

Lista 7
Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Os exercícios dessa lista foram retirados do livro *Um Curso de Cálculo, Volume 1, Hamilton Luiz Guidorizzi, 5ª edição*. Serão indicadas as seções de onde cada exercício foi retirado, mas as numerações não serão as mesmas.

É necessário justificar as passagens na solução dos exercícios abaixo.

Seção 7.8

Exercício 1. Determine f' , f'' e f''' .

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = 5x^2 - \frac{1}{x^3}$

Seção 7.9

Exercício 2. Seja $y = \frac{x^3}{x + \sqrt{x}}$. Calcule

(a) $\frac{dy}{dx}$

(b) $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1}$

Exercício 3. Seja $y = \frac{-2}{x^2 + k}$, k constante. Verifique que $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 0$.

Exercício 4. Seja $y = \frac{1}{x}$. Verifique que $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} = 6 \frac{dy}{dx}$.

Exercício 5. Seja $y = te^t$. Verifique que $\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 0$.

Seção 7.11

Exercício 6. Determine a derivada.

(a) $y = \text{sen } 4x$

(b) $f(x) = e^{3x}$

(c) $g(t) = \ln(2t + 1)$

(d) $x = e^{\text{sen } t}$

(e) $f(x) = \cos e^x$

(f) $y = (\text{sen } x + \cos x)^3$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

(h) $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$

(i) $f(x) = e^{\tan x}$

(j) $y = \text{sen}(\cos x)$

(k) $g(t) = (t^2 + 4)^4$

(l) $f(x) = \cos(x^2 + 3)$

(m) $y = \sqrt{x + e^x}$

(n) $y = \sec 3x$

Exercício 7. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

Exercício 8. Derive.

(a) $y = e^{-x} \cos x$

(b) $f(x) = e^{-x^2} + \ln(2x + 1)$

(c) $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

(d) $y = \frac{\cos 5x}{\text{sen } 2x}$

(e) $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$

(f) $e^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x})$

(g) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(h) $y = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

(i) $y = [\ln(x^2 + 1)]^3$

(j) $y = \ln(\sec x + \tan x)$

(k) $y = \cos^3 x^3$

(l) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Exercício 9. Calcule a derivada segunda.

(a) $y = \cos 4t$

(b) $y = e^{-x^2}$

(c) $y = \frac{e^x}{x + 1}$

(d) $\ln(x^2 + 1)$

(e) $y = e^{-x} \cos 2x$

(f) $y = \frac{3x + 1}{x^2 + x}$

(g) $y = \sin(\cos x)$

(h) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

(i) $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$

(j) $y = x\sqrt[3]{x + 2}$

Exercício 10. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja f dada por $f(x) = xg(x^2)$. Calcule $f'(1)$ supondo $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.

Exercício 11. Derive.

(a) $y = \cotan x^2$

(b) $y = \sec(\tan x)$

(c) $y = e^{\tan x^2}$

(d) $y = \operatorname{cosec} 2x$

(e) $y = \ln(\sec 3x + \tan 3x)$

Seção 7.12

Exercício 12. Calcule a derivada.

(a) $f(x) = 5^x + \log_3 x$

(b) $y = 2^{x^2} + 3^{2x}$

(c) $g(x) = 3^{2x+1} + \log_2(x^2 + 1)$

(d) $f(x) = x^{\operatorname{sen} 3x}$

(e) $g(x) = (3 + \cos x)^x$

(f) $y = x^x \operatorname{sen} x$

(g) $y = 10^x + 10^{-x}$

(h) $y = (2 + \operatorname{sen} x)^{\cos 3x}$

(i) $y = \ln(1 + x^x)$

(j) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(k) $y = x^{x^x}$

(l) $y = x^\pi + \pi^x$

(m) $y = (1 + x)^{e^{-x}}$

(n) $y = (3 + \pi)^{x^2}$

(o) $y = (x^2 + 1)^\pi$

Seção 7.14

Exercício 13. Calcule a diferencial.

(a) $y = x^3$

(b) $y = x^2 - 2x$

(c) $y = \frac{x}{x+1}$

(d) $y = \sqrt[3]{x}$

Exercício 14. Seja $A = l^2$, $l > 0$.

(a) Calcule a diferencial.

(b) Interprete geometricamente o erro que se comete na aproximação ΔA por dA . (Olhe para $A = l^2$ como a fórmula para o cálculo da área do quadrado de lado l .)

Seção 7.16

Exercício 15. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

(a) $f(x) = x^2 - 3x$, no ponto de abscissa 0

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto de abscissa 8.

Exercício 16. Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta que é tangente ao gráfico de f e paralela à reta $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Exercício 17. Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

Exercício 18. Determine a equação de uma reta, não vertical, que passa pelo ponto $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ e que seja normal ao gráfico de $y = x^3$.

Seção 8.2

Exercício 19. Determine a derivada.

(a) $f(x) = \arcsen 3x$

(b) $g(x) = \arcsen x^3$

(c) $y = 3 \arctan (2x + 3)$

(d) $y = \frac{\text{sen } 3x}{\arctan 4x}$

(e) $y = x^2 e^{\arctan 2x}$

(f) $y = e^{-3x} + \ln(\arctan x)$

Seção 9.2

Exercício 20. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (calcule para isso todos os limites necessários).

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

(d) $x = \frac{t}{1+t^2}$

(e) $y = e^{-x^2}$

(f) $g(t) = e^{\frac{1}{t}}$

(g) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{1+x^2}$

(h) $g(x) = xe^x$

(i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Exercício 21. Calcule.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\ln x}$

Exercício 22. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico (para isto, calcule todos os limites necessários).

(a) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

(b) $g(x) = \frac{x}{2 \ln x}$

Exercício 23. Prove que, para todo $x > 0$, tem-se

(a) $e^x > x + 1$

(b) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Seção 9.3

Exercício 24. Estude a função dada com relação à concavidade e pontos de inflexão, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

(b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1$

(c) $f(x) = xe^{-2x}$

(d) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$

(e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

(g) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

(h) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

(i) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Seção 9.4

Exercício 25. Calcule.

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{10} - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} [x - \sqrt[3]{x^3 - x}]$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x-1}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\cos 3x]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

Exercício 26. Calcule.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \tan^3 x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}$$

Seção 9.5

Exercício 27. Esboce o gráfico.

$$(a) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

(c) $y = \frac{x^2}{x+1}$

(d) $f(x) = e^{-x^2}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

(f) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

(g) $y = e^x - e^{3x}$

(h) $f(x) = x^4 - 2x^2$

(i) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$

(j) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$

(k) $y = \frac{4x + 3x^2}{1 + x^2}$

Algumas Respostas

Exercício 1:

(a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e $f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$

(b) $f'(x) = 10x + \frac{3}{x^4}$, $f''(x) = 10 - \frac{12}{x^5}$ e $f'''(x) = 60x^{-6}$

Exercício 2:

(a) $\frac{x^3(4\sqrt{x} + 5)}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}$

(b) $\frac{9}{8}$

Exercício 6:

(a) $4 \cos 4x$

(b) $3e^{3x}$

(c) $\frac{2}{2t + 1}$

(d) $\cos t e^{\sin t}$

(e) $-\sin e^x e^x$

(f) $3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x)$

(g) $\frac{2}{3(x+1)^2} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$

(h) $\frac{2t + 3}{t^2 + 3t + 9}$

(i) $e^{\tan x} \sec^2 x$

(j) $-\cos \cos x \sin x$

(k) $8t(t^2 + 4)^3$

(l) $-2x \sin(x^2 + 3)$

(m) $\frac{1 + e^x}{2\sqrt{1 + e^x}}$

(n) $3 \tan 3x \sec 3x$

Exercício 7:

10