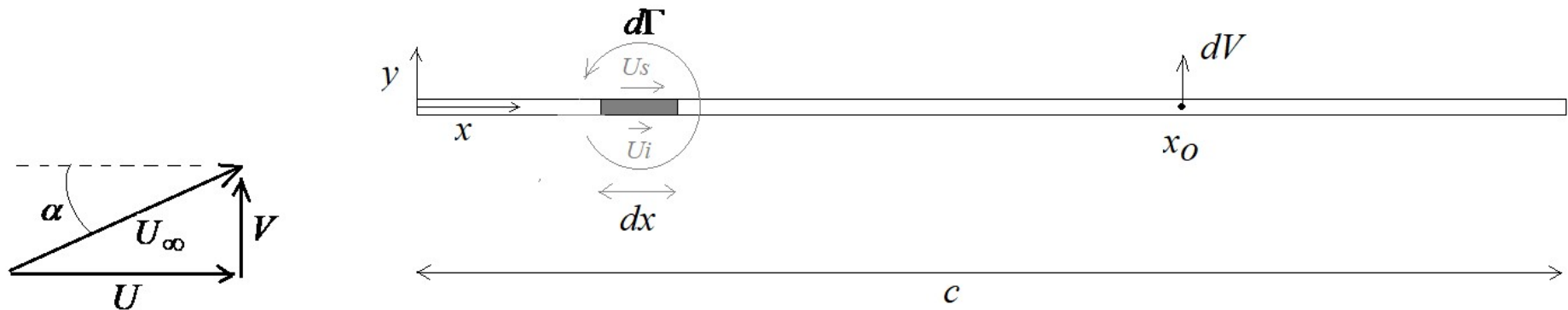


# Teoria de Asa

## Parte 1: Asa infinita

## Análise Potencial de um aerofólio infinito com ângulo de ataque

Podemos imaginar um aerofólio simétrico como uma placa plana, de acordo com a figura:



Se o ângulo de ataque for baixo, a velocidade da corrente incidente  $U_\infty$  pode ser decomposta como:

$$U = U_\infty \cos \alpha \cong U_\infty$$

$$V = U_\infty \sin \alpha \cong U_\infty \alpha \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

Se tomarmos um elemento  $dx$  numa posição  $x$  arbitrária, as velocidades  $U_s$  na parte superior do elemento e  $U_i$  na parte inferior do elemento darão origem a uma circulação  $d\Gamma$  dada por:

$$d\Gamma = U_i dx - U_s dx$$

Essa circulação fisicamente está relacionada com a vorticidade das camadas limites superior e inferior da placa. No entanto, no nosso modelo vamos tratar essa circulação como um vórtice potencial.

Vamos chamar a diferença de velocidades de  $\gamma = U_s - U_i$ . Assim:

$$d\Gamma = -\gamma dx$$

Num ponto específico  $x_o$ , a velocidade  $dV$  na direção  $y$  induzida pela circulação  $d\Gamma$  do elemento  $dx$ , se tratarmos o vórtice como potencial, será:

$$dV = \frac{d\Gamma}{2\pi(x_o - x)} = \frac{-\gamma dx}{2\pi(x_o - x)}$$

Se fizermos a integral das velocidades  $dV$  induzidas em  $x_o$  por toda a placa, a superposição dessas velocidades com a velocidade  $V \cong U_\infty \alpha$  da corrente incidente tem que ser nula, pois a placa é impermeável:

$$U_\infty \alpha - \int_0^c \frac{\gamma}{2\pi(x_o - x)} dx = 0$$

Essa equação está sujeita à chamada condição de Kutta, que é a verificação de que, no bordo de fuga, as velocidades em ambos os lados da placa são iguais,  $U_s = U_i$ , ou seja:

$$\boxed{\gamma(x=c)=0}$$

A distribuição de  $\gamma(x)$  que satisfaz a impermeabilidade da placa e a condição de Kutta é dada pela solução de Poisson:

$$\boxed{\gamma(x)=2U_{\infty}\alpha\sqrt{\frac{c}{x}-1}}$$

Finalmente, a força de sustentação  $L$  pode ser calculada pela distribuição de pressões obtida através da equação de Bernoulli:

$$\rho \frac{U_s^2}{2} + p_s = \rho \frac{U_i^2}{2} + p_i$$

Isso resulta:

$$p_i - p_s = \frac{\rho}{2} (U_s^2 - U_i^2) = \frac{\rho}{2} \underbrace{(U_s + U_i)}_{\cong 2U_\infty} \underbrace{(U_s - U_i)}_{\gamma}$$

Logo:

$$\boxed{p_i - p_s \cong \rho U_\infty \gamma}$$

A força de sustentação em um elemento  $dx$  é dada por:

$dL = (p_i - p_s) b dx$ , onde  $b$  é a envergadura na direção ortogonal à figura.

Assim:

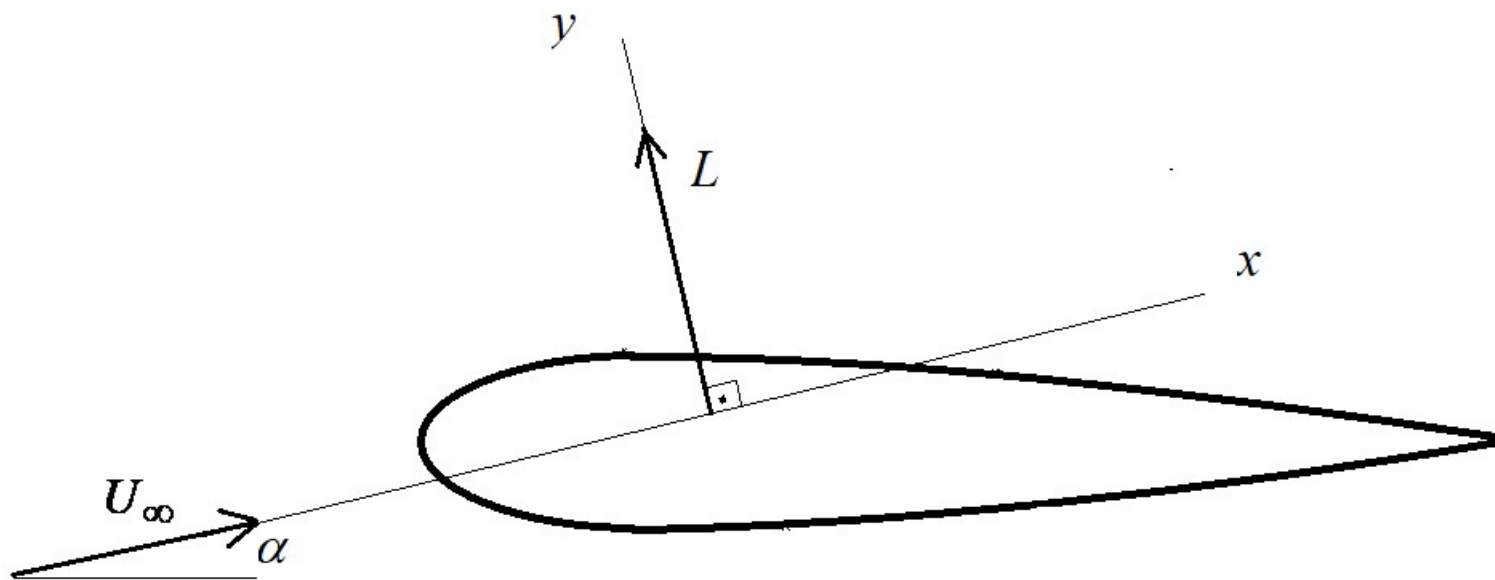
$$L = \int_0^c (p_i - p_s) b dx = \rho U_\infty b \int_0^c \gamma dx$$

Lembrando que  $\gamma dx = -d\Gamma$ :

$$L = -\rho U_\infty b \int_0^c d\Gamma$$

E assim, verifica-se, por Bernoulli, o teorema de Kutta-Joukowski:

$$\frac{L}{b} = -\rho U_{\infty} \Gamma$$





O coeficiente de sustentação é dado por:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 b c} = \frac{2}{\rho U_\infty^2 b c} \times \rho U_\infty b \int_0^c \gamma dx$$

Substituindo a distribuição de  $\gamma(x)$ :

$$C_L = \frac{4\alpha}{c} \int_0^c \sqrt{\frac{c}{x} - 1} dx$$

Fazendo  $\eta = \frac{x}{c}$ ,  $dx = c d\eta$ :

$$C_L = 4\alpha \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\eta} - 1} d\eta$$

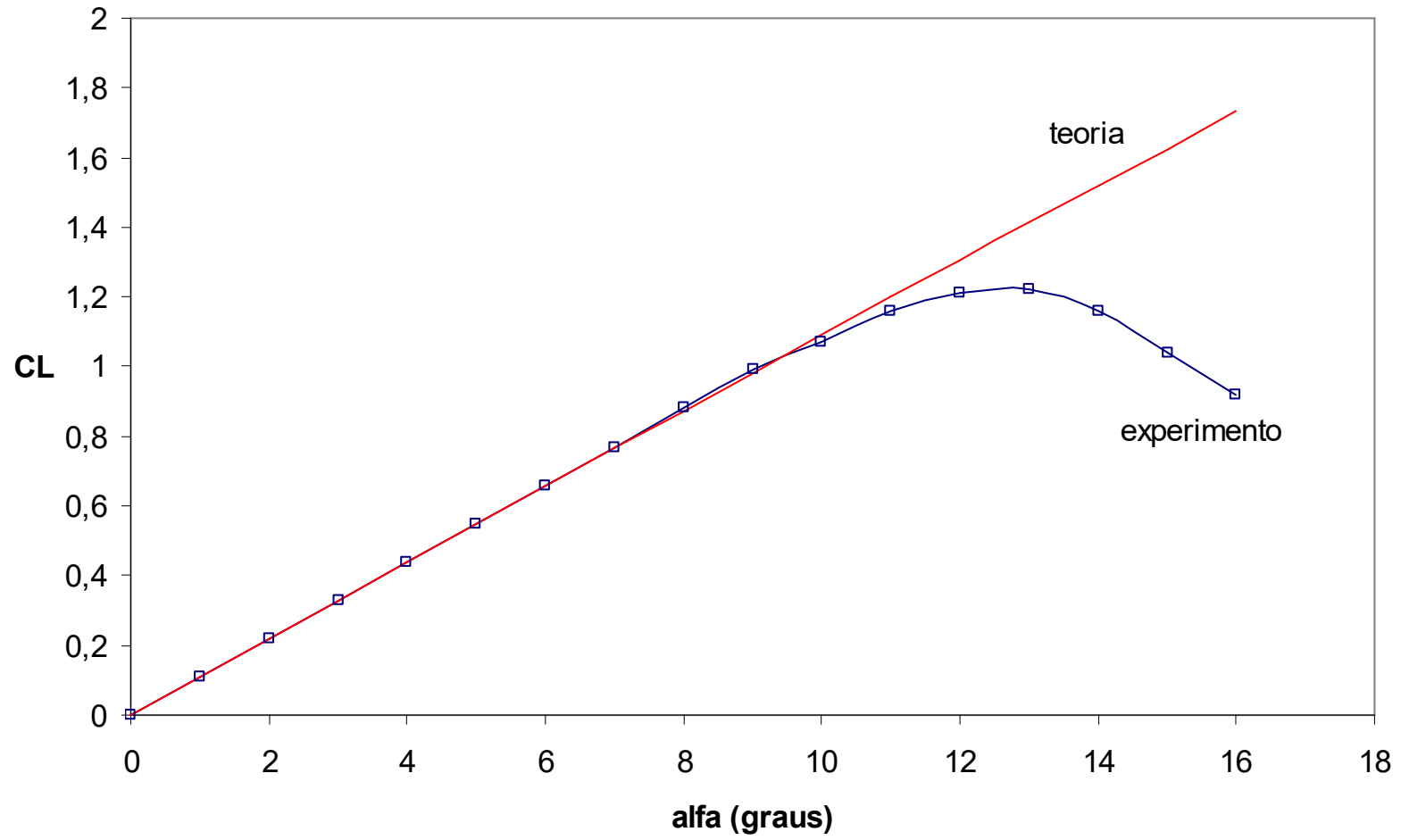
A integral é igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Assim:

$$\boxed{C_L = 2\pi \alpha} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

Ou:

$$\boxed{C_L = 2\pi \text{sen } \alpha} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

### NACA0012 $Re=2 \times 10^6$





Escoamento sem separação: a teoria potencial funciona bem.



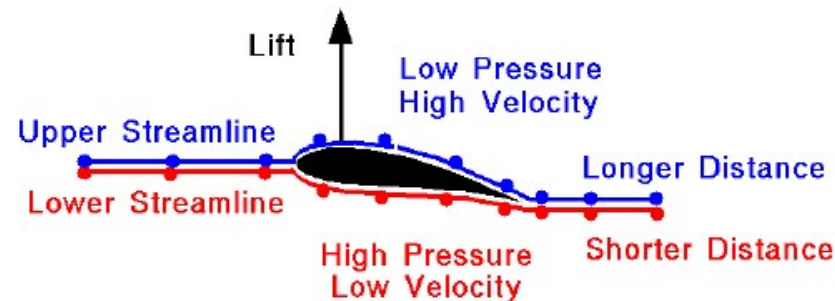
Escoamento com separação (estolado): a teoria potencial perde validade.

# Teoria Incorreta sobre Sustentação – “Equal transit time”



## Incorrect Theory #1

Glenn  
Research  
Center



### "Longer Path" or "Equal Transit" Theory

Top of airfoil is shaped to provide longer path than bottom.

Air molecules have farther to go over the top.

Air molecules must move faster over the top to meet molecules at the trailing edge that have gone underneath.

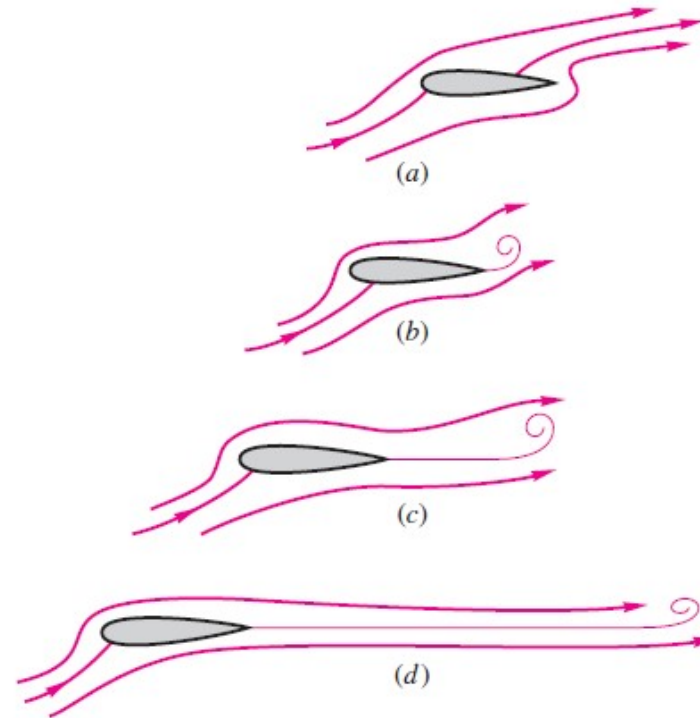
From Bernoulli's equation, higher velocity produces lower pressure on the top.

Difference in pressure produces lift.

Extraído de <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/VirtualAero/BottleRocket/airplane/wrong1.html>

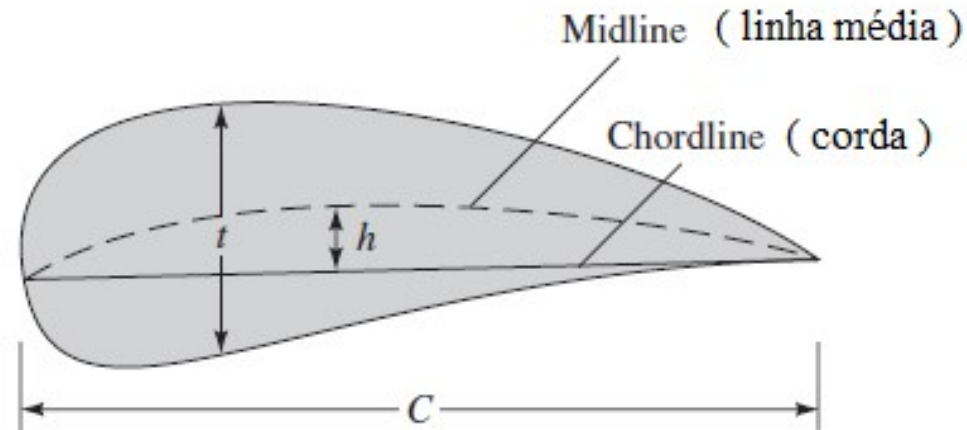
## Origem da condição de Kutta; relação com vórtice de partida

Fig. 7.23 Transient stages in the development of lift: (a) start-up: rear stagnation point on the upper surface: no lift; (b) sharp trailing edge induces separation, and a starting vortex forms: slight lift; (c) starting vortex is shed, and streamlines flow smoothly from trailing edge: lift is now 80 percent developed; (d) starting vortex now shed far behind, trailing edge now very smooth: lift fully developed.



Extraído de White, F. M., “Fluid Mechanics”, 7th Edition.

## Aerofólios não-simétricos

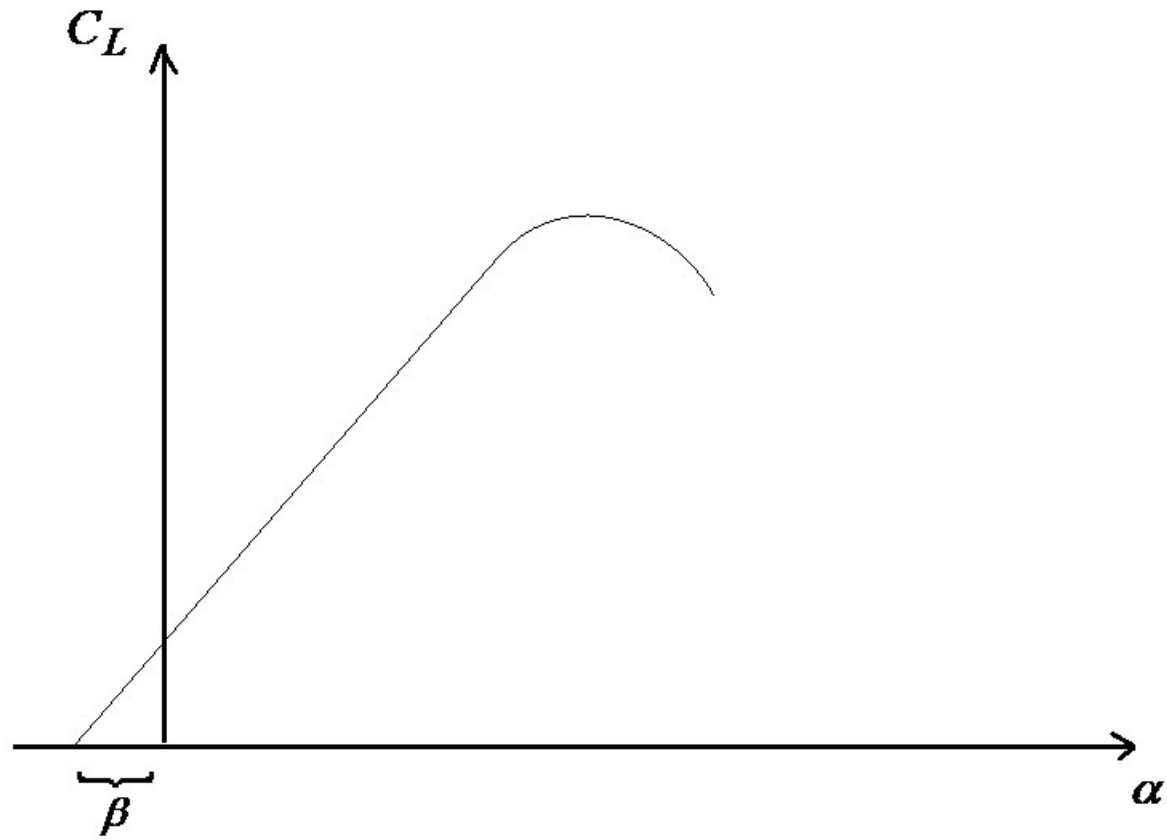


Extraído e adaptado de White, F. M., “Fluid Mechanics”, 7th Edition.

$$C_L = 2\pi \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Onde  $\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$  e  $h$  é o arqueamento máximo.





Curva  $C_L \times \alpha$  típica de um aerofólio não-simétrico.

Exemplo: Um aerofólio infinito tem 2% de arqueamento. Se a corda do aerofólio é  $c=1,75\text{m}$ , avalie a sustentação por metro de envergadura quando o aerofólio é imerso em ar com massa específica  $\rho=1,2\text{kg/m}^3$  e uma velocidade  $U_\infty=18\text{m/s}$ . O ângulo de ataque é  $\alpha=6^\circ$ .

Solução - Temos que:

$$C_L = 2\pi \text{sen}(\alpha + \beta)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{2h}{c}\right)$$

O arqueamento  $\frac{h}{c}=0,02$ . Assim:

$$\beta = \arctan(0,04) \Rightarrow \beta = 2,29^\circ$$

$$C_L = 2\pi \sin(6^\circ + 2,29^\circ) = 0,91$$

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho U_\infty^2 b c \Rightarrow \frac{L}{b} = \frac{1}{2} \times 0,91 \times 1,2 \times 18^2 \times 1,75$$

$$\boxed{\frac{L}{b} = 310 \text{ N/m}}$$

## **Bibliografia**

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Munson, Young, Okiishi, “Fundamentos da Mecânica dos Fluidos, Ed. Edgard Blucher, 4ª edição, 1999.