofia natural ocupada por David Thomson, anteriormente ocupante da cadeira no King’s. Nesta mesma oportunidade, a cadeira de Filosofia Natural da Universidade de Edimburgo ficaria vaga por ocasião da aposentadoria de seu velho mentor Forbes. Maxwell candidatou-se à cadeira, sem sucesso, que acabaria ocupada pelo velho amigo Tait. Por fim, o King’s College de Londres não perdeu a oportunidade e ofereceu-lhe a cadeira de Filosofia Natural. Sua chegada a Londres também é marcada por provas de reconhecimento ao mérito, logo recebendo da Royal Society a Medalha Rumford e sendo eleito Fellow desta sociedade em 1861.

Em 1861 Maxwell retomou afinal suas investigações sobre as linhas de força de Faraday. A Parte I de *Sobre linhas de força físicas* apareceu no Philosophical Magazine, em março. A Parte II entre abril e maio. Tomando por inspiração o meio magnético permeado de vórtices que Thomson introduzira quatro anos antes [42], apre-

sentou o seu próprio “*mar de vórtices moleculares*” e, por intermédio deste, representou as leis que governam o campo magnético estático, sua conexão com a corrente e a indução eletromagnética. Segundo [54], há boas razões para se acreditar que Maxwell pretendia parar por aqui. No verão deixou Londres, indo com Katherine passar férias em Glenlair. Aí teve o “*insight*” de como incorporar também os fenômenos eletrostáticos ao seu mar de vórtices, dotando-o de elasticidade. Como não pretendia trabalhar nas férias não levou consigo bibliografia alguma, somente ocupando-se da generalização do modelo na volta à Londres. No início de 1862 publicou a Parte III de *Sobre linhas de força físicas*, no Philosophical Magazine de janeiro. Mostrou que a deformação elástica das células dos vórtices, origina uma série de deslocamentos no meio e, em consequência disto, outro tipo de corrente: a *corrente de deslocamento*. Além disso, sendo o mar de vórtices elástico ele poderia propagar distúrbios ondulatórios, surgindo assim a possibilidade de dar forma matemática à especulação que Faraday fizera em 1846 [1], sobre as vibrações das linhas de força serem identificadas com as radiações. Em 1846 Faraday não tinha uma velocidade à disposição. Agora, porém, graças à medida da razão entre unidades eletrodinâmica e eletrostática, conforme obtida por Weber e Kohlrausch em 1856, uma velocidade estava à disposição. A partir da conexão estabelecida entre a elasticidade dos vórtices e as leis da eletrostática, Maxwell pôde identificar a velocidade das ondas propagadas pelo “*mar de vórtices*” com a constante de Weber, assegurando que ondas transversais se propagavam virtualmente na mesma velocidade que a luz, cuja medida mais recente havia sido, então, obtida por Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819-1896) [55].

Maxwell estava ciente de que o teste mais imediato para sua teoria seria a descrição teórica do **efeito Faraday**. Em suas palavras

“*Temos agora que investigar se a hipótese desenvolvida neste artigo conduz à conclusões como a do efeito do magnetismo sobre a luz polarizada*”. ([27], p. 506)

Assim surgiu a Parte IV, publicada no Philosophical Magazine, de fevereiro de 1862. Efetivamente a possibilidade de descrever o fenômeno estava lá, mas, conforme Maxwell mostrou, a rotação do plano de polarização ocorria somente no sentido de rotação dos vórtices, isto é, com o eixo de rotação paralelo à direção do campo magnético. No entanto, já havia evidência àquela altura de substância em que a rotação era orientada anti-paralelamente ao campo magnético. Assim, o **efeito Faraday** se mantinha desafiador às teorias que pretendiam servir-lhe de base. Mesmo assim, seguindo Fresnel, admitiu que o quadrado do índice de refração do meio dependia da razão entre as densidades do meio e do éter livre e isso, no contexto de sua teoria, levava a uma dependência entre o quadrado do índice de refração e a permissividade elétrica do meio ($n^2 = \epsilon$).

A sugestão de que a virtual igualdade entre a constante de Weber [2] e a velocidade da luz (c) não era mera coincidência, fez com que a primeira ganhasse novo valor ontológico no âmbito teórico e, também, no campo experimental. Em 1868 o próprio Maxwell, com o auxílio de Charles Hockin [56] obteve o valor de $\nu = 2,88 \times 10^8 m/s$, abaixo do obtido por Weber, e mais abaixo ainda que o valor da velocidade da luz, por Fizeau. Após a morte de Maxwell, J.J.Thomson obteve em 1883 o valor [57] de $\nu = 2,963 \times 10^8 m/s$. Segundo Navarro [58], este foi o valor de maior concordância com a velocidade da luz até então obtido, sendo que $c = 2,998 \times 10^8 m/s$ era o valor então aceito para a velocidade da luz. Posteriormente [59] obteve $\nu = 2,995 \times 10^8 m/s$, em colaboração com George Searle, eliminando 1% de erro da medida de 1883. Em 1889, Edward Rosa [60] obteve valores para ν , entre $3,0004 \times 10^8 m/s$ e $2,9993 \times 10^8 m/s$. Em seu artigo Rosa nos apresenta uma relação das medidas até então realizadas, para a constante de Weber e para a velocidade da luz. William Thomson, que não foi propriamente entusiasta da *teoria eletromagnética da luz* de Maxwell, obtivera o valor $\nu = 3,004 \times 10^8 m/s$, naquele ano de 1889.

Na sequência de seus artigos eletromagnéticos Maxwell irá publicar, em 1865, “*Uma teoria dinâmica do campo eletromagnético*” [28], onde o mar de vórtices foi abandonado e no qual Maxwell renunciou a abordagem explicitamente mecanicista, buscando preservar as relações entre a variáveis de campo que permitiam descrever eletricidade magnetismo e luz a partir do mesmo conjunto de equações, insistindo assim em uma *teoria eletromagnética da luz*. Nisso ele se aproximou das concepções modernas da teoria do campo e se afastou - embora nunca o tenha feito explicitamente - da física do éter [61], que dominou o cenário na segunda metade do século XIX.

Maxwell se manteve produtivo e atuante por toda sua vida, com seus interesses associados à consolidação da teoria da ação eletromagnética contígua, ao estabelecimento de padrões eletromagnéticos, onde contribuiu particularmente para o estabelecimento da unidade de resistência, o *Ohm*. Também deu sequência às suas contribuições para a teoria cinética dos gases e à termodinâmica. Escreveu livros para estudantes como “*A teoria do calor*” (1871), onde aparece o “*demônio de Maxwell*”, e “*Matéria e Movimento*” (1877). A sua obra eletromagnética finalmente se tornou livro em 1873, com “*Um Tratado sobre eletricidade e magnetismo*” [62]. A primeira edição do “*Treatise*” fez uso da linguagem dos *quatérnions*, o que contribuiu para sua pouca difusão. Em 1871 foi nomeado Professor de Física Experimental, na Universidade de Cambridge, supervisionando a instalação daquele que veio a ser o *Laboratório Cavendish*, do qual Maxwell foi o primeiro “*Cavendish Professor*”.

Maxwell veio a falecer prematuramente, em 5 de novembro de 1879, em Cambridge, de um câncer abdominal diagnosticado um mês antes. Tinha 48 anos. Estava então preparando a segunda edição revisada do “*Treatise*” sem

o uso de quatérnions. Após uma cerimônia na capela do Trinity College, seu corpo foi levado para Glenlair e de lá para Parton onde está enterrado junto ao seu pai.

5. As tensões no mar de vórtices

Na Parte I de [27], “*Teoria dos vórtices moleculares aplicada aos fenômenos magnéticos*”, Maxwell conjecturou que uma linha de indução magnética é a expressão visível, através de limalhas de ferro, por exemplo, de um estado de tensão no meio que comunica a interação magnética. Em tal linha de tensão há uma tração longitudinal, como nos é indicado pela tendência de aproximação entre dois polos magnéticos opostos, os quais são terminações aparentes destas linhas. Simultaneamente é necessário que haja uma pressão no plano transversal à direção da linha, o que permite explicar a dificuldade experimentada ao se tentar concentrar linhas de indução magnética paralelamente umas às outras, em uma região do espaço. Tal diferença de pressão sobre o eixo e perpendicular a ele poderia então ser explicada pela presença de turbilhões do meio etéreo, cujo eixo de rotação coincide com a direção da linha de indução, em cada ponto. O meio constituinte do turbilhão produzia assim a força centrífuga (na realidade a inércia do próprio vórtice) que “repele” o vórtice adjacente. Assim, no modelo, a direção de indução magnética nada mais é que os eixos de rotação de turbilhões etéreos, um sucessivo ao outro; enquanto que sua intensidade uma medida da velocidade circunferencial de rotação do respectivo vórtice.

Dois vórtices adjacentes devem ter a liberdade de girar na mesma velocidade e sentido, no que constitui o campo uniforme. Para possibilitar isso, Maxwell introduziu rolamentos nos espaços intersticiais entre os vórtices. Diferenças entre as velocidades circunferenciais de dois vórtices adjacentes podem colocar os rolamentos em movimento de translação e a isso se associa o que chamamos corrente elétrica. A situação é ilustrada na Figura 1.

Se $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de um vórtice particular, l o seu raio característico, e ρ_m a densidade volumétrica da substância que o constitui, podemos associar tensões devidas ao movimento de rotação a partir do tensor

$$\frac{\rho_m}{2} l^2 \vec{\omega} \otimes \vec{\omega} .$$

Assim definido, $\rho_m l^2$ nada mais é que uma medida do momento de inércia característico do vórtice, por unidade de volume. No entanto, Maxwell não deseja se comprometer em estipular valor para l dizendo-nos apenas que o tamanho dos vórtices é muito pequeno se comparado ao tamanho das moléculas da matéria ordinária. Absorvendo-o na velocidade angular podemos então escrever a expressão anterior, alternativamente, como

$$\frac{\rho_m}{2} \vec{H} \otimes \vec{H} ,$$

em que

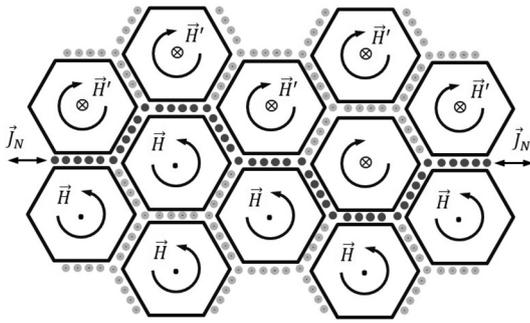


Figura 1: A microestrutura do éter livre é um mar de vórtices moleculares. Cada vórtice (ou turbilhão) é um equivalente mecânico do campo magnético naquele ponto, cujo sentido está indicado na figura pela rotação horária ou anti-horária. Na interface de separação entre turbilhões há uma camada de rolamentos interposta, os quais estão em contato perfeito sem deslizamento em relação às superfícies dos vórtices a eles adjacentes. Entre dois vórtices adjacentes que giram no mesmo sentido e com mesma velocidade, os rolamentos permanecem parados (representado na figura pelos rolamentos em tom mais claro), mas possibilitando que os dois vórtices girem no mesmo sentido. Na interface de separação entre turbilhões que giram em sentido oposto os rolamentos sofrem translação (representado pelos rolamentos em tom mais escuro) e isso constitui o equivalente mecânico de uma corrente elétrica induzida pela variação do campo magnético.

$$\vec{H} := v\hat{\omega} \quad , \quad [H] = LT^{-1} \quad , \quad (3)$$

é um vetor cuja intensidade v é a velocidade circunferencial do vórtice, orientado na direção do eixo de rotação, direção esta caracterizada pelo versor $\hat{\omega}$. O sentido de $\hat{\omega}$ é dado segundo a regra da mão direita, conforme o sentido de rotação do vórtice. Maxwell o chama de “força magnética”. No contexto do modelo, será o análogo cinemático do vetor **intensidade magnética**.

Admitiu então que a **permeabilidade magnética**, μ , por ele chamada “capacidade indutiva magnética”, é uma grandeza proporcional à densidade volumétrica do vórtice, isto é,

$$\rho_m = k\mu \quad , \quad [\rho_m] = ML^{-3} \quad , \quad (4)$$

e sem justificativa aparente fixa o valor de k como

$$k = \frac{1}{2\pi} \quad . \quad (5)$$

Deste modo,

$$\frac{\rho_m}{2} l^2 \vec{\omega} \otimes \vec{\omega} = \frac{\mu}{4\pi} \vec{H} \otimes \vec{H} \quad .$$

Isto posto, Maxwell introduziu o tensor, $\mathbf{T}^{(m)}$, das tensões produzidas pelo movimento turbilhonar dos vórtices, em sua *Proposição 2*, através de seus componentes cartesianos, como

$$T_{ij}^{(m)} = \frac{\mu}{4\pi} H_i H_j + p \delta_{ij} \quad , \quad [T] = ML^{-1}T^{-2} \quad , \quad (6)$$

sendo p a pressão isotrópica.

Com as tensões assim definidas ficam asseguradas tanto a tração longitudinal (na direção do eixo de rotação) quanto a pressão distinta no plano transversal ao eixo de rotação, características da linha de indução magnética. Trata-se da versão preliminar de um equivalente mecânico ao setor magnético do hoje chamado **tensor de tensões de Maxwell** [63-65].

Maxwell não nos informa se a constante (5) é adimensional ou não. Tomá-la como um número puro implica que μ é uma medida da densidade do meio etéreo, em conformidade com (4). Tomá-la, em vez disso, como uma medida de densidade; implica em que μ será o número puro. Por razões que ficarão explícitas nos desenvolvimentos que seguirem, irei tomar k^{-1} como uma medida de área. Isso significa que μ é, para mim, uma medida da densidade volumétrica de **momento de inércia** do vórtice. Assim,

$$[k] = L^{-2} \quad , \quad [\mu] = ML^{-1} \quad . \quad (7)$$

Como é sabido pela mecânica dos meios contínuos, a densidade volumétrica de força, \vec{f} , em um ponto do meio é dada por $\vec{f} = \nabla \cdot \mathbf{T}^{(m)}$. Esta é a *Proposição 3* de Maxwell. O cálculo direto mostra que tal divergência pode ser escrita, em notação vetorial, como a soma de três termos, a saber:

$$\vec{f} = \left(\frac{\nabla \cdot \vec{B}}{4\pi} \right) \vec{H} + \nabla \left(\mu \frac{H^2}{8\pi} \right) + \left(\frac{\nabla \times \vec{H}}{4\pi} \right) \times \vec{B} + \nabla p \quad ,$$

em que introduzimos a abreviação

$$\vec{B} := \mu \vec{H} \quad , \quad [\vec{B}] = MT^{-1} \quad . \quad (8)$$

Ao vetor \vec{B} chamou “indução magnética”. Ainda, na estrutura formal de \vec{f} encontrou a motivação necessária para definir a densidade de “matéria magnética imaginária”

$$\rho_p := \frac{k}{2} \nabla \cdot \vec{B} = \frac{\nabla \cdot \vec{B}}{4\pi} \quad , \quad (9)$$

e a “intensidade de corrente elétrica por unidade de área”.

$$\vec{J} := \frac{k}{2} \nabla \times \vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{4\pi} \quad , \quad . \quad (10)$$

Temos assim definições para os equivalentes mecânicos do que chamaríamos de **densidade de monopolo magnético** e **densidade de corrente**, respectivamente. Dado que k é, conforme (7), uma constante dimensional, então

$$[\rho_p] = ML^{-3}T^{-1} \quad , \quad [\vec{J}] = L^{-2}T^{-1} \quad . \quad (11)$$

De (9) vê-se surgir a **lei de Gauss** do magnetismo

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (12)$$

dado o fato experimental de que $\rho_p = 0$. No presente contexto, entretanto, tal equação nos informa que matéria dos vórtices permanece confinada no interior dos mesmos; tendo-se em mente que \vec{B} é uma vazão mássica, conforme (8). Em (10) temos o equivalente mecânico da **lei de Ampère**, para correntes estacionárias. Note-se porém que, conforme (11), nada que possua dimensão física flui nesta “densidade de corrente”.

De tais definições resulta então que a força por unidade de volume, em um ponto do meio, é

$$\vec{f} = \rho_p \vec{H} + \nabla \left(\mu \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) + \vec{J} \times \vec{B} + \nabla p, \quad (13)$$

O termo $\rho_p \vec{H}$ (14)

é a força magnética sobre um monopolo magnético de volume unitário, caso monopolo houvesse.

O termo $\nabla \left(\mu \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right)$, (15)

é a densidade volumétrica de força sobre um corpo de permeabilidade μ , que uma vez imerso no mar de vórtices e aí abandonado, mover-se-á na direção em que há variação de \vec{H} ; como o empuxo hidrostático.

O termo $\vec{F}_m = \vec{J} \times \vec{B}$, (16)

é a densidade volumétrica de força que \vec{B} exerce sobre o elemento de corrente.

Isto encerra as definições introduzidas na Parte I e, na sequência, Maxwell segue fazendo aplicações de como se pode, a partir de tais relações matemáticas, introduzir um potencial escalar, ψ , obtendo \vec{H} a partir deste. Exibe a solução do campo no entorno de um monopolo magnético hipotético m , bem como no entorno de um fio de corrente estacionária I , bem como a força magnética exercida por este fio sobre um elemento de corrente paralelo a ele, como decorrência de (16). Não me deterei nisso, haja visto que meu intuito aqui é o de analisar a gênese das leis, elas próprias, e sua fundamentação mecânica.

6. A corrente e os rolamentos

Na Parte II de [27], “*Teoria dos Vórtices moleculares aplicada às correntes elétricas*”, Maxwell irá nos mostrar que a corrente introduzida em (10) é uma medida da translação dos rolamentos presentes nos espaços intersticiais dos vórtices. Para isso considerou que a velocidade, \vec{v}_p , de um rolamento, é transmitida a ele por um contato perfeito, sem deslizamento, e é a média aritmética das velocidades circunferenciais, \vec{v} e \vec{v}' dos dois vórtices adjacentes a ele:

$$\vec{v}_p = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{v}'). \quad (17)$$

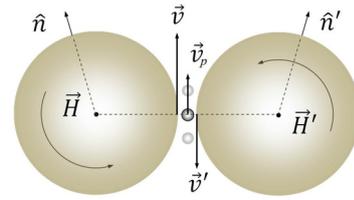


Figura 2: A velocidade \vec{v}_p de um rolamento particular resulta, por contato, da média das velocidades \vec{v} e \vec{v}' dos vórtices a ele adjacentes.

Por construção as velocidades circunferenciais expressam o próprio vetor \vec{H} , através das relações

$$\vec{v} = \vec{H} \times \hat{n}, \quad \vec{H} = \hat{n} \times \vec{v}, \quad (18)$$

em que \hat{n} é o vetor normal à célula de um vórtice particular, orientado para fora da mesma. Tendo-se em mente que devemos usar que $\hat{n}' = -\hat{n}$, para um mesmo ponto no interstício dos dois vórtices adjacentes, disso resulta o que se queria estabelecer na *Proposição 4*:

$$\vec{v}_p = \frac{\hat{n}'}{2} \times (\vec{H} - \vec{H}'). \quad (19)$$

Na *Proposição 5* Maxwell define o número de rolamentos deslocados, por unidade de tempo, por unidade de área, \vec{J}_N , através da relação

$$\vec{J}_N = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_S N \vec{v}_p dS}{V} \right), \quad (20)$$

sendo S a superfície fechada que encerra a região considerada, V o volume delimitado por S , e N o número de rolamentos por unidade de área ($[N] = L^{-2}$), o qual se assume constante. Realizando o cálculo da integral de superfície, em (20), sobre a superfície de uma célula, isto é, um vórtice individual, de volume V'_{cel} , virá

$$\oint_{cel} N \vec{v}_p \delta S' = \frac{N}{2} \oint_{cel} \hat{n}' \times (\vec{H} - \vec{H}') \delta S',$$

em que usamos (19). Mas

$$\oint_{cel} \hat{n}' \times \vec{H}' \delta S' = \left(\oint_{cel} \hat{n}' \delta S' \right) \times \vec{H}' = 0,$$

em que usamos o fato de que, por simetria,

$$\oint_{cel} \hat{n}' \delta S' = 0.$$

Assim

$$\oint_{cel} N \vec{v}_p \delta S' = \frac{N}{2} \oint_{cel} \hat{n}' \times \vec{H} \delta S',$$

e então, de (20),

$$\vec{J}_N = \frac{N}{2} \lim_{V'_{cel} \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_{cel} \hat{n}' \times \vec{H} \delta S'}{V'_{cel}} \right).$$

Reconhecemos tal limite como a definição do rotacional de \vec{H} . Assim resulta, finalmente, que

$$\vec{J}_N = \frac{N}{2} \nabla \times \vec{H}. \tag{21}$$

Se então identificarmos

$$N = k = \frac{1}{2\pi}, \tag{22}$$

virá que

$$\vec{J}_N = \vec{J}, \tag{23}$$

em consonância com (10).

Maxwell conclui assim que a densidade de corrente \vec{J} , definida em (10), é uma medida no número de partículas (de rolamentos), por unidade de tempo, por unidade de área, movendo-se nos interstícios dos vórtices. Note-se que \vec{J} , assim entendida, não descreve um fluxo de cargas, nem tampouco um fluxo de momento de tais partículas, mas um fluxo de número de partículas

$$[\vec{J}_N] = [\vec{J}] = L^{-2} T^{-1}. \tag{24}$$

7. Energia magnética e lei de Faraday

Na *Proposição 6* Maxwell estabelece qual é a energia cinética contida em uma porção do meio, devido ao movimento turbilhonar dos vórtices. A energia contida em um vórtice individual de volume V_{cel} , é

$$U_{cel}^m = \frac{\mu}{8\pi} \vec{H}^2 V_{cel}, \tag{25}$$

o que é consistente com o termo sob o gradiente em (13).

Passando ao limite do contínuo virá que a energia cinética total contida em um volume V do meio, o qual possui uma infinidade de vórtices infinitamente pequenos será

$$U_m = \int_V \left(\frac{\mu}{8\pi} \vec{H}^2 \right) dV. \tag{26}$$

Ainda

$$u_m = \frac{\mu}{8\pi} \vec{H}^2, \tag{27}$$

é a densidade volumétrica de energia cinética. As duas últimas grandezas são, portanto, os correspondentes da **energia magnética**, em V , e a **densidade de energia magnética**, no ponto em questão.

Maxwell não introduziu em parte alguma de [27] um **campo elétrico**. Em vez disso definiu a força por unidade de rolamento, a qual chamou de “força eletromotriz”. Uma grandeza vetorial, diferentemente do significado do termo ainda em uso. Tendo-se em conta que há rolamentos em toda extensão do espaço, tal “força eletromotriz” pode também manifestar-se em qualquer ponto do espaço, constituindo-se num campo. É o mais próximo

daquilo que poderíamos tomar por análogo mecânico de um campo elétrico. Podemos então denotá-la por \vec{E} , $[\vec{E}] = M L T^{-2}$, e assim o farei.

Nas *Proposições 7 e 8* discuti como a ação tangencial dos rolamentos, sobre os vórtices, se relaciona à variação do movimento turbilhonar. O vetor tensão, \vec{t} , na superfície do vórtice, pode sempre ser decomposto em suas partes perpendicular, \vec{t}_\perp , e tangencial, \vec{t}_\parallel , à superfície. Se \hat{n} é o vetor normal à superfície, no ponto considerado, orientado para fora dela, então

$$\vec{t}_\perp := (\vec{t} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad \vec{t}_\parallel := \hat{n} \times (\vec{t} \times \hat{n}). \tag{28}$$

Sendo a ação de \vec{t}_\perp normal à célula, esta desempenha o papel de alterar as condições de pressão no interior da mesma, e assim, para todas as células, alterar a pressão hidrostática em cada ponto do mar de vórtices. Não é ela que está em questão no momento. A tensão de cisalhamento, \vec{t}_\parallel , por sua vez, é aquela que altera o movimento circular da substância do turbilhão.

Um rolamento particular está em contato com a superfície dos dois vórtices a ele adjacentes. Por contato, ele comunica a força eletromotriz \vec{E} , por ele sofrida, a ambos os vórtices. Mas, somente o componente tangencial de \vec{E} ,

$$\vec{E}_\parallel = \hat{n} \times (\vec{E} \times \hat{n}),$$

é responsável pela motricidade do rolamento, conforme ilustrado na Figura 3. Sua ação tangencial é comunicada aos dois vórtices adjacentes, meio a meio. Assim, se N é o número destes rolamentos por unidade de área, podemos dizer que a tensão de cisalhamento em um dos vórtices é, por reação,

$$\vec{t}_\parallel = -\frac{N}{2} \hat{n} \times (\vec{E} \times \hat{n}). \tag{29}$$

A perda de energia através do elemento de área δS , do vórtice, onde a velocidade circular é \vec{v} , deve então ser igual à potência transferida aos rolamentos, pela tensão de cisalhamento, no que resulta

$$\delta P_E = \vec{t}_\parallel \cdot \vec{v} \delta S = \frac{N}{2} (\vec{E} \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times \vec{v}) \delta S.$$

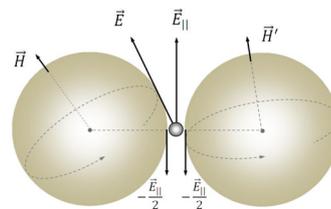


Figura 3: Um rolamento individual está sob ação da força eletromotriz \vec{E} . Por contato ele comunica sua ação aos dois vórtices a ele adjacentes. A reação ao componente tangencial \vec{E}_\parallel se divide igualmente pelos dois vórtices adjacentes. Há, no entanto, N rolamentos nesta situação em cada área unitária.

Usando (18) resultará que

$$\delta P_E = -\frac{N}{2} (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} \delta S, \quad (30)$$

e a perda total de energia na célula completa (o vórtice) é então

$$P_{cel}^E = -\frac{N}{2} \left(\oint_{cel} (\vec{n} \times \vec{E}) \delta S \right) \cdot \vec{H}.$$

Reconhecendo o rotacional de \vec{E} na integral entre parênteses,

$$\oint_{cel} \hat{n} \times \vec{E} \delta S = (\nabla \times \vec{E}) V_{cel},$$

em que V_{cel} é o volume do vórtice individual, virá

$$P_{cel}^E = -\frac{N}{2} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} V_{cel}. \quad (31)$$

Esta potência é a variação da energia neste vórtice,

$$P_{cel}^E = \frac{\partial u_m}{\partial t} V_{cel}, \quad (32)$$

o que, tomando-se (27), fornece

$$-\frac{N}{2} \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(\mu \vec{H})}{\partial t}.$$

Usando (8) e (22) vem então que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (33)$$

Eis, assim, o equivalente mecânico da **Lei de Faraday**, em sua forma diferencial. Ela é expressão do balanço de energia que se estabelece entre a ação dos rolamentos sobre o vórtice e a conseqüente perda (ou ganho) de energia de movimento por este.

Na seqüência Maxwell apelou ao teorema, demonstrado àquela altura por Stokes [66], segundo o qual todo campo que satisfaz (12) admite ser escrito a partir de outro campo auxiliar, \vec{A} , na forma

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (34)$$

Da substituição de (34) em (33), resulta que a força eletromotriz induzida pode ser escrita como

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (35)$$

Embora a estrutura lógico dedutiva que acompanha sua argumentação desde (33) até (35) seja, essencialmente, a mesma que encontramos nos textos didáticos atuais, vale notar aqui que a equação (35) é a própria lei de Newton, isto é, força (\vec{E}) é igual à variação do momento ($-\vec{A}$), no tempo. De fato, no presente contexto, \vec{A} nada mais

é que uma medida do momento linear interno do vórtice, pois conforme (8) e (34),

$$[\vec{A}] = M L T^{-1}.$$

Posteriormente Maxwell chamará o vetor \vec{A} de “*momento eletromagnético*” [28]. Como já foi dito, não era a primeira vez que o equivalente mecânico do **potencial vetor magnético** fazia sua aparição nos escritos de Maxwell, o que ocorrera antes em [26].

Outra nota relevante é a seguinte: o caráter cíclico do produto misto no permite escrever (30) igualmente como

$$\delta P_E = -\frac{N}{2} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{n} \delta S,$$

o que nos permite introduzir o equivalente mecânico do **vetor de Poynting**

$$\vec{S} := \frac{N}{2} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{\mu}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B},$$

medida do fluxo de energia no campo. Curioso notar, entretanto, que Maxwell não o fez. Mais ainda tendo-se em conta o fato de que sua análise se baseava em considerações de balanço de energia no meio. O atual **vetor de Poynting** e seu correlato **teorema de Poynting** ([63], p.240) somente sugerirá após a morte de Maxwell, em trabalhos de Poynting [67] e, independentemente, de Heaviside [68].

8. Força eletromotriz de movimento

Concluindo a Parte II, Maxwell estabeleceu a expressão da “*força eletromotriz em um corpo em movimento*”. A verdade, porém, é que ele considera o problema de se determinar a força eletromotriz em um sistema de referência no qual o mar de vórtices se move. Para isso assume que o escoamento é incompressível, isto é,

$$\frac{1}{V_{cel}} \frac{dV_{cel}}{dt} = \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (36)$$

em que d/dt é a derivada substancial de um vórtice individual qualquer e $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ sua velocidade, no referencial de laboratório. Como o vórtice agora se move, o balanço de energia é expresso por

$$P_{cel}^E + P_{cel}^f = \frac{dU_{cel}^m}{dt}, \quad (37)$$

em vez de (32). Na equação acima dU_{cel}^m/dt é a derivada substancial da energia cinética do vórtice individual e P_{cel}^f é a potência associada ao trabalho realizado pelo vetor tensão, devido a mudança de forma da superfície do vórtice. O volume, como já foi dito em (36) é preservando. Passemos ao cálculo de P_{cel}^f .

Como se vê na Figura 4, os descolamentos dos pontos substanciais, oo' e pp' , do vórtice podem ser descritos como

$$d\vec{r}(o) = \vec{u}(o) \delta t, \quad d\vec{r}(\hat{n}) = \vec{u}(p) \delta t.$$

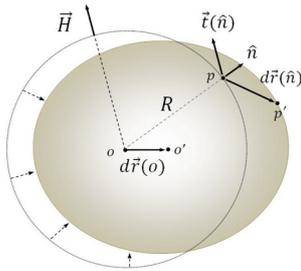


Figura 4: Um vórtice individual deforma-se de uma célula esférica em outra oval, preservando o volume. Cada parte tem um deslocamento diferencial distinto, sendo $d\vec{r}(o)$ o deslocamento do ponto substancial central o e $d\vec{r}(\hat{n})$ o deslocamento do ponto substancial p , na superfície do vórtice.

Expandindo-se $\vec{u}(p)$ em torno de $\vec{u}(o)$, pode-se então escrever que

$$d\vec{r}(\hat{n}) = [\vec{u}(o) + R(\hat{n} \cdot \nabla)\vec{u}(o)]\delta t, \tag{38}$$

sendo que R é o raio original do vórtice esférico.

O vetor tensão, $\vec{t}(\hat{n})$, definido no ponto da superfície do vórtice cuja normal é \hat{n} , e associado ao tensor de tensões $\mathbf{T}^{(m)}$, é definido como usualmente

$$\vec{t}(\hat{n}) := \hat{n} \cdot \mathbf{T}^{(m)}. \tag{39}$$

O trabalho total realizado pelo vetor tensão, $\vec{t}(\hat{n})$, ao deformar-se a superfície do vórtice é então

$$\delta W_{cel}^f = \oint_{cel} \vec{t}(\hat{n}) \cdot d\vec{r}(\hat{n}) \delta S.$$

Substituindo a expressão (38) para $d\vec{r}$, o termo em $\vec{u}(o)$ não contribui para o trabalho, haja visto que ele, individualmente, corresponde à translação rígida do vórtice como um todo, o que não altera o equilíbrio da tensão na superfície. Assim, o termo seguinte é aquele que nos interessa. Como resultado virá que

$$\delta W_{cel}^f = R \oint_{cel} \vec{t}(\hat{n}) \cdot [(\hat{n} \cdot \nabla)\vec{u}(o)] \delta t \delta S. \tag{40}$$

De acordo com (6) e (8) a tensão associada ao movimento do vórtice é

$$\vec{t}(\hat{n}) = \frac{1}{4\pi} \vec{H}(\vec{B} \cdot \hat{n}), \tag{41}$$

o que, substituído em (40), fornecerá, em notação indicial,

$$\delta W_{cel}^f = \frac{1}{4\pi} R H_j B_i \left. \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right|_o \delta t \left(\oint_{cel} n^i n^k \delta S \right).$$

Fazendo uso da identidade,

$$\oint_S n^i n^k \delta S = \frac{4\pi}{3} R^2 \delta^{ik},$$

virá então que, no limite em que δt tende a zero,

$$P_{cel}^f = \frac{dW_{cel}^f}{dt} = \frac{1}{4\pi} H_j B^k \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right).$$

Notando que o termo entre parênteses é o volume do vórtice, V_{cel} , virá finalmente, em notação vetorial,

$$P_{cel}^f = \frac{1}{4\pi} \vec{H} \cdot [(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u}] V_{cel}. \tag{42}$$

Substituindo-se então (25), (31) e (42) em (37), e tendo-se (8) e (22) em mente, resulta que

$$\nabla \times \vec{E} - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \tag{43}$$

Ainda, como a derivada total substancial de \vec{B} , no vórtice individual, é

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

resultará que (43) pode ainda ser escrita como

$$\nabla \times \vec{E} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Uma vez que (12) e (36) se cumprem, será também válida a identidade vetorial

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B} - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}),$$

que então substituída na equação anterior fornece

$$\nabla \times (\vec{E} - \vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{44}$$

Eis, assim, o equivalente mecânico da **lei de Faraday**, na forma diferencial, em um sistema de referência no qual o mar de vórtices está em movimento, sendo \vec{u} a velocidade.

Para obter a força eletromotriz de movimento, usamos (34) no termo à direita da equação anterior e colecionamos todos os termos sob o signo do rotacional. Virá que

$$\nabla \times \left(\vec{E} - \vec{u} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{45}$$

Seguindo aqui os mesmos passos de Maxwell, temos que a nulidade de (45) nos assegura que a expressão entre parênteses é o gradiente de um campo escalar. Designando-o por ϕ , a quem ele chamou de “*tensão elétrica em cada ponto do espaço*”, virá

$$\vec{E} - \vec{u} \times \vec{B} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi,$$

ou

$$\vec{E} = \vec{u} \times \vec{B} - \nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{46}$$

que é o resultado o qual Maxwell se propôs a obter em sua *Proposição 11*.

Convém fazer uma observação aqui. No contexto do eletromagnetismo clássico, tal como entendido atualmente, apenas

$$\vec{E}' = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

é identificado como definição do **campo elétrico**, em termos do **potencial escalar** (ϕ) e do **potencial vetor** (\vec{A}). O termo

$$\vec{u} \times \vec{B},$$

em vez disso, é aquele que gera a **força eletromotriz de movimento**, isto é, aquela que surge ao movermos, por exemplo, um condutor na presença do campo magnético \vec{B} . Não há, porém, inconsistência aqui. O que Maxwell definiu por “força eletromotriz” (que optei chamar de \vec{E}) engloba, no contexto do mar de vórtices, tanto o equivalente mecânico do **campo elétrico** (\vec{E}'), quanto a força eletromotriz de movimento ($\vec{u} \times \vec{B}$). Maxwell, porém, tampouco destaca a quantidade que acima chamei de \vec{E}' , dando-lhe algum destaque especial, sendo ela simplesmente uma parte da “força eletromotriz” conforme (46).

9. Energia eletrostática e a lei de Ampère-Maxwell

Por fim, na Parte III de [27], “Teoria dos vórtices moleculares aplicada à eletricidade estática”, Maxwell atribuiu elasticidade à substância constituinte dos vórtices. O argumento se inicia pela introdução da equação constitutiva

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{2}{N} \vec{D} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \vec{D}, \quad (47)$$

em que fizemos uso de (22) na expressão final.

Na equação acima \vec{E} é, como antes, a *força eletromotriz* a qual o vórtice está submetido, pela ação dos rolamentos circunvizinhos sobre ele. O vetor \vec{D} , o qual ele chama “deslocamento elétrico”, que definirá adiante, é uma medida da deformação elástica média sobre o vórtice individual. A palavra “deslocamento” tem aqui um sentido literal. é uma medida do quanto os elementos substanciais do vórtice estão deslocados das posições que ocupam quando o vórtice não está deformado. O parâmetro ε^{-1} está, por sua vez, ligado à constante elástica do meio, de modo que a equação constitutiva (47) é a expressão da própria lei de Hooke aplicada ao vórtice individual. O parâmetro ε é aqui, evidentemente, o correspondente elástico da **permissividade elétrica**. No limite em que o mar de vórtices é um *continuum*, sendo os vórtices individuais infinitamente pequenos, a equação (47) torna-se uma relação local entre o valor de \vec{E} em um dado ponto e o valor de \vec{D} no mesmo ponto.

Na escala em que os vórtices são finitos, porém, Maxwell supõe que a substância dos mesmos é um meio elástico linear e isotrópico, usual, cujo tensor de tensões, $\mathbf{T}^{(e)}$, é dado pela lei de Hooke [69, 70]. Seus componentes cartesianos são

$$T_{ij}^{(e)} = 2n e_{ij} + \left(\kappa - \frac{2}{3}n \right) \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{e}, \quad (48)$$

em que

$$e_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} + \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right),$$

são os componentes cartesianos do tensor deformação elástica e $\{e_i, i = 1, 2, 3\}$ os componentes cartesianos do vetor deformação elástica, \vec{e} . Ainda, (n, κ) são as constantes elásticas designadas por Maxwell como “coeficiente de rigidez” e “coeficiente de elasticidade cúbico”, isto é, o **módulo de rigidez** e o **módulo de incompressibilidade**, respectivamente. Dimensionalmente temos que

$$[n] = [\kappa] = [T] = M L^{-1} T^{-2}.$$

Sabemos da teoria da elasticidade que, no equilíbrio, em uma porção finita V do meio deformado, o qual é delimitado pela superfície fechada S , a energia elástica pode ser escrita como

$$U_e = \frac{1}{2} \oint_S \vec{e} \cdot \vec{t}_e(\hat{n}) dS. \quad (49)$$

Na equação acima, \vec{e} é o vetor deformação e

$$\vec{t}_e(\hat{n}) := \hat{n} \cdot \mathbf{T}^{(e)}, \quad (50)$$

é o **vetor tensão** elástica, definido sobre S , calculado a partir do tensor de tensões (48).

O vetor tensão pode ser decomposto em suas partes normal e tangencial à superfície do vórtice, como em (28). Novamente, a parte tangencial de $\vec{t}(\hat{n})$ será uma reação à parte tangencial da “força eletromotriz” atuante sobre os rolamentos, a qual é dividida entre dois vórtices adjacentes igualmente. Assim, a *tensão de cisalhamento* elástica, a qual a substância do vórtice está submetida, é dada, como em (29), por

$$\vec{t}_{e\parallel}(\hat{n}) = -\frac{N}{2} \hat{n} \times (\vec{E} \times \hat{n}). \quad (51)$$

Maxwell assume que \vec{E} é constante no domínio do vórtice. Assim, a energia elástica da célula individual, conforme (49) e (51), será então

$$U_{cel}^e = -\frac{1}{2} \oint_{cel} \vec{e} \cdot \vec{t}_{e\parallel}(\hat{n}) \delta S = -\frac{1}{2} \oint_{cel} \vec{e}_{\parallel} \cdot \frac{N\vec{E}}{2} \delta S,$$

ou

$$U_{cel}^e = -\frac{\vec{E}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \oint_{cel} N \vec{e}_{\parallel} \delta S \right),$$

em que

$$\vec{e}_{\parallel} = \hat{n} \times (\vec{e} \times \hat{n}),$$

é a parte do vetor deformação tangencial à superfície.

Da expressão para U_{cel}^e encontramos a motivação necessária para uma definição de \vec{D} . Seguindo Maxwell o valor do “deslocamento elétrico”, associado ao vórtice individual de volume V_{cel} , é

$$\vec{D} := \frac{1}{2} \left(\frac{\oint_{cel} N \vec{e}_{||} \delta S}{V_{cel}} \right). \tag{52}$$

Com \vec{D} assim definido, a energia elástica do vórtice individual é

$$U_{cel}^e = -\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} V_{cel}.$$

No limite em que o mar de vórtices é um *continuum*, poderemos definir a densidade de energia elástica, u_e , em um dado ponto do meio, como a quantidade

$$u_e := -\frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}. \tag{53}$$

A energia elástica em uma porção finita V do meio, a qual contém uma infinidade de vórtices, será então

$$U_e = -\frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \tag{54}$$

Usando (22) e (47), podemos escrever (53) e (54), num paralelo formal com setor de movimento turbilhonar, (26) e (27), como

$$U_e = \int_V \left(\frac{\varepsilon}{8\pi} \vec{E}^2 \right) dV, \tag{55}$$

e

$$u_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \vec{E}^2. \tag{56}$$

São os equivalentes mecânicos da **energia eletrostática**, em um domínio V do campo, e da **densidade de energia eletrostática**, respectivamente.

Na *Proposição 12* Maxwell investigou as condições de equilíbrio de uma célula elástica esférica, a qual está submetida à ação externa, \vec{E} , constante em todos os pontos de sua superfície. A direção de \vec{E} constitui, assim, um eixo de simetria do problema. Assumindo, então, um campo de deformação elástica, no interior da esfera, da forma

$$\vec{e}(\vec{r}) = \alpha \vec{E} + b(\vec{E} \cdot \vec{r}) \vec{r} + c(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{E},$$

em que $\alpha \vec{E}$ é o vetor deformação no centro da esfera e (α, a, b) constantes arbitrárias, exige que o mesmo seja puramente tangencial sobre a superfície. Assim, se R é o raio da esfera e $\hat{r} = \hat{n}$ o vetor normal, a condição de contorno para \vec{e} é

$$\vec{e}_\perp|_{r=R} = (\vec{e} \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n}|_{r=R} = 0, \tag{57}$$

o que fixa a constante $\alpha = -(a+b)R^2$. Assim, o campo

$$\vec{e}(\vec{r}) = a(\vec{E} \cdot \vec{r}) \vec{r} + [b(\vec{r} \cdot \vec{r} - R^2) - aR^2] \vec{E}, \tag{58}$$

em que (a, b) são constantes a serem determinadas, tem a generalidade necessária e suficiente para obtenção de

uma solução não trivial, para \vec{e} , que satisfaça a condição de equilíbrio da célula, a saber,

$$\oint_{cel} \vec{t}_e(\hat{n}) dS = \vec{0}. \tag{59}$$

Devido ao vínculo (51) podemos assegurar que

$$\oint_{cel} \vec{t}_{e||} dS = -\frac{4\pi}{3} R^2 \frac{N}{2} \vec{E}. \tag{60}$$

Consequentemente,

$$\oint_{cel} \vec{t}_{e\perp} dS = \frac{4\pi}{3} R^2 \frac{N}{2} \vec{E}, \tag{61}$$

estando, assim, o equilíbrio (59) assegurado.

Deve-se então tomar o campo de deformações (58) e com ele calcular o tensor (48). A partir do resultado obtém-se então o vetor tensão (50) sobre a superfície do vórtice. Impondo-se os vínculos (60) e (61) sobre este último, as constantes (a, b) estarão fixadas e seus valores são

$$a = \frac{1}{3Rn} \left(1 + \frac{10n}{3\kappa} \right) \frac{N}{2}, \quad b = \frac{1}{3R\kappa} \frac{N}{2}, \tag{62}$$

estabelecendo o campo de deformações (58) de forma unívoca. Na Figura 5 são exibidas as configurações dos campos \vec{E} , \vec{t} e \vec{e} , no entorno e no interior do vórtice, de forma qualitativa.

Na *Proposição 13* estabeleceu, então, a relação entre ε , em (47), e as constantes elásticas (κ, n) da substância do vórtice. Da substituição de (58) em (52), tendo-se em conta que (a, b) estão fixados por (62), virá que

$$\varepsilon = \frac{N}{3n} \left(1 + \frac{10n}{3\kappa} \right). \tag{63}$$

Se o meio for infinitamente mais rígido sob compressão do que sob distorção, virá que

$$\frac{n}{\kappa} \rightarrow 0 \implies \varepsilon = \frac{N}{3n}. \tag{64}$$

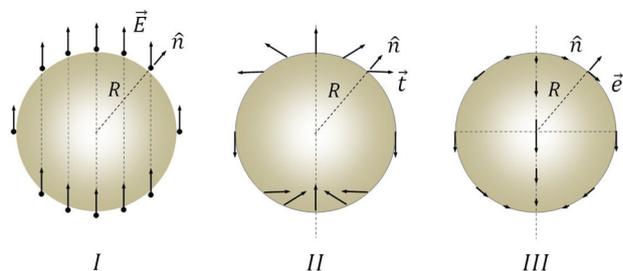


Figura 5: Em I vê-se os rolamentos sob ação da força eletromotriz constante \vec{E} a qual é, por eles, comunicada ao vórtice. Em II a representação qualitativa da distribuição da tensão sobre a superfície do vórtice. Em III a representação qualitativa do campo de deformação \vec{e} no vórtice, o qual é tangente à superfície, em todos os pontos desta.

Se for um sólido “perfeito”, isto é, um sólido de Navier-Poisson, então

$$\frac{n}{\kappa} = \frac{3}{5} \implies \varepsilon = \frac{N}{n}. \quad (65)$$

Sem maiores justificativas físicas Maxwell julga provável que a incompressibilidade do meio seja consistente com (65).

Chegamos assim ao ponto em que será necessária uma correção à definição de densidade de corrente (10). Maxwell nos diz que os deslocamentos estáticos dos rolamentos, ocasionados pelas deformações elásticas dos vórtices, a eles adjacentes, não constituem uma corrente. Já o início ou o seu término de uma deformação elástica comunicará movimento aos rolamentos. A contínua deformação elástica da célula no tempo também. Vemos assim surgir na *Proposição 14* a “corrente de deslocamento”, $\partial \vec{D}/\partial t$. Tem-se então, em vez de (10), uma nova definição de densidade de corrente

$$\vec{J} := \frac{k}{2} \nabla \times \vec{H} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (66)$$

Escrita, alternativamente, em termos da “força eletromotriz”, dada em (47), relação será

$$\vec{J} := \frac{k}{2} \nabla \times \vec{H} - \varepsilon \frac{N}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

ou ainda, por (22),

$$\vec{J} := \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (67)$$

Temos assim o equivalente mecânico da **lei de Ampère-Maxwell**.

Neste ponto Maxwell introduz também a “quantidade de eletricidade livre”, ρ . Para defini-la impõe que esta é a quantidade que juntamente com \vec{J} , definida em (66), deve satisfazer a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (68)$$

Tomando-se a divergência em (66), por manipulações matemáticas idênticas às que ainda encontramos nos livros didáticos atuais, encontramos que ρ deve ser definida como

$$\rho := -\nabla \cdot \vec{D}, \quad [\rho] = L^{-3}. \quad (69)$$

Esta é a condição de consistência entre as duas equações (66) e (68) anteriores. Por (47) e (22) pode-se igualmente escrevê-la para a “força eletromotriz” como

$$\frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{\nabla \cdot \vec{E}}{4\pi}. \quad (70)$$

Surge assim o equivalente mecânico da **lei de Gauss** da eletrostática.

O leitor deve notar que ρ , assim definido, é uma medida do número de rolamentos fora de suas posições

correspondentes aos vórtices não deformados, por unidade de volume. É, portanto, uma densidade de número. A “carga elétrica” não é aqui uma **propriedade** fundamental da matéria. Em vez disso, é uma **condição** do meio etéreo. É uma proposição do significado da carga elétrica que busca aproximar-se de uma visão faradiana de eletricidade.

Note-se também que há em (69) uma inversão de sinal, em relação à versão da mesma lei encontrada em textos didáticos atuais. Isto poderia ser corrigido simplesmente redefinindo \vec{D} como $-\vec{D}$. Maxwell não o fez e julguei inconveniente fazê-lo aqui pois, no presente modelo, o deslocamento elétrico tem sinal contrário à \vec{E} por uma razão física. A equação constitutiva (47) é expressão da lei de Hooke e, dela, o sinal é parte essencial.

Na *Proposição 15* calculou então “a força atuante entre corpos eletrificados”, entendida como uma força devida à deformação elástica no meio. Trata-se, é claro, de se obter a lei de Coulomb a partir da variação da energia elástica (54), quando existem apenas dois centros de deformação elástica fixos, no meio, aos quais associaremos as cargas dq e dq' . Inicia seu argumento advertindo-nos de que em tais circunstâncias “não há movimento dos corpos ou alteração das forças”, e que, por (46),

$$\vec{E} = -\nabla \phi. \quad (71)$$

O procedimento matemático que se segue é o mesmo presente nos textos didáticos atuais, quando calculamos a força coulombiana entre duas cargas a partir da variação da energia de interação entre elas. Digno de nota é que, no presente contexto, daí resulta para a “força de repulsão”, entre dq e dq' ,

$$dF = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{dq dq'}{r^2}. \quad (72)$$

O termo “repulsão”, aqui, pode parecer inusitado. Mas o sinal negativo não provém de uma *convenção de sinal* diferente daquela atualmente em uso. Resulta, novamente, do sinal relativo entre o vetor deslocamento e a “força eletromotriz”. Se dq e dq' tem mesmo sinal, a energia do meio (54) é negativa, ou seja, é compressional. Significa que, em tal condição, os vórtices ocupantes do espaço, no entorno dos dois centros de deformação, encontram-se comprimidos. O meio assim tende à descompressão, empurrando dq e dq' com forças iguais e contrárias, afastando-as. Dado que o meio não é diretamente observável, todo o processo terá a aparência de uma repulsão à distância entre dq e dq' .

10. Unidades e a constante de Weber

Na sequência Maxwell relacionou as constantes (μ, ε) às medidas eletrodinâmicas então estabelecidas, visando fixar seus valores quantitativamente; o que o levou a considerar a constante de Weber.

Antes de prosseguir convém recapitular alguns aspectos da origem dos padrões eletromagnéticos, anteriores ao

surgimento dos padrões do sistema internacional (*S.I.*). O sistema estático (*esu*) se originou na própria obra de Coulomb. Nele se definiu o padrão de carga como aquele no qual duas cargas idênticas unitárias seriam aquelas para as quais a repulsão seria unitária a uma distância unitária. Isto equivale a tomarmos a lei de Coulomb entre duas cargas dq e dq' , neste sistema, simplesmente como

$$dF_c = \frac{dq dq'}{r^2}.$$

O sistema eletromagnético (*emu*) se originou do sistema eletrodinâmico de Ampère, que definiu seu padrão de corrente como aquele no qual dois elementos de corrente paralelos, $I dl$ e $I' dl'$, separados por uma distância r , devem sofrer uma força, dada por

$$dF_a = \frac{I I'}{r^2} dl dl'.$$

Se admitirmos que corrente é carga por unidade de tempo, podemos constatar que o padrão de carga no *esu* não é o mesmo do *emu*. Enquanto que no sistema estático $[q_{esu}] = L[\sqrt{F}]$, no sistema eletrodinâmico $[q_{emu}] = T[\sqrt{F}]$. A razão entre eles é, portanto, uma constante com dimensão de velocidade $[q_{esu}]/[q_{emu}] = LT^{-1}$. Por $[F]$ indicamos a dimensão de força.

Ambos os sistemas estão na origem do hoje chamado, genericamente, *sistema gaussiano*. Para mais detalhes dos diversos sistemas de padrões eletromagnéticos e das unidades de cada grandeza, em cada um deles, ver Jackson ([65], p.775).

Historicamente, o problema da incompatibilidade entre os padrões de carga e corrente foi solucionado por Weber [47], em 1856, quando estabeleceu o valor da constante que uniformiza tais padrões, a qual chamamos anteriormente *constante de Weber*. Conforme o estabelecido

$$\frac{[q]_{esu}}{[q]_{emu}} = \nu = \frac{w}{\sqrt{2}} = 3,11 \times 10^8 m/s. \quad (73)$$

Assim, as forças eletrostática e eletrodinâmica são escritas, no sistema estático (*esu*) como,

$$dF_c|_{esu} = \frac{dq dq'}{r^2}, \quad dF_a|_{esu} = \frac{1}{\nu^2} \frac{I I'}{r^2} dl dl', \quad (74)$$

enquanto que no sistema eletromagnético (*emu*) como

$$dF_c|_{emu} = \nu^2 \frac{d\bar{q} d\bar{q}'}{r^2}, \quad dF_a|_{emu} = \frac{\bar{I} \bar{I}'}{r^2} dl dl'. \quad (75)$$

Maxwell nos diz que no mar de vórtice livre

$$\mu \stackrel{*}{=} 1, \quad (76)$$

tal como no *emu*. Deste modo por (72) devemos ter

$$\varepsilon \stackrel{*}{=} \frac{1}{\nu^2}. \quad (77)$$

fixando assim os valores de (μ, ε) no vazio. Por $\stackrel{*}{=}$ quero dizer que as grandezas em questão são numericamente iguais uma à outra.

Entretanto, na forma em os introduzi aqui, os parâmetros (μ, ε) são constantes dimensionais, conforme (7) e (63),

$$[\mu] = ML^{-1}, \quad [\varepsilon] = M^{-1}L^{-1}T^2.$$

Não estão, portanto, no *emu* ou no *esu*, mas guardam a memória daquilo que fisicamente representam: inércia e rigidez elástica do meio. Assim, em nosso “proto-sistema internacional”, a constante com dimensão de velocidade é

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] = LT^{-1}.$$

Consistentemente ao que fez Maxwell, fixarei o valor desta constante pela constante de Weber, isto é,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \nu. \quad (78)$$

11. Ondas de cisalhamento e luz

Sabemos pela mecânica de um sólido elástico que a dinâmica de uma perturbação, livre de outras ações externas, em um meio homogêneo e isotrópico, é uma equação de onda para o vetor deformação elástica \vec{e} , que tem a forma genérica

$$\rho \frac{\partial^2 e^i}{\partial t^2} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}, \quad (79)$$

em que ρ é a densidade do meio e T^{ij} o tensor de tensões elásticas (48).

No presente contexto, de acordo com (48), e fixados os valores de (κ, n) em conformidade com (65) e (22), virá que

$$T_{ij}^e = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\frac{\partial e_i}{\partial x^j} + \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{e}. \quad (80)$$

A densidade é, por sua vez, $\rho_m = \mu/2\pi$, de acordo com (4) e (5). A equação para a onda elástica (79) no mar de vórtices será então, em notação vetorial,

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{e} + \frac{3}{\varepsilon} \nabla (\nabla \cdot \vec{e}). \quad (81)$$

O modo puramente cisalhante, ou transversal à direção de propagação, associado a (81), pode ser obtido introduzindo-se o vetor auxiliar

$$\vec{\psi} = \nabla \times \vec{e}. \quad (82)$$

Tomando-se o rotacional da equação (81) e multiplicando-se o resultado por ε virá que

$$\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{\psi} = 0. \quad (83)$$

Esta é a equação de onda cisalhante, cuja velocidade de propagação é

$$v_t = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \nu \equiv c, \quad (84)$$

sendo ν a constante de Weber e c a velocidade da luz.

Este foi o resultado que Maxwell nos apresentou em sua *Proposição 16*. Isso o levou a conjectura irresistível de que a luz é uma onda cisalhante no mesmo meio responsável por comunicar as interações elétrica e magnética. O elemento que faltava ao “éter magnético” para poder ser identificado com o “éter luminífero” era justamente considerá-lo também o “éter eletrostático”. Eureka!

12. Discussão

As equações (12), (33), (67) e (70), juntamente com as relações constitutivas (8) e (47), constituem o sistema básico de equações de Maxwell. Estabelecidas dentro dos pressupostos aqui apresentados, no entanto, elas sugerem possibilidades incompatíveis com a teoria eletromagnética clássica, tal como entendida hoje.

Como primeiro ponto, destaco a presença da onda longitudinal, isto é, acústica. Com efeito, definindo o campo auxiliar

$$\psi := \nabla \cdot \vec{e}, \quad (85)$$

tomando a divergência de (81) e multiplicando o resultado por $\varepsilon/3$ virá

$$\frac{\mu\varepsilon}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = 0, \quad (86)$$

que é a equação da onda acústica. Assim, a velocidade, v_l , de propagação do modo acústico, no éter livre, é

$$v_l = \sqrt{\frac{3}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{3} v_t \equiv \sqrt{3} c, \quad (87)$$

maior, portanto, que a própria velocidade da luz. Isto decorre diretamente do fato de que Maxwell escolheu as características elásticas do mar de vórtices como as de um sólido de Navier-Poisson, conforme (65). Se as tivesse escolhido conforme (64) não haveria tal modo de propagação. Se o meio fosse infinitamente rígido à compressão, qualquer modificação compressional do mesmo seria instantaneamente sentida em toda parte. Haveria assim uma ação instantânea à distância coexistindo com as ações eletromagnéticas, propagadas com c . Mas Maxwell não queria que assim o fosse, conforme sua opção por (65), e conforme lemos em sua correspondência com Thomson [71]:

“Assumi a substância das células como altamente elástica com relação tanto à compressão quanto à distorção.”

Isto posto, me parece improvável que Maxwell estivesse preocupado em excluí-lo. Apenas silenciou sobre ele. O debate acerca da sua eventual existência permeava a literatura da óptica teórica naquela época, sendo uma questão em aberto. Apenas a título de termos uma escala de tempo, em que a existência do modo longitudinal permaneceu como uma hipótese aceitável, podemos citar as palavras de Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923), 33 anos mais tarde. Ao descobrir os raios X, e sem compreender a sua natureza, disse ele [72]

“Sabe-se há muito tempo que, além das vibrações transversais da luz, vibrações longitudinais também podem existir no éter e, de acordo com vários físicos, devem existir. Evidentemente, a sua existência ainda não foi confirmada [...]. Não poderiam os novos raios serem devidos a vibrações longitudinais no éter?”

Outro ponto a destacar é o aparecimento da eletricidade como algo associado a uma condição do meio etéreo. Embora Maxwell tenha, aqui, a intenção de corroborar o que seria uma visão faradiana, imaterial, da eletricidade; tal postura não se sustentou afinal, nos desenvolvimentos posteriores. Na tradição da física da Europa continental, se admitia a existência da carga como um poder essencial da matéria, sendo porém a interação entre elas instantânea à distância. Neste contexto a eletrodinâmica de Weber [73] foi a primeira eletrodinâmica de partícula. Na Inglaterra, por outro lado, Thomson empreendeu esforços, como já dissemos, no sentido de moldar átomos a partir de vórtices etéreos [44], dos quais a carga elétrica deveria emergir como alguma condição do meio. Inspirou particularmente Joseph Larmor (1857-1942) com suas “monadas”, logo chamados “elétrons” [74,75]. Os elétrons de Larmor foram introduzidos como centros de deformações em um éter elástico e rotacional, sugerindo que a matéria fosse afinal de natureza eletromagnética, isto é, uma condição do meio etéreo. Entre os físicos continentais, por outro lado, Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) reconciliara a teoria de Maxwell, de um campo contínuo, com a eletricidade atomística [76]. Seus “íons” eram partículas materiais dotadas de carga elétrica e mergulhadas num éter estacionário, o que ficou conhecido como a *teoria do elétron* de Lorentz. Em 1896 ocorreu a descoberta do *efeito Zeeman* [77], o qual foi logo explicado, por Lorentz, com base em sua *teoria do elétron*. No ano seguinte deu-se a medição da relação carga-massa dos supostos “corpúsculos” catódicos [78], por Joseph John Thomson (1856-1940). Ambos acontecimentos abriram caminho para a aceitação de que a carga elétrica era afinal uma propriedade dos constituintes fundamentais da matéria, isto é, que o corpo é dito eletrizado quando está dotado de carga elétrica. O que prevaleceu afinal, na consolidação do eletromagnetismo clássico, foi uma

solução de compromisso entre a visão faradiana da interação, contígua e propagada, e a visão atomística da eletricidade, encarnada no *elétron*.

Por fim, destaco um aspecto que se associa à relatividade. Ele aparece na *Proposição 11* da Parte II, quando Maxwell considerou, em sua prova, e de forma implícita, que o movimento do “*corpo*” relativamente ao mar de vórtices é fisicamente equivalente ao movimento do mar de vórtices em relação ao corpo. Embora nada seja afirmado explicitamente, somente a relatividade galileana poderia ser tomada como pressuposto, naquele momento. O que daí resulta é a igualdade (44), que é a expressão da **lei de Faraday**, na forma diferencial, no referencial local em que o éter se move com \vec{u} . Mesmo que \vec{u} seja constante, esta não possui a mesma forma que (33). Se, de forma totalmente anacrônica, tomarmos as transformações de Lorentz dos campos (\vec{E}, \vec{B}) , nos padrões do sistema internacional, no limite em que termos de u/c^2 são desprezados virá que

$$\vec{E}' = \vec{E} - \vec{u} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

Isto nos permite interpretar (44), não só como expressão de (33) em outro sistema de referência, mas, também, que sua forma original (33) é preservada em qualquer sistema de referência. Uma invariância de Galileu da lei de Faraday. Maxwell não supõe, entretanto, que o movimento relativamente ao éter deva ser uniforme, limitando-se apenas à condição (36). Isto significa que em um mesmo referencial poderia haver regiões de éter estacionário e regiões de éter em movimento. Me parece, assim, razoável inferir que, no tocante ao princípio da relatividade, fica implicitamente sugerido um critério de invariância de Galileu local; associado às leis eletromagnéticas. O que prevalecerá afinal é um critério de invariância de Lorentz global, mas aí Lorentz já terá considerado que o éter é completamente estacionário em algum referencial preferencial. Lembrando as palavras de Einstein [79], em 1920,

“*Quanto a natureza mecânica do éter lorentziano, pode-se dizer, com um espírito algo brincalhão, que a imobilidade é a única propriedade mecânica do qual não foi privado por H. A. Lorentz.*”

13. Conclusão

O modelo do *mar de vórtices moleculares* nos provoca uma sensação de otimismo em relação ao programa de se buscar uma fundamentação mecânica para os fenômenos eletromagnéticos e ópticos. Em que pese a suspeita de que certos aspectos do modelo eram provisórios, mesmo aos olhos dos seus contemporâneos, ele certamente encorajava uma busca mais aprofundada pela elucidação de quais seriam os mecanismos verdadeiros, em ação no meio etéreo. Maxwell, ele próprio, comentou

“*A concepção de uma partícula possuindo seu movimento conectado ao do vórtice por um contato de ro-*

lamento perfeito, pode parecer um pouco estranho. Eu não a apresento como um modo de conexão existente na natureza,[...]. É contudo um modo de conexão concebível mecanicamente, fácil de investigar, e que serve para trazer a tona as conexões mecânicas reais entre os fenômenos eletromagnéticos conhecidos; de modo que me atrevo a dizer que aquele que compreende o caráter provisório e temporário desta hipótese, verá que foi mais ajudado do que prejudicado por ela”. ([27], p.486)

A introdução da compressibilidade do meio foi outro elemento que podia tornar as leis, inicialmente obtidas, passivas de uma revisão, quanto a sua exatidão. Isto não indicava, porém, que a empreitada fora infrutífera. Apenas que dentro do programa de uma física do *plenum* havia espaço para se acomodar ainda grande diversidade de fenômenos, desde que assim a evidência experimental o exigisse, bem como para se aperfeiçoar os mecanismos em ação caso aqueles antes supostos não se mostrassem plenamente satisfatórios.

No entanto, otimismo inicial daqueles que pretendiam construir esta física do *plenum*, no século XIX, acabou dando lugar à aceitação de que o domínio dos fenômenos eletromagnéticos se revelava, afinal, refratário ao paradigma mecanicista. Diferentemente do que ocorreu com a teoria cinética dos gases e a termodinâmica, o campo eletromagnético reivindicou para si uma autonomia relativamente aquele paradigma. Com o advento da relatividade especial reivindicou até mesmo uma precedência sobre a mecânica, tal como era aceita. As leis dinâmicas do campo eletromagnético são o que são precisamente porque se mostrou impossível reduzi-las à relações puramente mecânicas, por analogia. Neste sentido é curioso ver como, na atualidade, se busca fazer o caminho inverso com os fenômenos gravitacionais previstos pela Relatividade Geral de Einstein, isto é, encontrar análogos mecânicos de processos dinâmicos do campo gravitacional, em suas manifestações intrinsecamente relativísticas.

Referências

- [1] M. Faraday, *Philosophical Magazine* **28**, 345 (1846).
- [2] M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. London* **142**, 25 (1852).
- [3] M. Faraday, *Philosophical Magazine* **3**, 401 (1852).
- [4] T. Young, *Phil. Trans. R. Soc. London* **94**, 1 (1804).
- [5] D. Arago e A. Fresnel, *Annales de Chimie et de Physique* **10**, 288 (1819).
- [6] A. Fresnel, *Annales de Chimie et de Physique* **17**, 102 (1821).
- [7] A. Fresnel, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* **5**, 339 (1826).
- [8] A. Fresnel, *Oeuvres* **2**, 261 (1868).
- [9] C. Huygens, *Treatise on Light* (MacMillan and Co., London, 1912).
- [10] A. Cauchy, *Bulletin des Sciences Mathématiques* **14**, 6 (1830).
- [11] A. Cauchy, *Mémoire de l'Académie des Sciences* **10**, 293 (1831).

- [12] A. Cauchy, *Nouveaux Exercices de Mathématiques* **5**, 203 (1836).
- [13] A. Cauchy, *Comptes Rendus* **10**, 347 (1840).
- [14] G. Green, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **7**, 1 (1838).
- [15] G. Green, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **7**, 121 (1839).
- [16] J. MacCullagh, *Philosophical Magazine* **10**, 42 (1837).
- [17] J. MacCullagh, *Transactions of Royal Irish Academy* **21**, 17 (1848).
- [18] G.G. Stokes, *Philosophical Magazine* **27**, 9 (1845).
- [19] G.G. Stokes, *Philosophical Magazine* **29**, 6 (1846).
- [20] G.G. Stokes, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **8**, 287 (1849).
- [21] G.G. Stokes, “*Report on Double Refraction*” (Taylor and Francis, Oxfordshire, 1862).
- [22] E.T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity: The classical theories* (Thomas Nelson and Sons Ltd., London, 1951).
- [23] J.Z. Buchwald, *The Rise of the Wave Theory of Light - Optical theory and experiment in the Early Nineteenth century* (Univ. Chicago Press, Chicago, 1989).
- [24] O. Darrigol, *A history of Optics* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2012).
- [25] K.F. Schaffner, *Nineteenth-Century aether theories* (Pergamon Press, Oxford, 1972).
- [26] J.C. Maxwell, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **10**, 155 (1855).
- [27] J.C. Maxwell, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Dover Publ., New York, 1965), v. 1, p. 451.
- [28] J.C. Maxwell, *Phil. Trans. R. Soc. London* **155**, 459 (1865).
- [29] O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2000).
- [30] D. Siegel, *Innovation in Maxwell's electromagnetic theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991).
- [31] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* (Cosimo Classics Inc., New York, 2007).
- [32] B. Hunt, *The Maxwellians* (Cornell University Press, Ithaca, 1991).
- [33] W. Thomson, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **1**, 75 (1846).
- [34] M. Faraday, *Philosophical Magazine* **28**, 294 (1846).
- [35] W. Thomson, *Cambridge and Dublin Mathematica Journal* **2**, 61 (1847).
- [36] C. Coulomb, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* **88**, 569 (1785).
- [37] S. Poisson, *Mem. de l'Académie Royale des Sciences* **5**, 247 (1828).
- [38] W. Thomson, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* **2**, 230 (1847).
- [39] W. Thomson, *Philosophical Magazine* **37**, 241 (1850).
- [40] W. Thomson, *Philosophical Magazine* **1**, 177 (1851).
- [41] W. Thomson, *Phil. Trans. R. Soc. London* **141**, 243 (1851).
- [42] W. Thomson, *Proc. Roy Soc.* **8**, 150 (1857).
- [43] W. Thomson, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **6**, 94 (1867).
- [44] H. Kragh, *Centaurus* **44**, 32 (2002).
- [45] L. Campbell e W. Garnett, *The life of James Clerk Maxwell* (MacMillan and Co., London, 1882).
- [46] M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. London* **122**, 125 (1832).
- [47] W. Weber e R. Kohlrausch, *Annalen der Physik und Chemie* **99**, 10 (1856).
- [48] B. Riemann, *Annalen der Physik* **131**, 237 (1867).
- [49] J.C. Maxwell, “*On the stability of the motion of Saturn's rings*” (MacMillan and Co., London, 1859).
- [50] B. Mahon, “*The man who changed everything*” (John Wiley & sons Ltd., Chichester, 2004).
- [51] R. Clausius, *Philosophical Magazine* **17**, 81 (1859).
- [52] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine* **19**, 19 (1860).
- [53] J.C. Maxwell, *Philosophical Magazine* **20**, 21 (1860).
- [54] C.W.F. Everitt, em *Dicionário de Biografias Científicas*, editado por C. Benjamin (Contraponto Editora Ltda, Rio de Janeiro, 2007), v. 3, p. 1860.
- [55] A. Fizeau, *Comptes Rendus* **29**, 90 (1849).
- [56] J.C. Maxwell, *Phil. Trans. R. Soc. London* **158**, 643 (1868).
- [57] J.J. Thomson, *Phil. Trans. R. Soc. London* **174**, 707 (1883).
- [58] J. Navarro, “*A History of the Electron: J. J. and G. P. Thomson*” (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012).
- [59] J.J. Thomson e G.F.C. Searle, *Philosophical Transactions of the Royal Society A* **181**, 583 (1890).
- [60] E. Rosa, *Philosophical Magazine* **28**, 315 (1889).
- [61] A. Chalmers, *Phys. perspect.* **3**, 425 (2001).
- [62] J.C. Maxwell, “*A Treatise on Electricity and Magnetism*” (Oxford Univ. Press, Oxford, 2002).
- [63] D.J. Griffiths, *Eletrodinâmica* (Pearson, São Paulo, 2011), p. 244, 3ª ed.
- [64] W. Greiner, *Classical Electrodynamics* (Springer-Verlag, New York, 1998), p. 260.
- [65] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1999), p. 261, 3ª ed.
- [66] G.G. Stokes, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **9**, 1 (1851).
- [67] J.H. Poynting, *Phil. Trans. R. Soc. London* **175**, 343 (1884).
- [68] O. Heaviside, *Electrical Papers* (MacMillan and Co., London, 1892), v. 1, p. 429.
- [69] I. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956).
- [70] L.D. Landau e E.M. Lifschiz, *Course of Theoretical physics* (Pergamon press, Oxford, 1959), v. 7.
- [71] J. Larmor, *Mathematical Proceedings Camb. Phil. Soc.* **32**, 695 (1936).
- [72] W.C. Röntgen, “*Ueber eine neue Art von Strahlen*”, (Springer Verlag, Berlin, 1895), p. 132.
- [73] W. Weber, *Wilhelm Weber's Werke* (Springer, Berlin, 1893), v. 3, p. 25.
- [74] J. Larmor, *Phil. Trans. R. Soc. London* **185**, 719 (1894).
- [75] J. Larmor, *Phil. Trans. R. Soc. London* **186**, 695 (1895).
- [76] H.A. Lorentz, *Archives Néerlandaise*, **25**, 363 (1892).
- [77] P. Zeeman, *Philosophical Magazine* **43**, 226 (1897).
- [78] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine* **44**, 293 (1897).
- [79] A. Einstein, *The Collected Papers of Albert Einstein* (Princeton University Press, New Jersey, 2002), v. 7, p. 160.