Ondas Electromagnéticas IV

[J.D. Jackson, Cap. 7; R.H. Good Jr. and T.J. Nelson, Pag. 368]

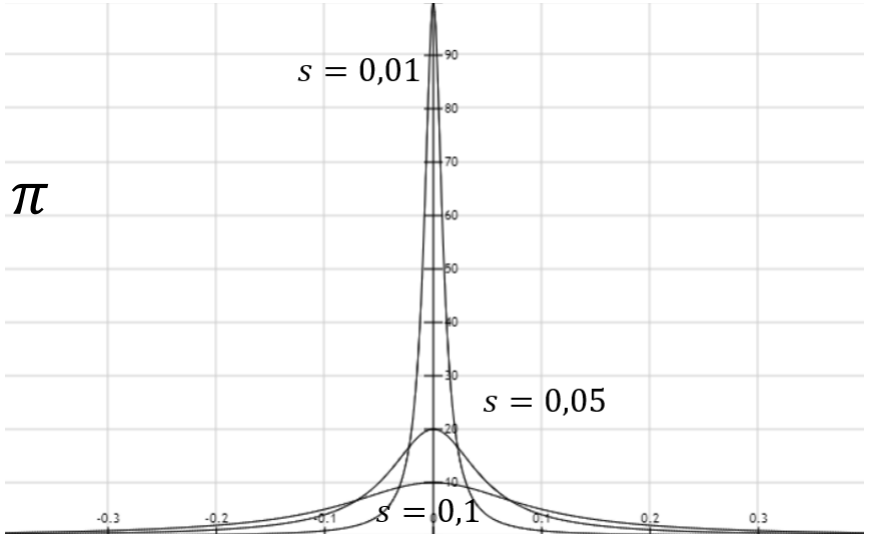
[M. Schönleber; http://www.iam.kit.edu/wet/plainhtml/Download/Derivation_Kramers-Kronig.pdf]

Intermezzo matemático

- Função delta como limite da Lorentziana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s}{s^2 + x^2}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(x)dx = \pi$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2 + x^2}$$



- Transformada de Fourier da função degrau

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \rightarrow \mathcal{F}[\Theta(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} \cos(\omega t)dt + i \int_0^{\infty} \sin(\omega t)dt \right]$$

→ integrais não definidas! → $\int_{-\infty}^{\infty} [\Theta(t)]^2 \, dt \rightarrow \infty$ não satisfaz condição para existência da transformada de Fourier.

Função degrau como limite da exponencial

$$\Theta(t)$$

$$= \lim_{\alpha\to 0^+} \begin{cases} 0; & t < 0 \\ e^{-\alpha t}; & t > 0 \end{cases} \rightarrow \Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\infty e^{(-\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0^+} \left. \frac{e^{-\alpha t} e^{i\omega t}}{-\alpha + i\omega} \right|_0^\infty$$

$$\therefore \ \Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{\omega}$$

Esta expressão diverge para $\omega \to 0$ e, fazendo a transformada inversa de $1/\omega$, pode-se mostrar que o resultado é distinto da função degrau! No entanto, podemos ainda calcular $\Theta(\omega)$, considerada como uma distribuição, se isolarmos a contribuição do polo em $\omega \to 0$ antes de tomarmos o limite.

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha\to 0^+} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[i\wp\left(\frac{1}{\omega}\right) + \pi\delta(\omega) \right]}$$

Nessa expressão, o símbolo $\wp(\ )$ é denominado *parte principal de Cauchy.*

Explicitamente, quando considerado dentro de uma integral, esta tem que ser feita até um infinitésimo ε antes do polo e ε após o polo.

<u>Exemplo</u>: $I = \int_{-1}^{1} dx/x$

- Sem considerar a parte principal: $I = \lim_{a \to 1} [\ln a - \ln(-a)] = \ln(-1) \to diverge$
- Com parte principal:

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{\varepsilon}{1} + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] = \ln(1) = 0$$

<u>Nota</u>

Dependendo como a transformada de Fourier é definida, a transformada para a função degrau pode aparecer com mais um fator $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)$ multiplicando a expressão que obtemos.

<u>Exercício</u> na aula passada definimos a convolução de duas funções e mostramos que sua transformada de Fourier é proporcional ao produto das transformadas das duas funções.

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')H(t')dt'\right] = \sqrt{2\pi}g(\omega)h(\omega);$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)e^{i\omega t}dt; h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{i\omega t}dt$$

Considere agora a transformada de Fourier do produto de duas funções temporais

$$\mathcal{F}[G(t)H(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(t)H(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Substitua as expressões para as transformadas inversas, por exemplo, $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega')e^{-i\omega' t}d\omega'$, faça primeiro a integral no tempo, e mostre que

$$\mathcal{F}[G(t)H(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega')g(\omega-\omega')d\omega'$$

Causalidade e as *Relações de Kramers-Kronig*

Seja $H(t)$ uma função temporal que descreve o efeito de uma causa que começou no instante $t = 0 \implies H(t) = 0; t < 0$. Sua transformada de Fourier é então dada por

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\Theta(t)e^{i\omega t}dt$$

Esta é a transformada de Fourier do produto de duas funções; pelo teorema da convolução

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega')\Theta(\omega - \omega')d\omega' = \frac{1}{2\pi}\left[i\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \pi \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega')\delta(\omega - \omega')d\omega'\right]$$

$$\therefore \quad h(\omega) = \frac{i}{2\pi}\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \frac{1}{2}h(\omega) \implies h(\omega) = \frac{i}{\pi}\wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Essa integral é denominada *Transformada de Hilbert*. Portanto esse resultado significa que a transformada de Fourier de uma função causal é invariante à transformada de Hilbert.

Separação das partes real e imaginária da equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \int_{-\infty}^{0} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' + \int_{0}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Troca de variáveis na primeira integral: $\omega'' = -\omega'$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \int_{0}^{\infty} \frac{h(-\omega'')}{\omega + \omega''} d\omega'' = \int_{0}^{\infty} \frac{h^*(\omega'')}{\omega + \omega''} d\omega''$$

Como ω'' é variável muda de integração, podemos escrevê-la novamente como ω' e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = \int_{0}^{\infty} \frac{h(\omega')(\omega + \omega') + h^*(\omega')(\omega - \omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

Substituindo na expressão para $h(\omega)$, separada nas partes real e imaginária, temos

$$h_{re}(\omega) + i h_{im}(\omega) = \frac{i}{\pi} \wp \int_{0}^{\infty} \frac{2h_{re}(\omega')\omega + 2i h_{im}(\omega')\omega'}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_{re}(\omega) = \frac{2}{\pi} \wp \int_{0}^{\infty} \frac{\omega' h_{im}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \qquad h_{im}(\omega) = -\frac{2}{\pi} \wp \int_{0}^{\infty} \frac{\omega h_{re}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'}$$

Aplicação à constante dielétrica relativa

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + h(\omega)$$

onde $h(\omega)$ depende do meio; por exemplo, no modelo de Drude-Lorentz

$$h(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Portanto (equivalente às equações 7.120 do Jackson)

$$Re[\epsilon_r(\omega)] = 1 + \frac{2}{\pi}\wp\int_0^\infty \frac{\omega' Im[\epsilon_r(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2}d\omega';$$

$$Im[\epsilon_r(\omega)] = -\frac{2\omega}{\pi}\wp\int_0^\infty \frac{Re[\epsilon_r(\omega') - 1]}{\omega'^2 - \omega^2}d\omega'$$

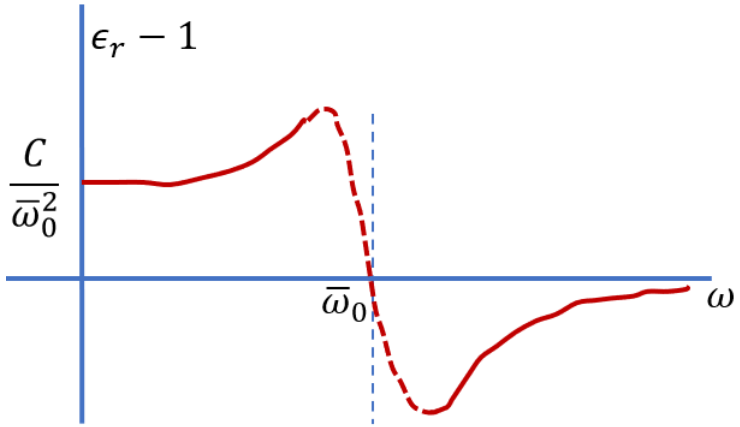
Observações

- Só há dispersão em um meio se houver absorção, já que

$$Im[\epsilon_r(\omega')] = 0 \;\rightarrow\; \epsilon_r = 1 \Longrightarrow v_f = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = c$$

- Absorção em região estreita próxima a uma ressonância

$$\epsilon_r(\omega) \approx 1 + \frac{C}{\bar{\omega}_0^2 - \omega^2}$$



No limite de altas frequências, $\omega \gg \bar{\omega}_0$

$$Re[\epsilon_r(\omega)] - 1 \approx \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega' Im[\epsilon_r(\omega')]}{-\omega^2} d\omega' \approx -\frac{2}{\pi}\frac{\bar{\omega}_0}{\omega^2}\int_0^\infty Im[\epsilon_r(\omega')]d\omega'$$

Regra de soma

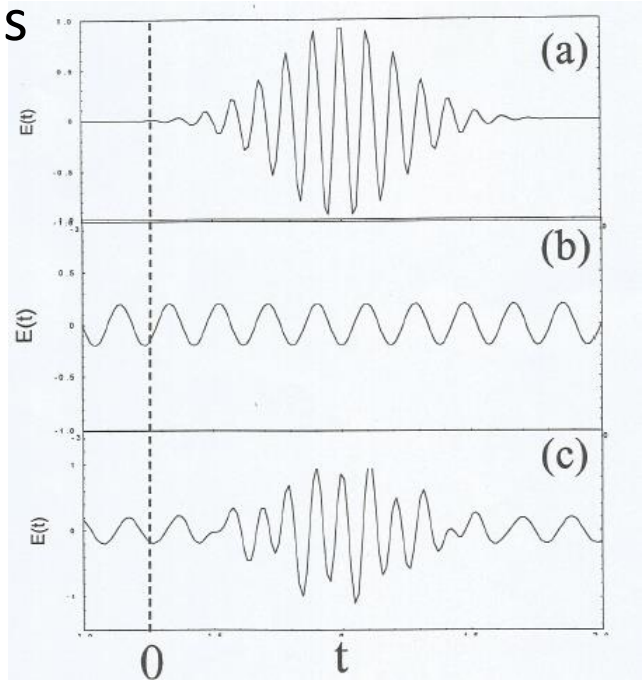
$$\boxed{\int_0^\infty Im[\epsilon_r(\omega')]d\omega' = -\frac{\pi}{2\bar{\omega}_0}\lim_{\omega\to\infty}\omega^2\{Re[\epsilon_r(\omega)] - 1\}}$$

Interpretação física das relações de Kramers Kronig

[J.S. Toll; *Phys. Rev.* 104, 1760 (1956)]

- Impulso curto de onda eletromagnética [figura (a)] em um material com forte absorção em uma faixa muito estreita de frequências.

- Sendo um impulso curto, ele tem uma banda finita de frequências, cada uma correspondendo a uma onda que se estende no intervalo $-\infty < t < \infty$.
- Suponha-se que o meio absorva somente uma dessas componentes de Fourier [figura (b)].
- Com a subtração, o impulso ficaria como mostrado na figura (c).
- O campo subtraído não obedece causalidade, porque existe para $t < 0$.
- Para que a causalidade seja satisfeita, o meio tem que inserir uma mudança de fase em todas as outras componentes de Fourier, de forma que sua soma se cancele para $t < 0$.



<u>Aplicações</u>: relações de Kramers-Kronig são aplicadas em muitas áreas da física; exemplos

M.Y. Kozak *et al*; *IJISET* <u>4</u>, 152 (2017)

R. Lovell; *J. Phys. C: Solid State Phys*. <u>7</u>, 4378 (1974)