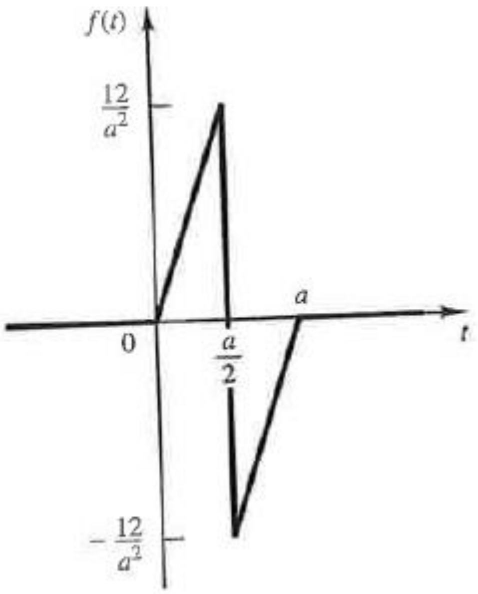
Seja f(t) representada abaixo.



a) (1,0 pt) Calcule sua transformada de Laplace, F(s).
b) (1,0 pt) Calcule o limite de F(s) para $a \to 0$

<u>SOLUÇÃO:</u>

$$f(t) = \frac{24}{a^3} t - 1(t - a/2).1(t - a/2)\frac{24}{a^2} - 1(t-a).\frac{24}{a^3}(t-a)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{24}{a^3 s^2} - \frac{24}{a^2 s} e^{-\frac{a}{2}s} - \frac{24}{a^3 s^2} e^{-as} = 24\frac{1 - sae^{-\frac{a}{2}s} - e^{-as}}{a^3 s^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0}[24\frac{s^2(a/2)e^{-\frac{a}{2}s} - se^{-\frac{a}{2}s} + se^{-as}}{3a^2 s^2}] =$$

$$= \lim_{a\to 0}[24\frac{-s^3(a/4)e^{-\frac{a}{2}s} + (s^2/2)e^{-\frac{a}{2}s} + (s^2/2)e^{-\frac{a}{2}s} - s^2 e^{-as}}{6as^2}] =$$

$$= \lim_{a\to 0}[24\frac{s^4(a/8)e^{-as} - (s^3/4)e^{-\frac{a}{2}s} - (s^3/4)e^{-\frac{a}{2}s} - (s^3/4)e^{-\frac{a}{2}s} + s^3 e^{-as}}{6s^2}] =$$

$$= \lim_{a\to 0}[24\frac{s^4(a/8)e^{-as} - (3s^3/4)e^{-\frac{a}{2}s} + s^3 e^{-as}}{6s^2}] = s$$

Calcule a transformada de Laplace da função abaixo.

Calcular a Transformada de Laplace para a Função Abaixo:

$\boldsymbol{f(t)} = 0,$ para $\boldsymbol{t} < 0$

$\boldsymbol{f(t)} = \mathbf{cos}2\omega \boldsymbol{t}.\mathbf{cos}3\omega \boldsymbol{t},$ para $t \geq 0$

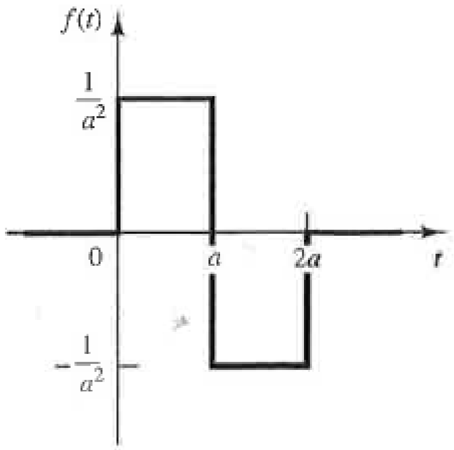
SOLUÇÃO:

$$\cos 2\omega t.\cos 3\omega t = \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} . \frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2} =$$

$$= \frac{e^{-j5\omega t} + e^{j5\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2} = \cos 5\omega t + \cos \omega t$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{5} G(\frac{s}{5}) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{5} \frac{(s1/5)}{(s/5)^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{s}{s^2 + 25\omega^2}$$

Seja a função f(t) representada abaixo.



a) (1,0 pts) Calcule a sua transformada de Laplace, F(s)
b) (0,5 pts) Calcule o limite, para $a \to 0$, de F(s).

SOLUÇÃO

$$f(t) = \frac{1}{a^2}.1(t) - \frac{2}{a^2}.1(t-a) - \frac{1}{a^2}.1(t-2a)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{a^2 s} - \frac{2}{a^2 s}e^{-as} - \frac{1}{a^2 s}e^{-2as} = \frac{1}{a^2 s}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as})$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0} \frac{1}{a^2 s}(1 - 2e^{-as} + e^{-2as}) =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left(\frac{2se^{-as} - 2se^{-2as}}{2as}\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0} \left(\frac{-2s^2 e^{-as} + 4s^2 e^{-2as}}{2s}\right) =$$

$$\lim_{a\to 0} \frac{2s^2}{2s} = s$$

Calcule a transformada de Laplace para a função abaixo:

$$f(t) = 0, \text{ para } t < 0$$
$$f(t) = te^{-t} sen 5t, \text{ para } t \geq 0$$

SOLUÇÃO

$$f(t) = te^{-t} sen 5t$$

$$g(t) = sen 5t$$

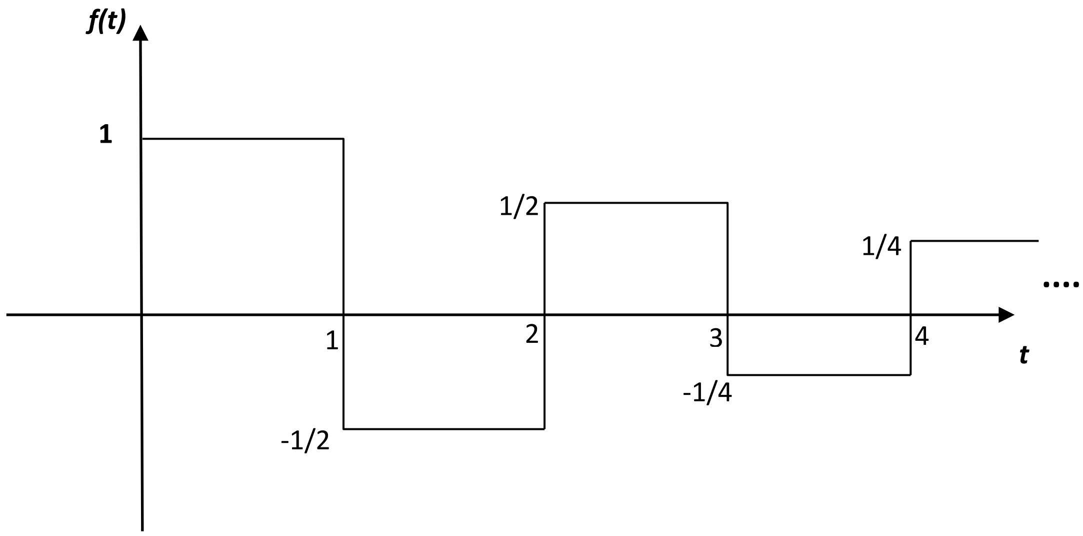
$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 25}$$

$$G(s+1) = H(s) = \frac{5}{(s+1)^2 + 25}$$

$$f(t) = t.h(t) = t.e^{-t} sen 5t$$

$$F(s) = -\frac{dH(s)}{ds} = \frac{10(s+1)}{\left[(s+1)^2 + 25\right]^2}$$

Calcular a transformada de Laplace da função representada abaixo.



SOLUÇÃO

$$H(t) = \left\{1(t) - 1(t-1) - \frac{1}{2}[1(t-1) - 1(t-2)]\right\} + \frac{1}{2}\left\{1(t-2) - 1(t-3) - \frac{1}{2}[1(t-3) - 1(t-4)]\right\} + \ldots =$$

$$= f(t) + \frac{1}{2}1(t-2).f(t-2) + \frac{1}{4}1(t-4).f(t-4) + \ldots.$$

$$\Rightarrow H(s) = F(s) + \frac{e^{-2s}}{2}F(s) + \frac{e^{-4s}}{4}F(s) + \ldots = F(s).[1 + \frac{e^{-2s}}{2} + \frac{e^{-4s}}{4} + \ldots..] = F(s).\sum(s)$$

$$\sum(s) = 1 + \frac{e^{-2s}}{2}.\sum(s) \Rightarrow \sum(s) = \frac{1}{1 - \frac{e^{-2s}}{2}}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{2}(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{3}{2}e^{-s} + \frac{1}{2}e^{-2s}\right)$$

Utilizando a transformada de Laplace, resolva a equação diferencial abaixo.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 6x = 0, \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 3$$

<u>SOLUÇÃO</u>

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 6x = 0, \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 3$$

$$s^2 X(s) - 3 + 4sX(s) + 6X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 3s + 6\right)X(s) = 3$$

$$X(s) = \frac{3}{s^2 + 4s + 6} = \frac{3}{(s+2)^2 + 2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 + 2}$$

$$x(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-2t} sen\sqrt{2}t$$

DADO

ALGUMAS PROPRIEDADES da TRANSFORMADA DE LAPLACE

1- Para funções periódicas

$$£[f(t)] = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st}dt}{1 - e^{-Ts}}$$

2- Para derivadas

$$£\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - \ldots\ldots - s\left.\frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

3- Outras

$$£[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s+\alpha)$$

$$£[f(\frac{t}{\alpha})] = \alpha F(\alpha s)$$

$$£[f(t-\alpha).1(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$$

$$£[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$