Aula 11: Variáveis Aleatórias Multidimensionais

03200 – Probabilidade

Prof. Renato Moraes

Exemplos de problemas bivariados

- Peso e altura das pessoas
- Intensidade da corrente e temperatura do circuito
- Dureza e tensão de ruptura de uma peça metálica
- Quantidade de cartões de crédito e de celulares que uma pessoa possui
- Número de filhos e gastos domésticos de uma família

Exemplo com variáveis discretas

Y (dado 2)	X (dado 1)					
	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Caso Univariado

$$\sum P(x_i) = 1$$

Caso Bivariado

$$\sum P(x_i, y_i) = 1$$

No exemplo ao lado

$$\sum P(x_i, y_i) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} = 1$$

Exemplo com variáveis discretas

Capac da Linha 2 Y	X (Capac da Linha 1)					
	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

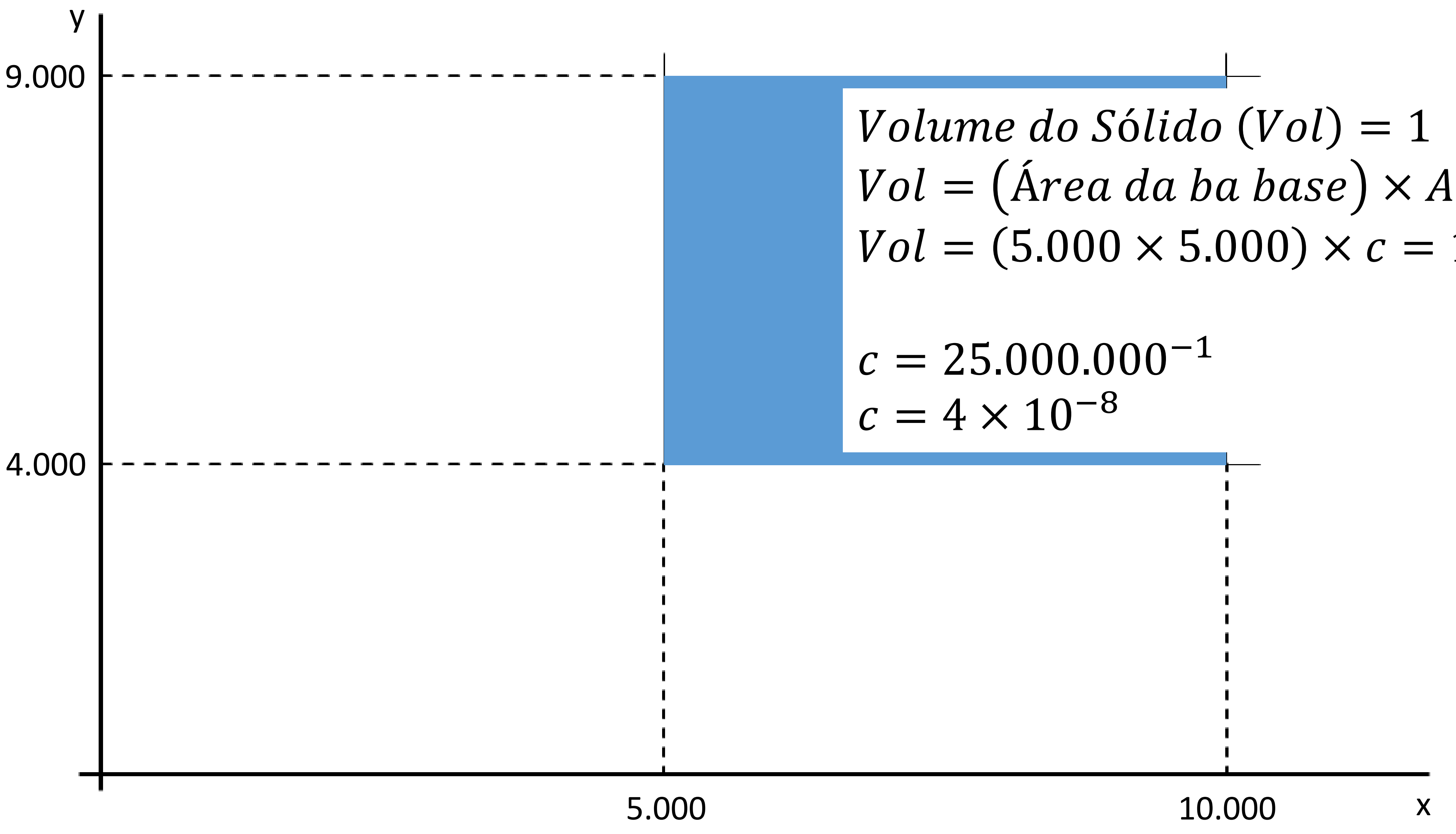
$P[X > Y] = ?$

Y	X					
	0	1	2	3	4	5
0		0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1			0,04	0,05	0,06	0,08
2				0,05	0,05	0,06
3					0,06	0,05

Exemplo com variáveis contínuas

Um fabricante de lâmpadas está interessado na demanda de seu produto nos meses de janeiro e fevereiro. Sejam X e Y, respectivamente, a demanda nesses dois meses. Supondo que X e Y seja uma variável aleatória bidimensional com seguinte função densidade de probabilidade conjunta, determine o valor de “c”?

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{c} & \text{caso } 5.000 \leq \mathrm{x} \leq 10.000 \text{ e } 4.000 \leq \mathrm{y} < 9.000 \\ \mathrm{o} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$



$$Volume\ do\ Sólido\ (Vol) = 1$$

$$Vol = \left(Área\ da\ ba\ base\right) \times Altura = 1$$

$$Vol = (5.000 \times 5.000) \times c = 1$$

$$c = 25.000.000^{-1}$$

$$c = 4 \times 10^{-8}$$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{y=-\infty}^{y=\infty}\int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_{y=4.000}^{y=9.000}\int_{x=5.000}^{x=10.000} c\,dxdy = c\int_{y=4.000}^{y=9.000}\int_{x=5.000}^{x=10.000} 1\,dxdy = 1$$

$$c\int_{y=4.000}^{y=9.000} x]_{5.000}^{10.000} dy = c\int_{y=4.000}^{y=9.000} (10.000 - 5.000)dy = 5.000 \times c \int_{y=4.000}^{y=9.000} 1dy = 1$$

$$5.000 \times c \times x]_{4.000}^{9.000} = 5.000 \times c \times (9.000 - 5.000) = 25 \times 10^{-6} \times c = 1$$

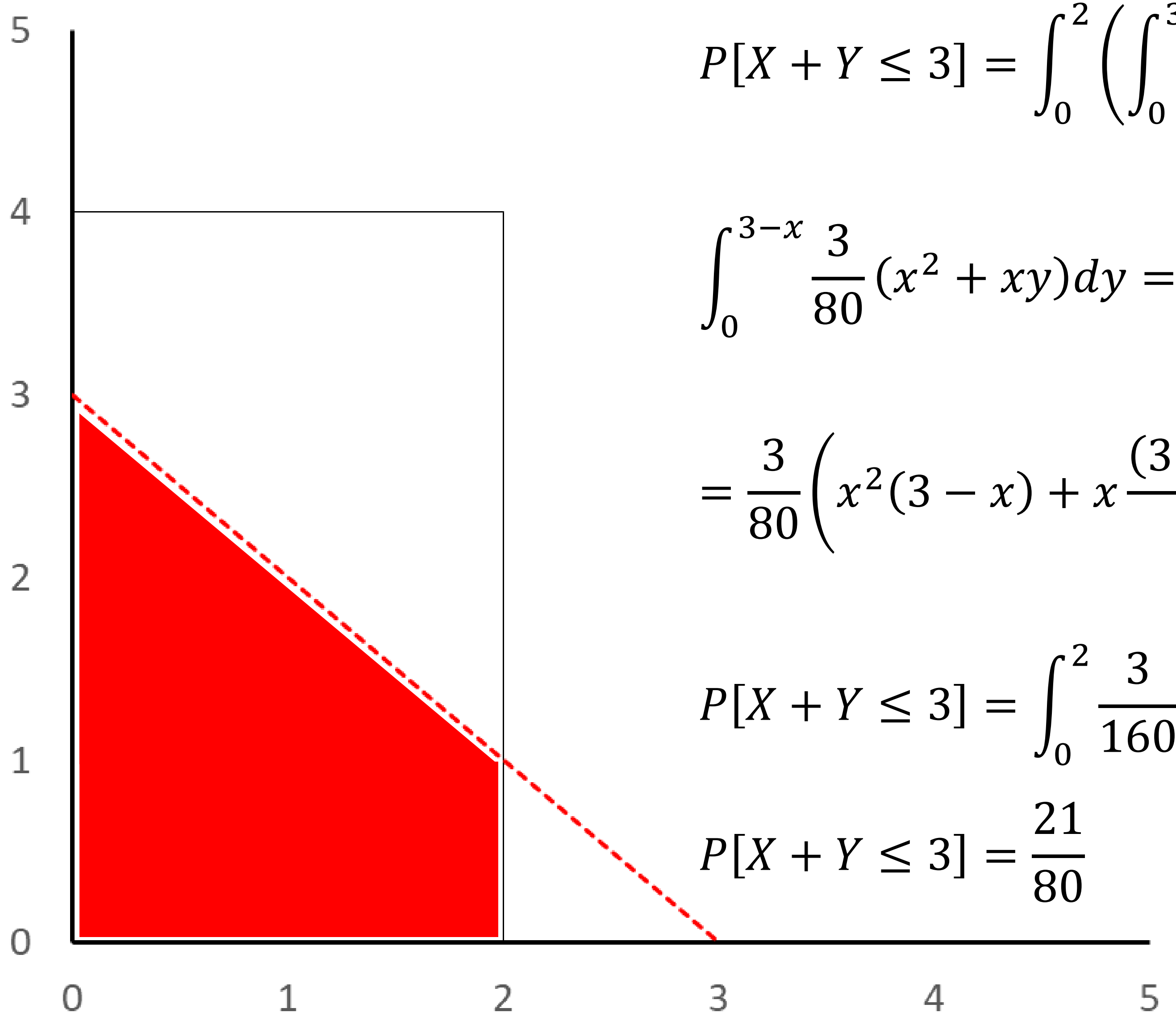
$$c = {}^{1}/_{25 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^{-8}$$

Exemplo 6.1.

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional cuja densidade de probabilidade é dada por: $f(x, y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)$ para $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4$ sendo zero no complementar desse retângulo. Calcule a probabilidade de $P[X + Y \leq 3]$

$$P[X+Y\le 3]=\int_0^2\left(\int_0^{3-x} f(x,y)dy\right)dx$$

$$P[X+Y\le 3]=\int_0^2\left(\int_0^{3-x}\frac{3}{80}(x^2+xy)dy\right)dx$$



$$\int_0^{3-x}\frac{3}{80}(x^2+xy)dy=\frac{3}{80}\left(x^2\,y\Big|_0^{3-x}+x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{3-x}\right)$$

$$=\frac{3}{80}\left(x^2(3-x)+x\frac{(3-x)^2}{2}\right)=\frac{3}{160}(-x^3+9x)$$

$$P[X+Y\le 3]=\int_0^2\frac{3}{160}(-x^3+9x)\,dx=\frac{3}{160}\left(-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2+\frac{9x^2}{2}\Big|_0^2\right)$$

$$P[X+Y\le 3]=\frac{21}{80}$$

Densidades marginais

$$f_x(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} f(x,y)dy$$

$$f_y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} f(x,y)dx$$

Exemplo 6.1.

Se $f(x,y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)$, determine $f_x(x)$

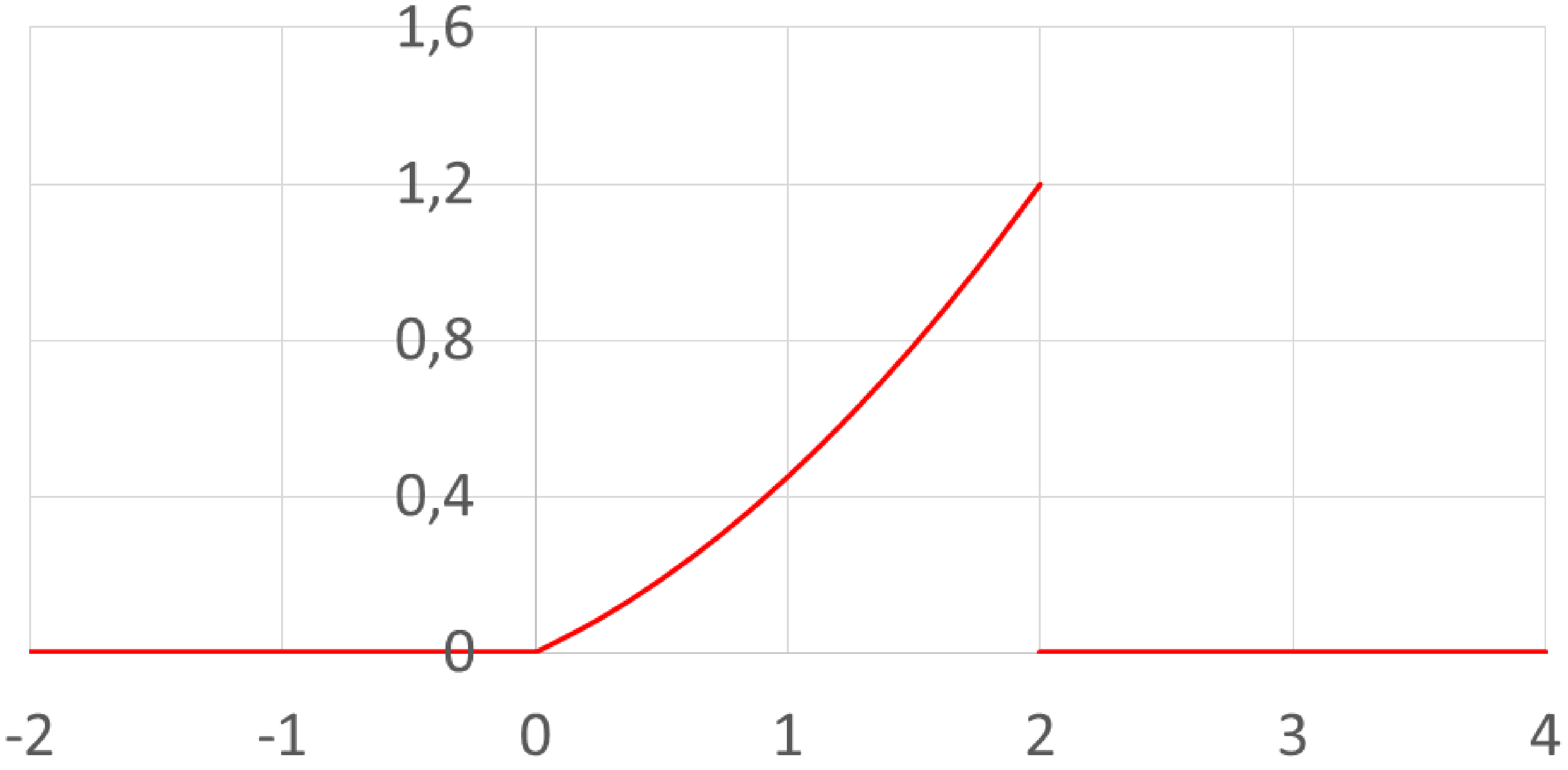
$$f_x(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)dy = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{3}{80}(x^2 + xy)dy$$

$$f_x(x) = \frac{3}{80}\int_0^4 (x^2 + xy)dy = \frac{3}{80}\left(x^2\, y\Big|_0^4 + x\frac{y^2}{2}\Big|_0^4 \right) = \frac{3}{80}(4x^2 + 8x)$$

$$f_x(x) = \frac{3}{20}x^2 + \frac{3}{10}x$$

Gráfico de $f_x(x)$

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{20}x^2 + \dfrac{3}{10}x & se\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$



Exemplo 6.1.

Se $f(x,y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)$, determine $f_y(y)$

$$f_y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)dx = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{3}{80}(x^2 + xy)dx$$

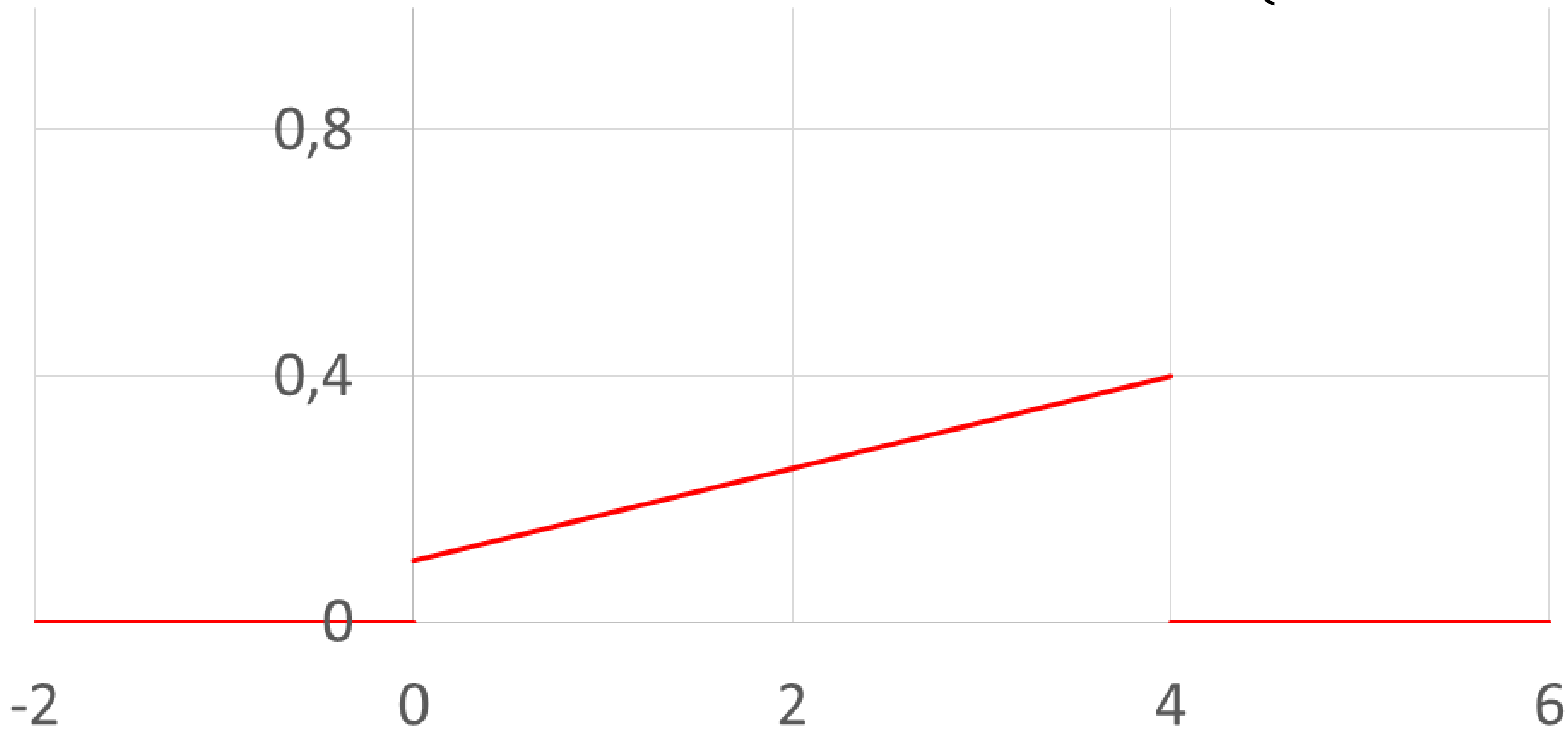
$$f_y(y) = \frac{3}{80}\int_0^2 (x^2 + xy)dx = \frac{3}{80}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + y\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2\right) = \frac{3}{80}\left(\frac{8}{3} + 2y\right)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{10} + \frac{3}{40}y$$

Prof. Dr. Renato de Oliveira Moraes

Gráfico de $f_y(y)$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10} + \frac{3}{40}y & caso\ 0 \le y \le 4 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$



Distribuição Normal Bivariada

Distribuição Normal (unidimensional)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Distribuição Normal Bivariada

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

Distribuição Marginal de X

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} \right) dy$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2}$$

Função de Distribuição

Variável unidimensional

$$f(x) \rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Variável bidimensional

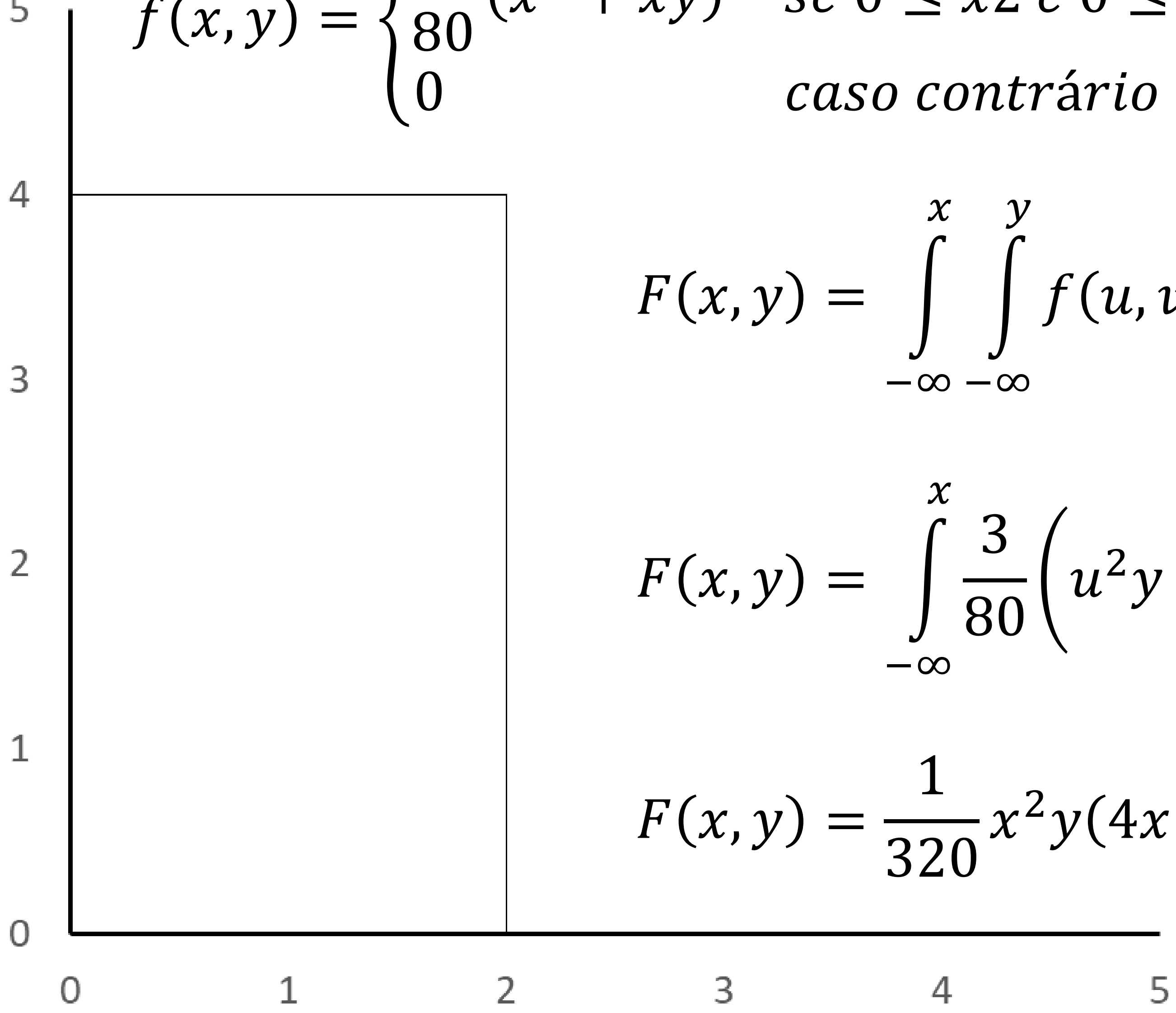
$$f(x;y) \rightarrow F(x,y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)du\,dv$$

Exemplo 6.1.

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional cuja densidade de probabilidade é dada por: $f(x,y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)$ para $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4$ sendo zero no complementar desse retângulo.

Determine $F(x;y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{80}(x^2 + xy) & se\ 0 \leq x2\ e\ 0 \leq y4 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

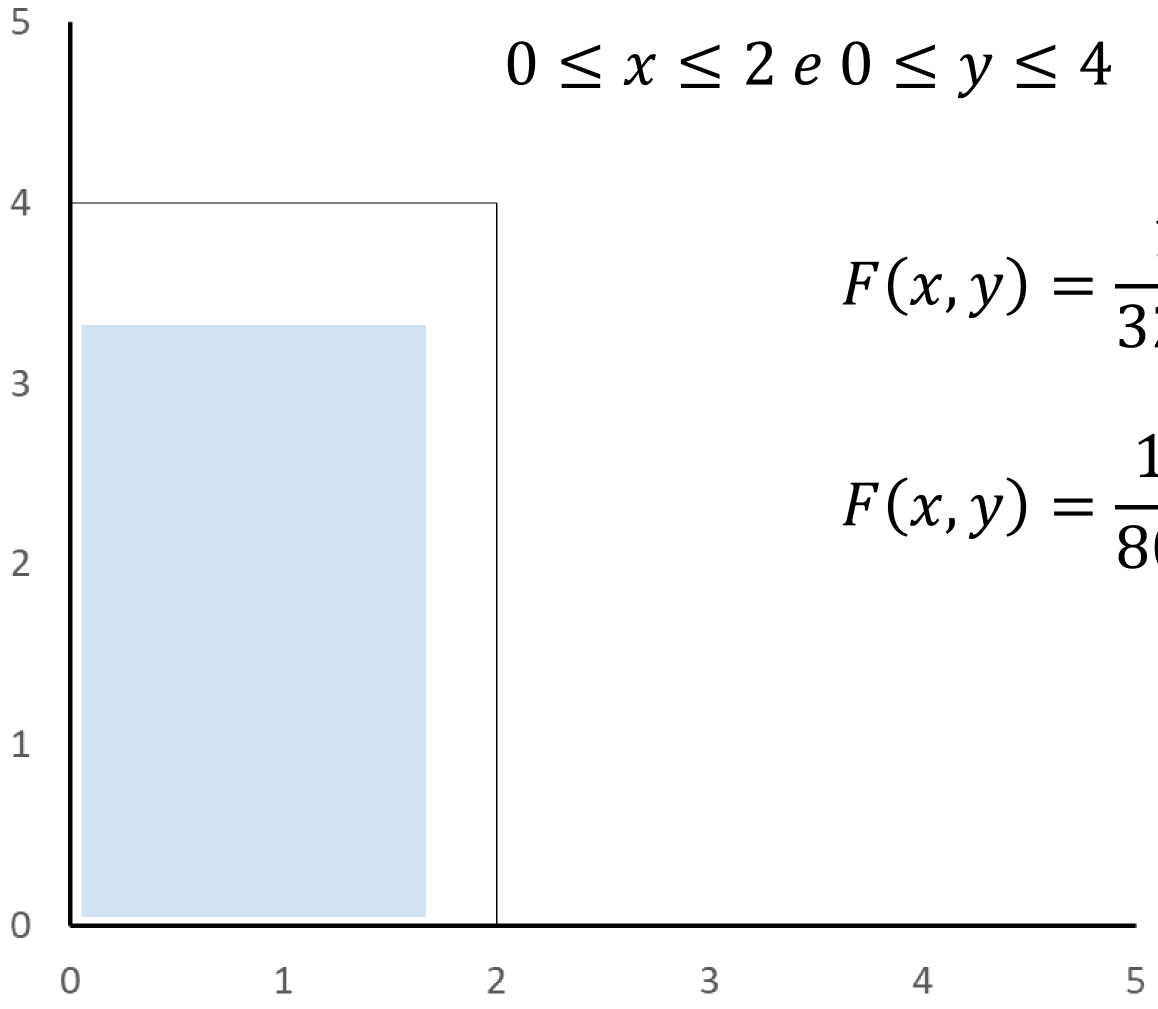


$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)du\,dv = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} \frac{3}{80}(u^2 + uv)dv \right) du$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{80}\left(u^2 y + u\frac{y^2}{2}\right) du$$

$$F(x,y) = \frac{1}{320}x^2 y(4x + 3y)$$

Função de Distribuição

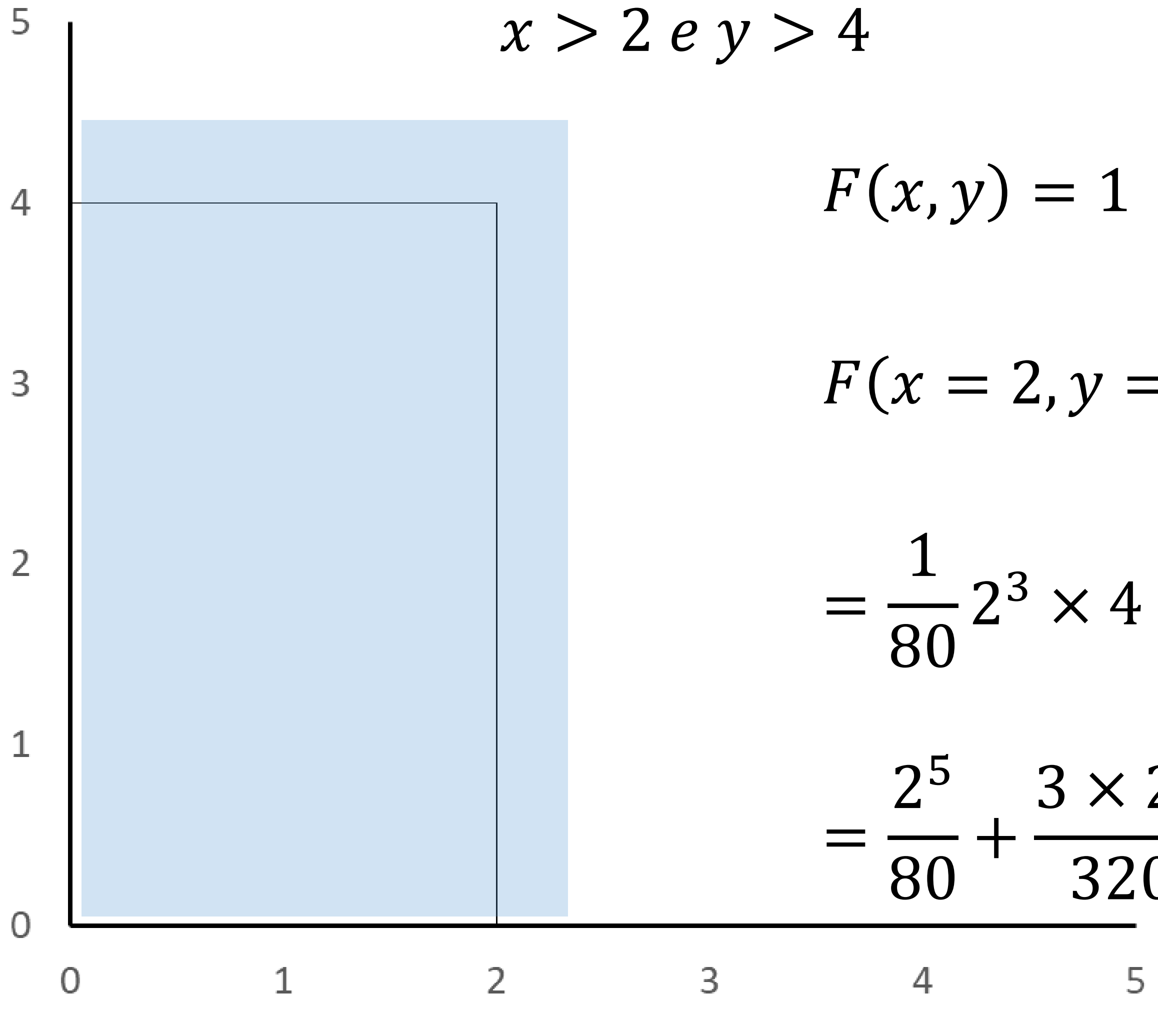


$$0 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq 4$$

$$F(x,y) = \frac{1}{320}x^2y(4x + 3y)$$

$$F(x,y) = \frac{1}{80}x^3y + \frac{3}{320}x^2y^2$$

Função de Distribuição



$$x > 2 \; e \; y > 4$$

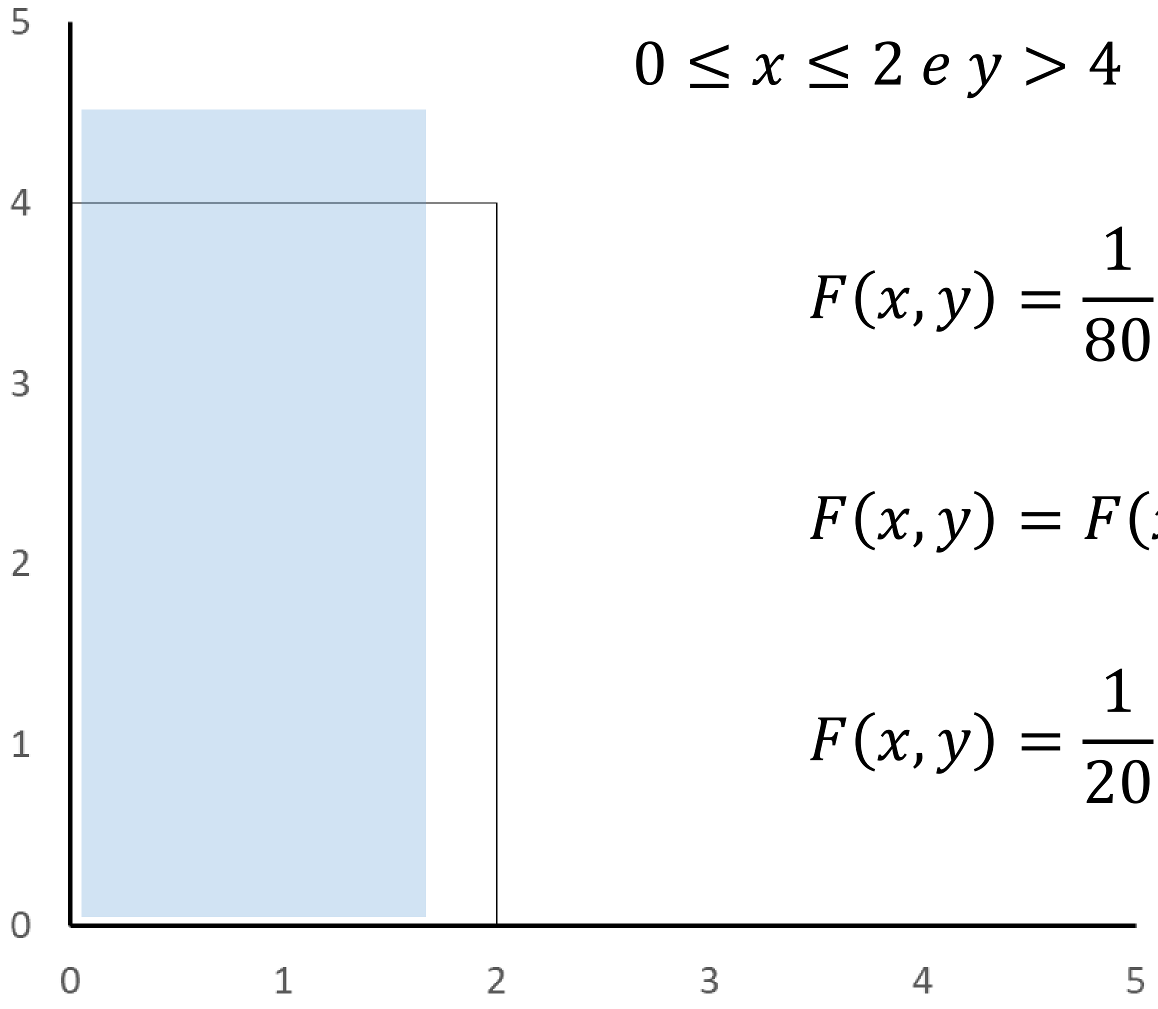
$$F(x, y) = 1$$

$$F(x = 2, y = 4) = \frac{1}{80} x^3 y + \frac{3}{320} x^2 y^2$$

$$= \frac{1}{80} 2^3 \times 4 + \frac{3}{320} 2^2 \times 4^2$$

$$= \frac{2^5}{80} + \frac{3 \times 2^6}{320} = \frac{2^7}{320} + \frac{3 \times 2^6}{320} = \frac{128 + 192}{320} = 1$$

Função de Distribuição



$$0 \leq x \leq 2 \; e \; y > 4$$

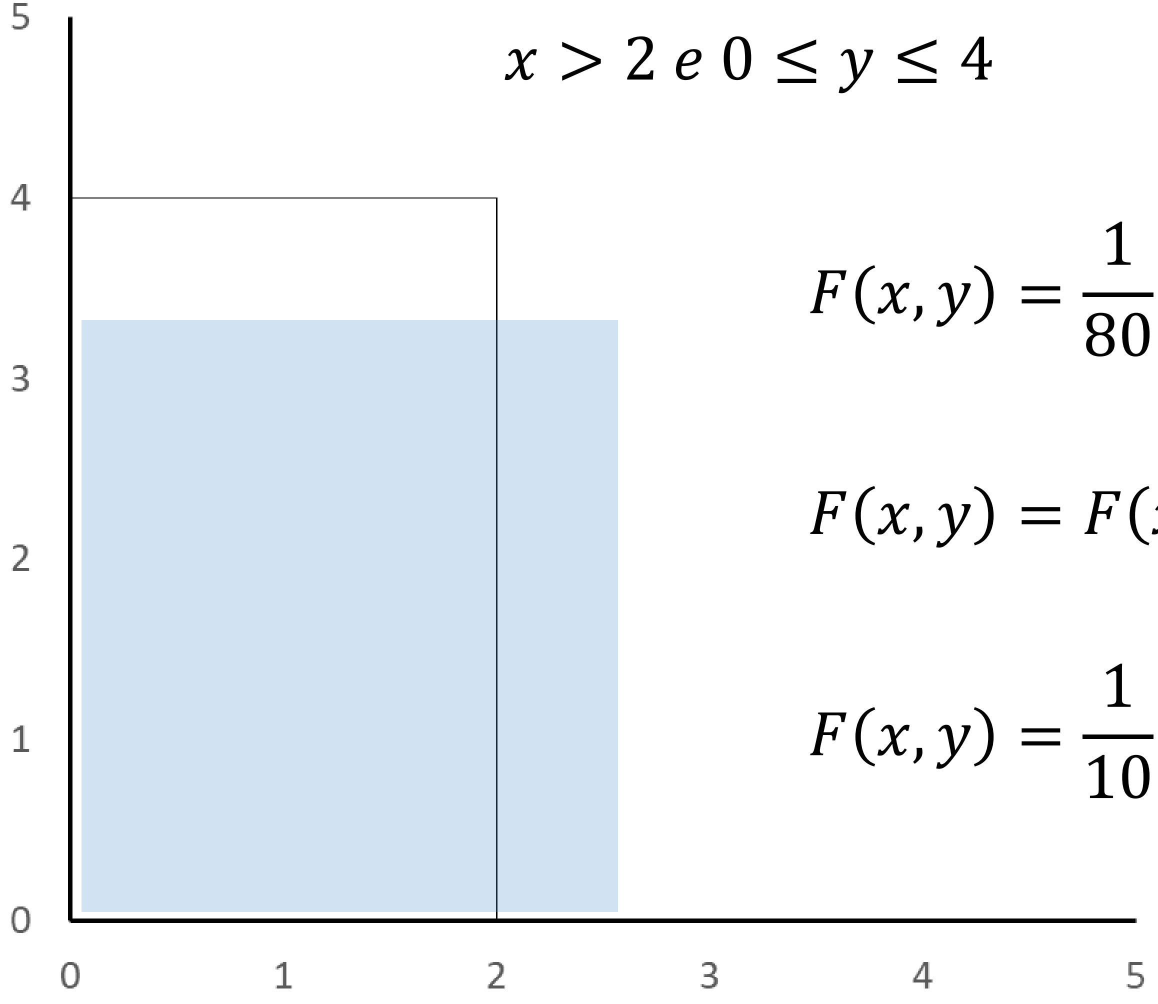
$$F(x,y) = \frac{1}{80}x^3y + \frac{3}{320}x^2y^2$$

$$F(x,y) = F(x, y = 4) = \frac{1}{80}x^3 4 + \frac{3}{320}x^2 4^2$$

$$F(x,y) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{3}{20}x^2$$

Prof. Dr. Renato de Oliveira Moraes

Função de Distribuição



$$x > 2 \; e \; 0 \leq y \leq 4$$

$$F(x,y) = \frac{1}{80}x^3y + \frac{3}{320}x^2y^2$$

$$F(x,y) = F(x=2,y) = \frac{1}{80}2^3y + \frac{3}{320}2^2y^2$$

$$F(x,y) = \frac{1}{10}y + \frac{3}{80}y^2$$

Propriedades da Função de Distribuição

i. $0 \leq F(x;y) \leq 1$

ii. A função é continua a direita de X e Y

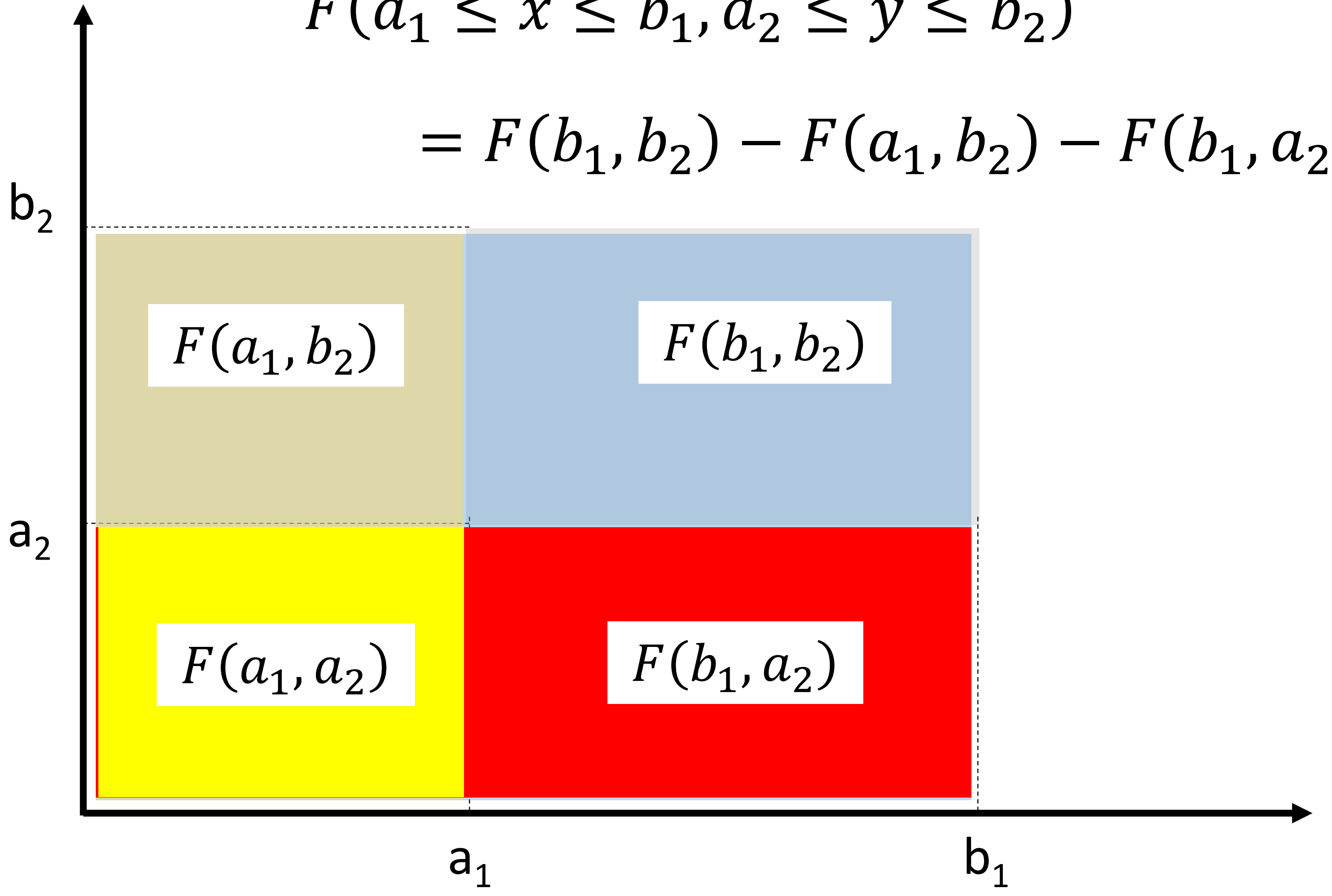
iii. $\lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0; \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0; \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$

iv. $F(a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2)$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

$$F(a_1 \le x \le b_1, a_2 \le y \le b_2)$$

$$= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$



Prof. Dr. Renato de Oliveira Moraes

Independência

Considere as variável aleatória bidimensional (X, Y) e a função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$.

As variáveis X e Y serão consideradas independentes se

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

Pode-se também demonstrar que, se X e Y são independentes, propriedade semelhante em relação a função de distribuição também existe

$$F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

Exemplo 1

Considere a seguinte variável aleatória bidimensional

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & se\ 0 < x < \infty\ e\ 0 < y < \infty \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

X e Y são independentes ?

Prof. Dr. Renato de Oliveira Moraes

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dy$$

$$fazendo\ z = y + 1, temos\ que\ dz = dy, se\ y = 0 \rightarrow z = 1, e\ se\ y = \infty \rightarrow z = \infty$$

$$\int_0^{\infty} xe^{-x(y+1)}dy = \int_1^{\infty} xe^{-xz}dz = -e^{-xz}\Big|_1^{\infty} = e^{-x}$$

$$f_X(x) = e^{-x}$$

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-x(y+1)}dx = \frac{1}{(y+1)^2} - e^{-x(y+1)}\Big|_{x=0}^{x=\infty}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}(-e^{\infty} + e^{0}) = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$f_X(x) = e^{-x}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$$f_X(x) \times f_Y(y) = \frac{e^{-x}}{(y+1)^2} \neq xe^{-x(y+1)} = f(x,y)$$

Portanto, X e Y não são independentes !!

Exemplo 2

Considere a seguinte variável aleatória bidimensional

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu^2 y e^{-(\lambda x+\mu y)} & se\ 0 < x < \infty\ e\ 0 < y < \infty \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$

X e Y são independentes ?

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty} \lambda\mu^2 y e^{-(\lambda x + \mu y)} dy = \lambda\mu^2 \int_0^{\infty} y e^{-\lambda x} e^{-\mu y} dy$$

$$f_X(x) = \lambda\mu^2 e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} y e^{-\mu y} dy = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_0^{\infty} y\mu e^{-\mu y} dy =$$

O "truque" para resolver está integral é perceber que ela corresponde ao valor esperado de uma variável exponencial Y (E[Y]) com parâmetro μ (e não λ, como é o usualmente representado). Sabemos que $E[Y] = {}^{1}/_{\mu}$

$f_X(x) = \lambda\mu e^{-\lambda x} \frac{1}{\mu} = \lambda e^{-\lambda x}$ (que é uma distribuição exponencial)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda\mu^2 y e^{-(\lambda x+\mu y)} dx$$

$$f_Y(y) = \lambda\mu^2 y \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-\mu y} dx = \mu^2 y e^{-\mu y} \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$f_Y(y) = \mu^2 y e^{-\mu y} \left(e^{-\lambda x}\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \mu^2 y e^{-\mu y} \left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{0}}\right)$$

$$f_Y(y) = \mu^2 y e^{-\mu y}$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f_Y(y) = \mu^2 y e^{-\mu y}$$

$$f_X(x) \times f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \times \mu^2 y e^{-\mu y} = \lambda \mu^2 y e^{-\lambda x - \lambda y} = f(x, y)$$

Portanto, X e Y são independentes.

$$E[XY] = E[X] \times E[Y]$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)yf_Y(y)dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy\right)$$

$$E[XY] = E[X] \times E[Y]$$

Covariância

$$Variância: Var[X] = \sigma_X^2 = \sigma^2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_X)^2 \, p(x_i) \\ ou \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \end{cases}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Covariância: Cov[X, Y] = \sigma_{XY} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) \, p(x_i, y_i) \\ ou \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \end{cases}$$

Covariância

$$\text{Covariância}: Cov[X,Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

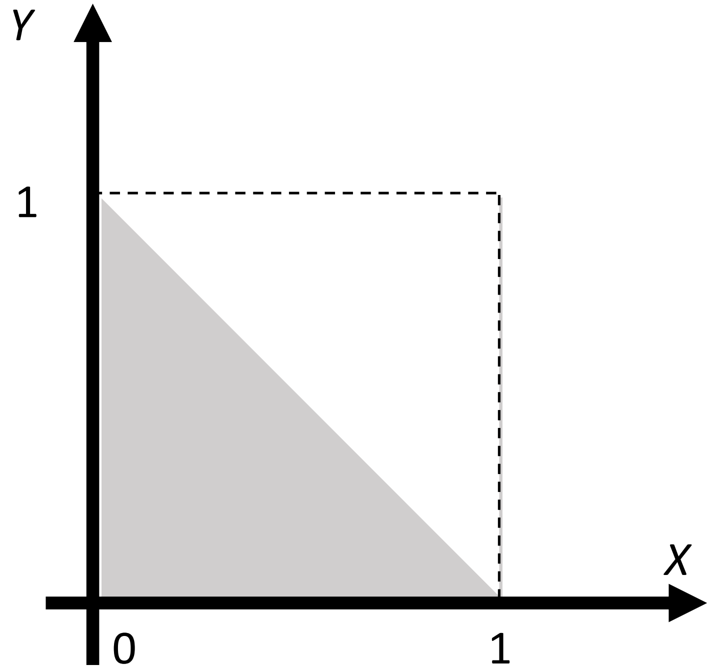
$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

Se X e Y são independentes, $E[XY] = E[X]E[Y] \rightarrow Cov[X,Y] = 0$

Exemplo

Considere a seguinte variável aleatória bidimensional

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & se\ 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$$



Qual é a covariância entre X e Y?

Covariância

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dx\,dy$$

$$E[XY] = \int_0^1\int_0^{1-x} xy24xydy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} 24x^2y^2dy\,dx = 8\int_0^1 x^2(1-x)^3dx$$

$$E[XY] = \frac{2}{15}$$

Covariância

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \frac{2}{15}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$$

Distribuição Marginal de X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{1-x} 24xydy = 12x(1-x)^2$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_0^1 x12x(1-x)^2dx = \int_0^1 12x^2(1-x)^2dx$$

$$E[X] = \int_0^1 12x^2 - 24x^3 + 12x^4dx = \left[4x^3 - 6x^4 + \frac{12x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Distribuição Marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{1-y} 24xydx = 12y(1-y)^2$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = \int_0^1 y12y(1-y)^2dy = \int_0^1 12y^2(1-y)^2dy$$

$$E[Y] = \int_0^1 12y^2 - 24y^3 + 12y^4dx = \left[4y^3 - 6y^4 + \frac{12y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Covariância

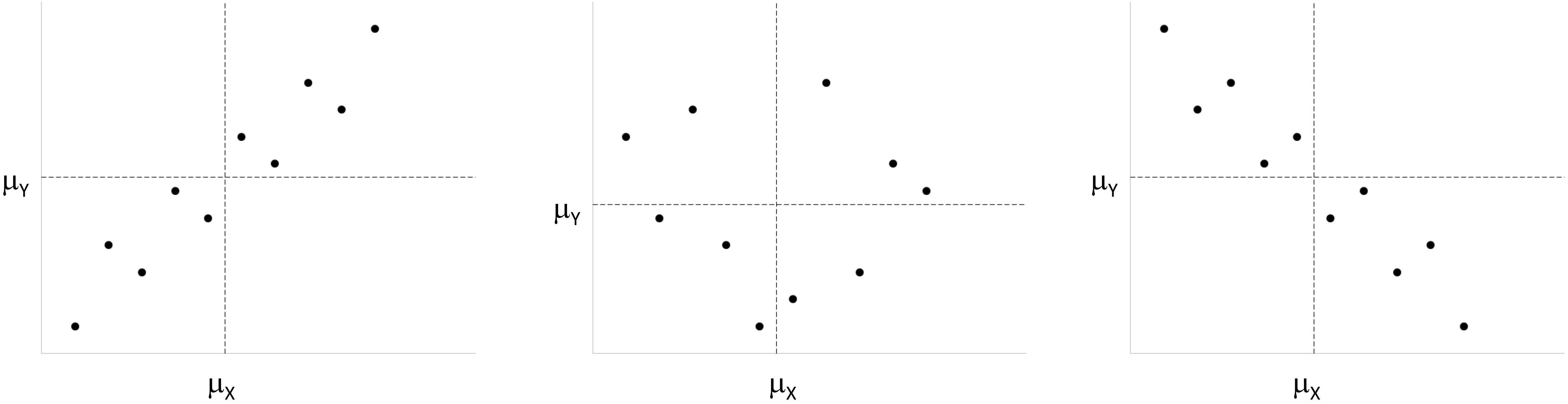
$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$E[XY] = \frac{2}{15} \qquad E[X] = \frac{2}{5} \qquad E[Y] = \frac{2}{5}$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

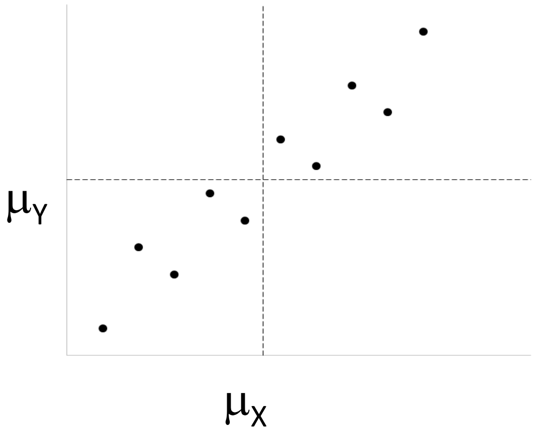
$$Cov[X,Y] = \frac{-2}{75}$$

Covariância: interpretação



$Cov[X,Y] > 0$ $\qquad$ $Cov[X,Y] = 0$ $\qquad$ $Cov[X,Y] < 1$

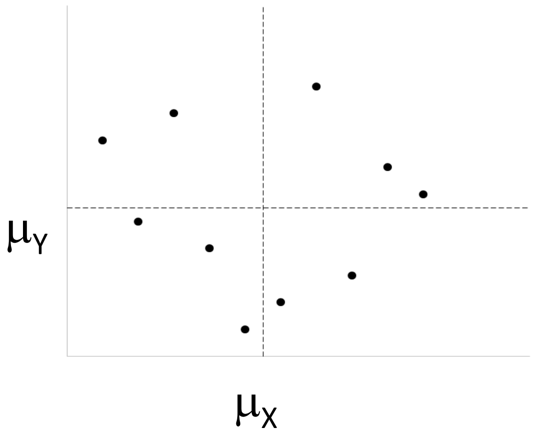
Coeficiente de Correlação



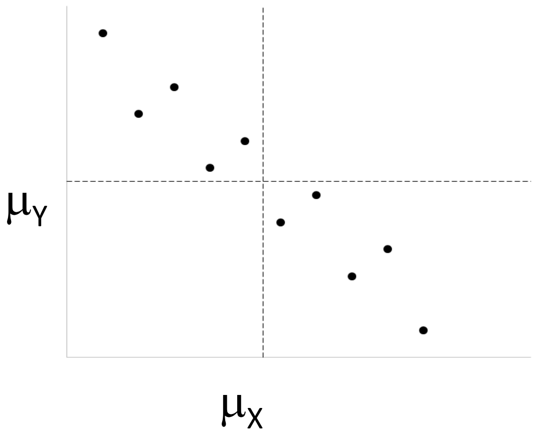
$\rho_{X,Y} > 0$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \times \sigma_Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X] \times Var[Y]}}$$

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq +1$$



$\rho_{X,Y} = 0$



$\rho_{X,Y} < 1$

Probabilidade condiciona

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Distribuição condicional

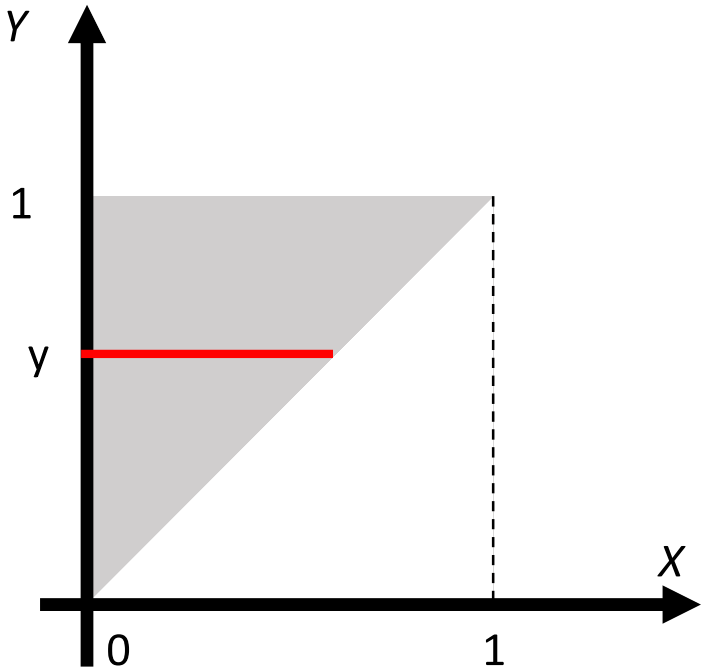
$$f(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_X(x)}$$

Exemplo

$f(x, y) = 21x^2y^3$ para valores de x e y tais que $0 < x < y < 1$

$f(x|y) = ?$

$f(y|x) = ?$

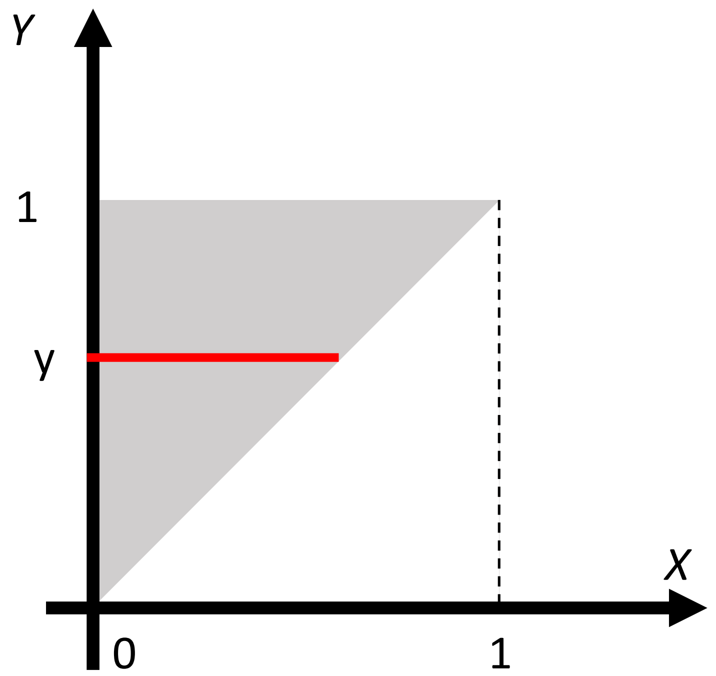


$f(x|y) = ?$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{y} f(x,y)dx$$

$$f_Y(y) = 7y^6$$

$$f(x|y) = \frac{f(y,x)}{f_Y(y)} = \frac{21x^2y^3}{7y^6} = 3x^2y^{-3}$$

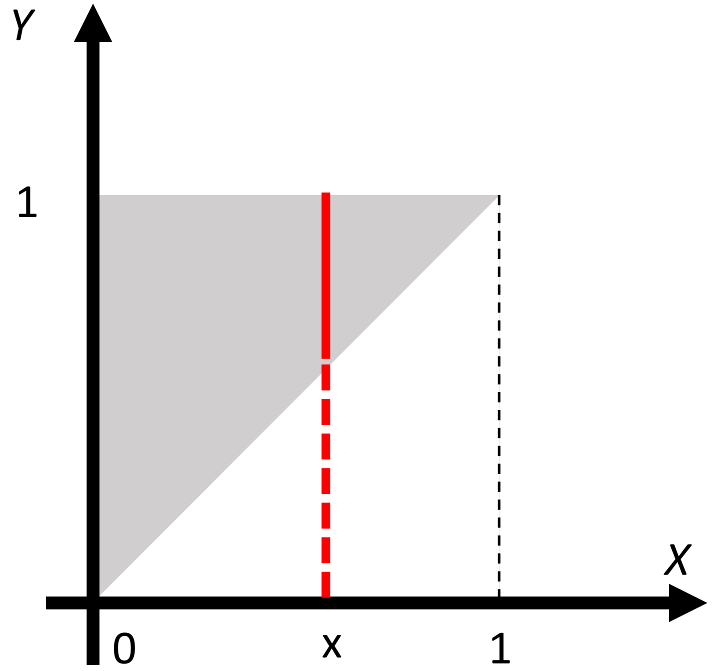


$$f(y|x) = ?$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{x}^{1} f(x,y)dy$$

$$f_X(x) = \frac{21x^2(1-x^4)}{4}$$

$$f(y|x) = \frac{f(y,x)}{f_X(x)} = \frac{21x^2y^3}{\frac{21x^2(1-x^4)}{4}} = \frac{4y^3}{1-x^4}$$



Esperança Condicional

$$E[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)dy$$

No caso unidimensional era:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy$$

$E[Y|X=x]=?$

$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y|x)dy = \int_{x}^{1} y \frac{4y^3}{1-x^4} dy$$

$$E[Y|X=x] = \frac{4}{5}\left(\frac{1-x^5}{1-x^4}\right)$$