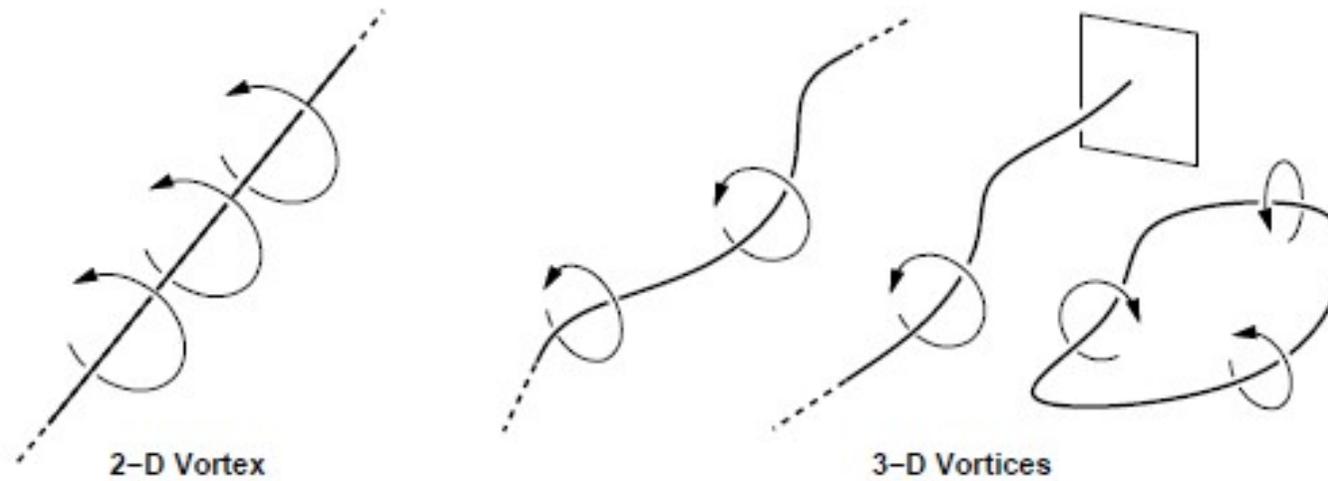


Teoria de Asa

Parte 2: Asa finita

Velocidade Induzida por um Vórtice Tridimensional

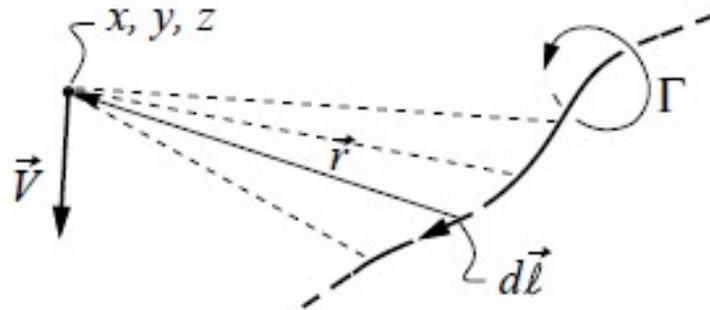


Extraído de MIT lecture notes, fluids.

De acordo com as leis da vorticidade de Helmholtz, vórtices formam estruturas tridimensionais complexas, em geral compostas de circuitos fechados (ou os vórtices se estendem entre as fronteiras do fluido).

A velocidade induzida em um ponto de um fluido por um trecho $d\vec{\ell}$ de um filamento de vórtice é dada pela lei de Biot-Savart:

$$d\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

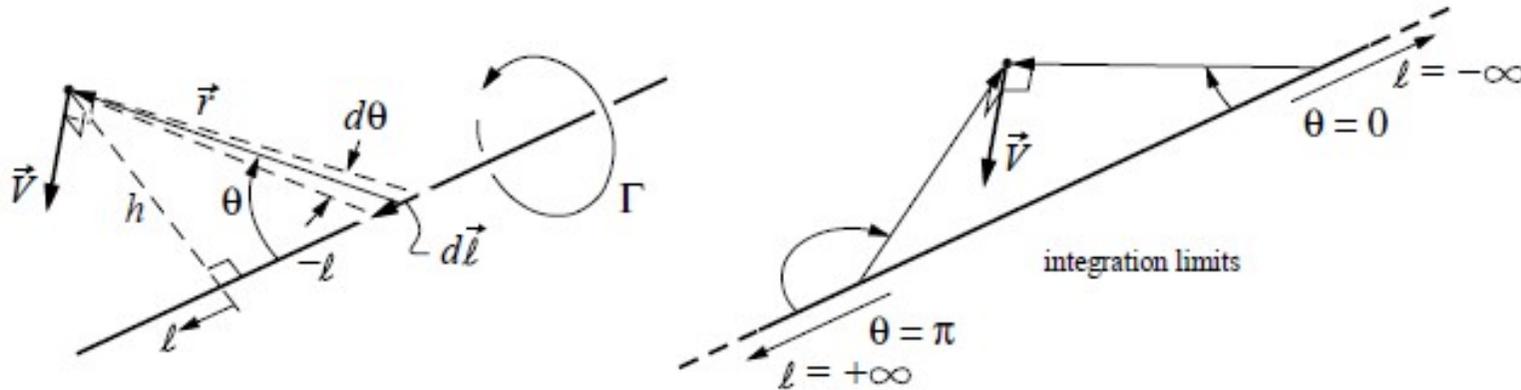


Extraído de MIT lecture notes, fluids.

A velocidade induzida por todo o vórtice será obtida integrando sobre todo o comprimento do filamento de vórtice. Se o vórtice for extremamente longo, isso resulta:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

A velocidade induzida em um ponto por um vórtice bidimensional é uma particularização da lei de Biot-Savart:

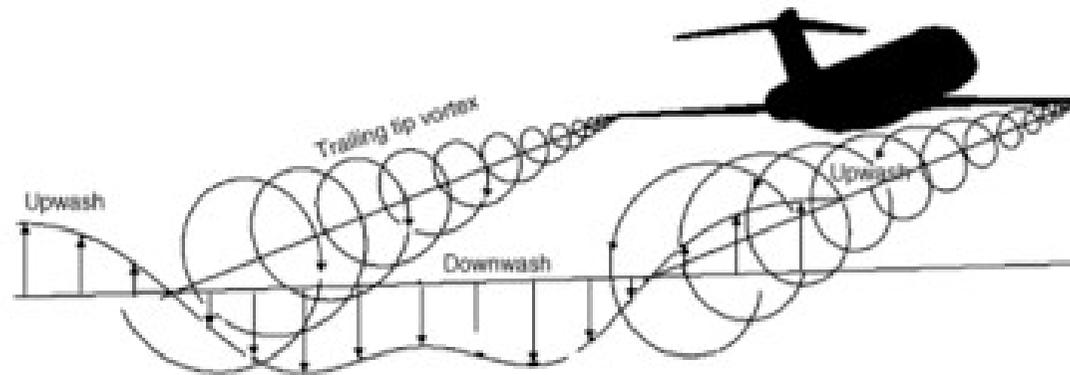


Extraído de MIT lecture notes, fluids.

$$|\vec{r}| = r = \frac{h}{\sin \theta} \quad ; \quad l = -\frac{h}{\tan \theta} \quad ; \quad d\ell = \frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta \quad ; \quad |d\vec{\ell} \times \vec{r}| = d\ell r \sin \theta$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi h}$$

A lei de Biot-Savart permite notar que, no caso dos vórtices de ponta de asa, teremos a indução de uma velocidade descendente no espaço entre as pontas das asas (downwash), tanto à jusante quanto à montante da aeronave.



Extraído de Cui e Zhang (2010).

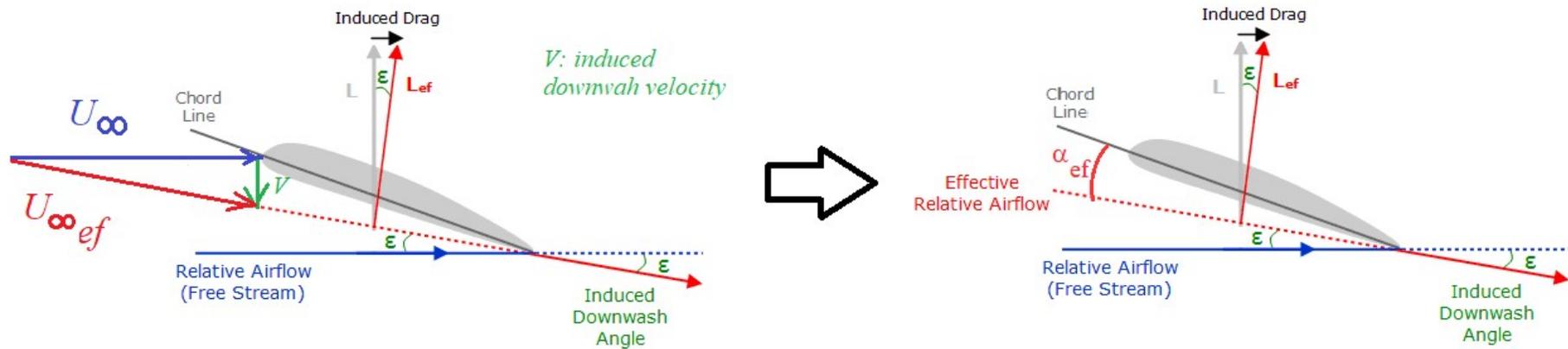
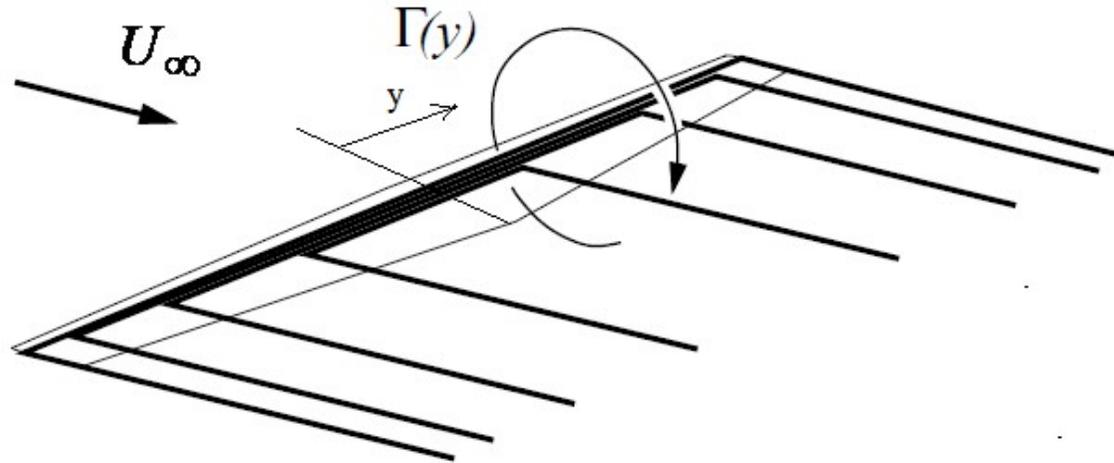


Figura extraída e adaptada da Wikipedia

O efeito do downwash à montante da asa é mudar a direção da corrente incidente, diminuindo o ângulo efetivo de ataque, $\alpha_{ef} = \alpha - \epsilon$. Além disso, a sustentação efetiva obtida pelo teorema de Kutta-Joukowski é ortogonal à direção da corrente efetiva, o que, por decomposição, permite observar um arrasto induzido que irá se somar ao arrasto normal da asa.

Teoria da Linha de Sustentação de Prandtl



Se a corda variar ao longo da envergadura, as linhas de vórtice não mais se concentrarão na ponta das asas. Haverá escoamento de baixo para cima da asa ao longo de toda a envergadura, com as linhas de vórtices que saem da asa se distribuindo ao longo de toda a envergadura. Assim, a circulação $\Gamma(y)$ vai diminuindo ao longo da asa, à medida que linhas de vórtices a deixam. Prandtl estudou qual a distribuição de circulação que minimizaria o arrasto induzido.

Prandtl concluiu que as distribuições de circulação e de corda que minimizam o arrasto induzido são elípticas:

$$C(y) = C_o \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_o \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Onde C_o e Γ_o são a corda e circulação para $y = 0$.



Extraído de <http://www.hangar11.co.uk/spitgallery.html>
O mais icônico exemplo do uso de asa elíptica: caça britânico spitfire.

Resultados para asa elíptica:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

Onde RA é a Razão de Aspecto: $RA = \frac{b^2}{Ap}$ (em inglês AR , de *aspect ratio*)

$$C_L = \frac{2\pi \text{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

onde o arqueamento é dado por $\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$

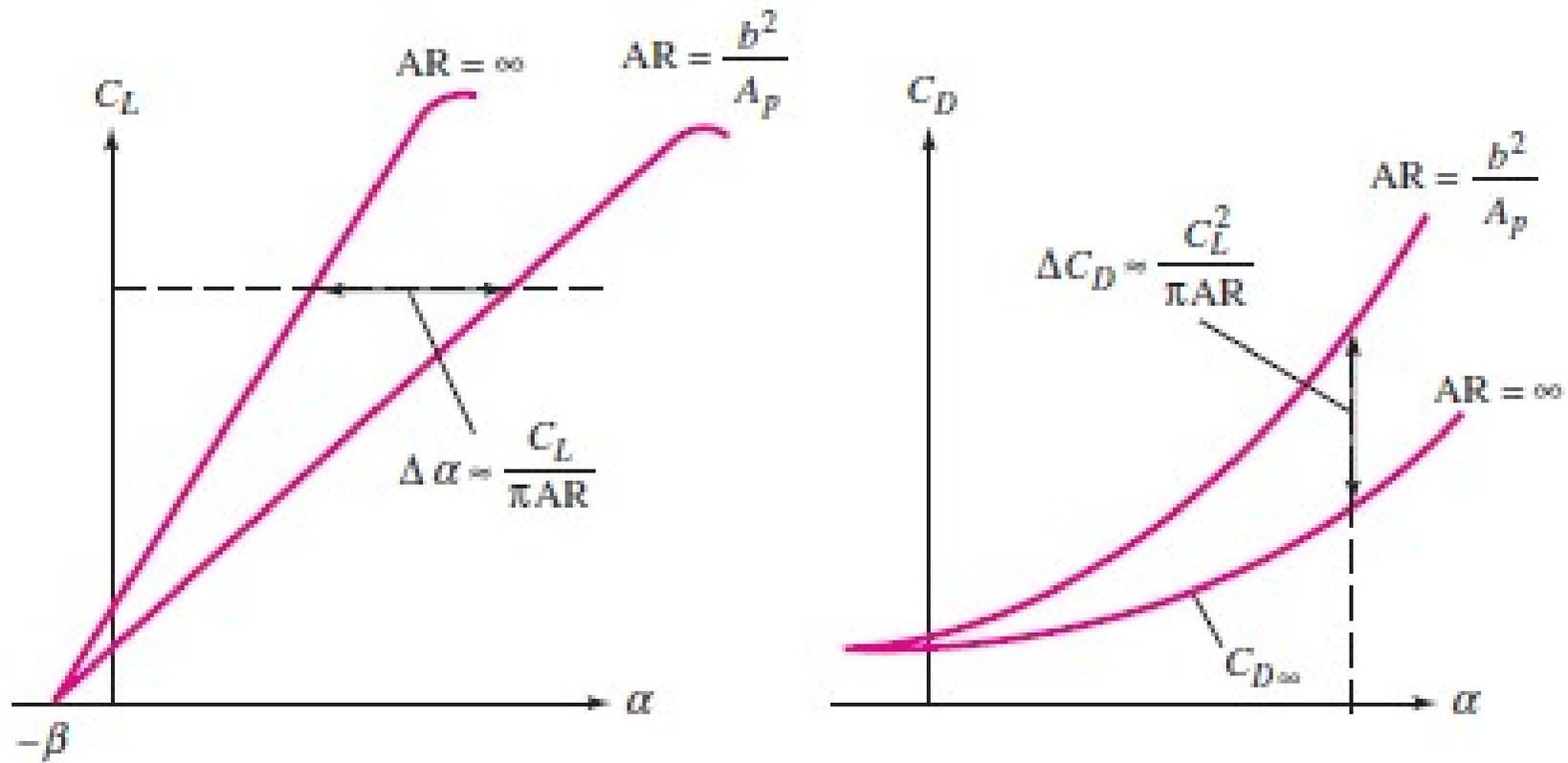


Figura extraída de White, F.M., “Fluid Mechanics”, 7th edition.

Problema P7.120: Mostre que a máxima relação C_L/C_D ocorre quando $C_D = 2C_{D\infty}$. Qual o valor de L/D máximo (onde L é a força de sustentação e D é a força de arrasto) e o valor do ângulo de ataque α para uma asa simétrica com razão de apecto $RA=5$ e $C_{D\infty}=0,009$?

Solução: O coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}$$

Isso resulta:

$$C_L = [(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}$$

Ou então:

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{[(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}}{C_D}$$

Fazendo a derivada dessa expressão em relação à C_D :

$$\frac{d\left(\frac{C_L}{C_D}\right)}{dC_D} = \frac{\pi RA\left(C_{D\infty} - \frac{1}{2}C_D\right)}{C_D^2 [(C_D - C_{D\infty})\pi RA]^{1/2}}$$

Essa derivada será nula para $C_D = 2C_{D\infty}$.

Além disso, é fácil ver que, para $C_D > 2C_{D\infty}$ a derivada é negativa, e para $C_D < 2C_{D\infty}$ a derivada é positiva. Assim:

Se temos $C_D = 2C_{D\infty}$ a relação C_L/C_D será maximizada.

Quanto ao restante da questão, a situação de L/D máximo corresponde a C_L/C_D máximo. Voltando à expressão do coeficiente de arrasto:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty} \text{ quando temos } L/D \text{ máximo. Assim:}$$

$$C_D = 2 \times 0,009 = 0,018$$

O coeficiente de sustentação quando temos L/D máximo é dado por:

$$\frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D\infty}$$

Logo:

$$C_L = \sqrt{\pi R A C_{D\infty}} = \sqrt{\pi \times 5 \times 0,009} = 0,38$$

Portanto:

$$L/D \text{ máximo} = C_L / C_D \text{ máximo} = \frac{0,38}{0,018} \cong 21$$

Finalmente, o ângulo de ataque pode ser calculado por:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

Como o aerofólio é simétrico, $\beta = 0^\circ$. Na situação ótima em que temos C_L/C_D máximo:

$$0,38 = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{5}}$$

Isso resulta $\alpha = 4,9^\circ$

Exemplo: Um hidrofólio simétrico se move com velocidade $U=15\text{m/s}$ em água salgada ($\rho=1025\text{kg/m}^3$) com sua relação $(C_L/C_D)_{\max}=18$. A área planiforme A_p é de 3m^2 e a sustentação obtida é de 120 kN . Estime a razão de aspecto RA e o ângulo de ataque em graus.

Solução - O coeficiente de sustentação é dado por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_p} = \frac{120000}{\frac{1}{2} \times 1025 \times 15^2 \times 3} \Rightarrow C_L = 0,35$$

Como o hidrofólio está na situação em que C_L/C_D é máximo:

$$(C_L/C_D)_{\max} = \frac{C_L}{2C_{D\infty}} = 18 \Rightarrow C_{D\infty} = \frac{C_L}{2 \times 18} = \frac{0,35}{36} \Rightarrow C_{D\infty} \cong 0,01$$

Do coeficiente de arrasto na condição em que C_L/C_D é máximo:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty}$$

$$\text{Isso resulta } \frac{C_L^2}{\pi RA} = C_{D\infty} \Rightarrow RA = \frac{C_L^2}{\pi C_{D\infty}} = \frac{0,35^2}{\pi \times 0,01}$$

$$\text{Isso resulta } \boxed{RA=3,9}$$

Finalmente, da expressão do coeficiente de sustentação:

$$C_L = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{RA}}$$

Como o hidrofólio é simétrico, $\beta = 0^\circ$. Assim:

$$0,35 = \frac{2\pi \operatorname{sen}(\alpha + 0^\circ)}{1 + \frac{2}{3,9}}$$

Isso resulta $\alpha = 4,8^\circ$

Bibliografia

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

<http://web.mit.edu/16.unified/www/SPRING/fluids/Spring2008/LectureNotes/f06.pdf>