Regras de L'Hospital

· Ajudam a calcular limites quando temos indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema (Regras de L'Hospital) Supondo f e g deriváveis, com $g'(x) \neq 0$ em $]p-r, p+r[$ (exceto possivelmente em p), para algum $r>0$.

1º) Se $\lim_{x \to p} f(x) = 0$, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (ou é $+\infty$ ou é $-\infty$), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe (ou é $+\infty$ ou é $-\infty$) e

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2º) Se $\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to p} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (ou é $+\infty$ ou é $-\infty$), então $\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe (ou é $+\infty$ ou é $-\infty$) e

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obs: As regras também valem para $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

· Não vamos fazer a demonstração do teorema. Vamos apenas focar em como usá-lo para resolver limites.

Exemplos:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{2x^4+3x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{3x^2}+\overset{\to 0}{4x}}{\underset{\to 0}{8x}-3} = \frac{0}{-3} = 0$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} = (\ln x)'}{1 = (x-1)'} = 1$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{1} = +\infty$

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{-x^2} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{-2x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{\underset{\to -2}{-2}} = -\infty$

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3+2x^2} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2+4x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x+4} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{e^x}}{6} = +\infty$

Obs: Se $p(x)$ é uma função polinomial, teremos que $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{p(x)} = +\infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$. (Isso precisa ser provado).

Intuitivo isto nos diz que a função exponencial cresce mais rápido que qualquer função polinomial.

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

7) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^3+4x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2+4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\underset{\to +\infty}{3x^3+4x}} = 0$

Obs: Se $p(x)$ é uma função polinomial, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{p(x)} = 0$ e $\lim_{x\to +\infty} \frac{p(x)}{\ln x} = +\infty$ ou $-\infty$. (Também precisa ser mostrado)

Intuitivamente, isto nos diz que a função polinomial cresce mais rápido que $\ln x$

8) $\lim_{x\to 0_+} \underbrace{x}_{0} \underbrace{\ln x}_{+\infty} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0$

↳ não podemos aplicar L'Hospital, ele vale só para $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$!!

Obs: Às vezes não temos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, mas podemos "ajeitar" a indeterminação para ter. As regras de L'Hospital só valem para estas indeterminações ($\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$), nenhuma outra.

9) $\lim_{x\to 0_+} x^x = \lim_{x\to 0_+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ (usando 8))

Exercício Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{\operatorname{sen} x - x}$ (tente fazer antes de ver a resolução)

Solução:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x^3+x^2}{\operatorname{sen} x - x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{3x^2+2x}{\cos x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{6x+2 \to 2}{-\operatorname{sen} x \to 0,\ <0} = -\infty$$

$\nexists$ limite

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{x^3+x^2}{\operatorname{sen} x - x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{3x^2+2x}{\cos x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0_-} \frac{6x+2 \to 2}{-\operatorname{sen} x \to 0,\ <0} = +\infty$$

(Pergunta: dava para fazer diferente, sem usar limite lateral desde do começo?

Obs: $\nexists \lim_{x\to p} \frac{f'}{g'} \not\Rightarrow \nexists \lim_{x\to p} \frac{f}{g}$

Exemplo: $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 1/x$, $g(x) = x$ com $x \to 0$

(colocarei como exercício nos exercícios deste Texto).

· Mais um exemplo:

Exercício: Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Solução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{e^x} - \overset{\to 0}{\operatorname{sen} x} - \overset{\to 1}{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{e^x} - \overset{\to 1}{\cos x} + \overset{\to 0}{\operatorname{sen} x}}{\underbrace{2\operatorname{sen} x \cos x}_{\operatorname{sen} 2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 1}{e^x} + \overset{\to 0}{\operatorname{sen} x} + \overset{\to 1}{\cos x}}{2 \cdot \underset{\to 1}{\cos 2x}} = \frac{1+0+1}{2} = 1$$

↳ às vezes é melhor ajeitar a expressão antes de sair derivando, pode facilitar as contas.

Obs: As regras de L'Hospital ajudam a calcular os limites, mas não resolvem tudo. E nem sempre é mais fácil resolver os limites usando estas regras (mesmo quando elas podem ser usadas.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+1}}{2x^2+5x-7}$ ⇝ pode usar L'Hospital, mas ajuda??

Pergunta: Podemos usar as regras de L'Hospital para mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$? **Resp:** **Não**

Mas por que não?? (discutirei no encontro no Google Meet).