MAP 3122: Métodos Numéricos e Aplicações
Prova Substitutiva 1 (3 horas) - 20/06/2020

Prof. Antoine Laurain

A prova é individual. Utilize somente resultados dados em sala de aula. Calculadora e notas de aula são permitidos. **Justifique suas respostas e verifique seus cálculos**.

Exercício 1. *(2.5 pontos) Um vaso de* $0,3$ *m de altura tem seções transversais de área* $\frac{e^{2h}}{3} - \frac{h}{2}$ *para* h *de* 0 *a* 0.3 *m. O volume de água (em* m^3*) que ele contém, estando cheio até uma altura* x*, é dado por* $V(x) = \int_0^x (\frac{e^{2h}}{3} - \frac{h}{2})dh$.

1. *Estudando as variações de* V'*, mostre que* V' *tem um único ponto de mínimo em* $\mathbb{R}$*, e calcule uma expressão explícita para esse ponto de mínimo. Use este resultado para mostrar que* $V'(x) > 0$ *para todos* $x \in \mathbb{R}$.

2. *Queremos encontrar até que altura* x^* *deve-se encher o vaso para que ele contenha* $0.05m^3$ *de água. Mostre que* x^* *está no intervalo* $[0.1, 0.17]$*. Qual ponto inicial deveríamos escolher neste intervalo para obter uma sequência monotônica usando o método de Newton? Use um resultado do curso para justificar a escolha deste ponto inicial.*

3. *Use o método de Newton para aproximar a solução* x^* *com precisão pré-fixada* $\delta = 5 \times 10^{-4}$.

Exercício 2. *(2.5 pontos) Consideramos a EDO de segunda ordem seguinte:*

$$x''(t) + tx'(t) + 2x(t) = 0, \qquad x(0) = 4, \qquad x'(0) = 2.$$

1. *Use o método de Euler com passo* $h = 0.5$ *para calcular uma aproximação de* $x(1)$.

2. *Calcule uma aproximação de* $x(1)$ *usando o método numérico seguinte com passo* $h = 1$*:*

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right).$$

Exercício 3. *(2.5 pontos) Consideramos o polinômio* $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$*. Sabemos que o polinômio* p *possui uma única raiz* $x^\star$*, e que* $x^\star \in [\frac{7}{4}, 2]$*. Definimos a sequência* $x_{k+1} = \phi(x_k)$ *com* $x_0 = 2$*, onde* $\phi(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

1. *Mostre que existe um* $0 < M < 1$ *tal que* $|\phi'(x)| \leq M$ *para todo* $x \in [\frac{7}{4}, 2]$*, e calcule um valor numérico para esse* M.

2. *Mostre que a sequência* x_k *converge e que* $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$.

3. *Calcule* x_1 *e use este para estimar um número de iterações suficiente para garantir um erro* $|x_k - x^\star|$ *menor que* 10^{-4}.

Exercício 4. *(2.5 pontos)*

1. *Calcule a fatoração LU da matriz* A *seguinte: (observe que as matrizes* L *e* U *dependem do parâmetro* $\theta \in \mathbb{R}$.*)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\theta+1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. *Calcule a matriz inversa* A^{-1}*. (Dica: pode usar a fatoração LU do item anterior)*

3. *Usando o critério das linhas, determine o maior intervalo* (θ_0, θ_1) *possível de valores para* θ *que garante a convergência do método de Gauss-Seidel aplicado a um sistema linear* $Ax = b$*, onde* b *é um vetor dado.*