

Robôs Móveis

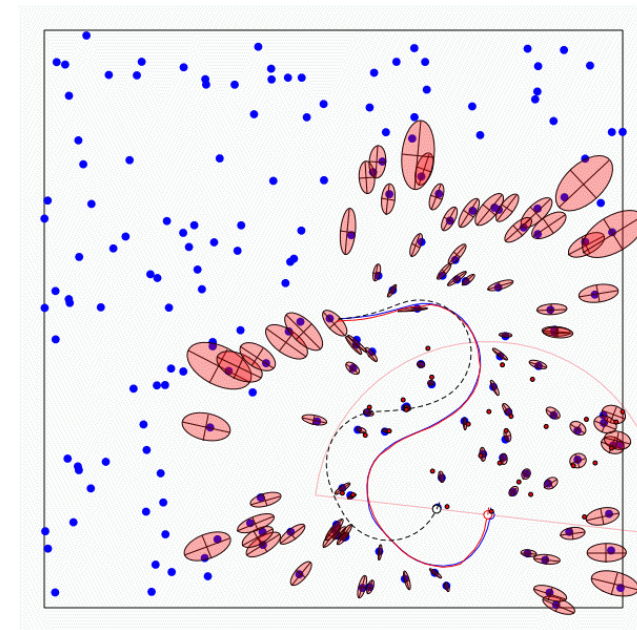
Mapeamento e localização
simultâneos (SLAM)

SLAM

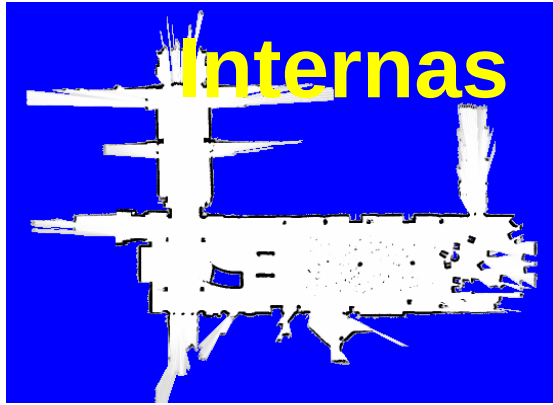
- *Simultaneous Location And Mapping*
- Pose do veículo **e** ambiente são desconhecidos.

SLAM

- Um robô explora um ambiente desconhecido e estático.
- Dados:
 - Ações do robô
 - Observações do ambiente
- Estimar:
 - Características (marcos) do ambiente
 - Trajetória do robô

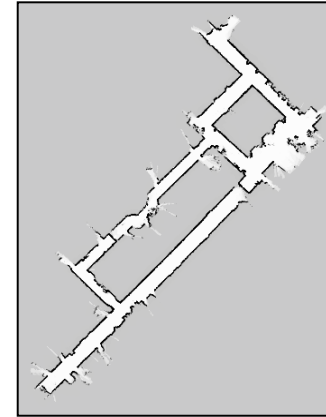
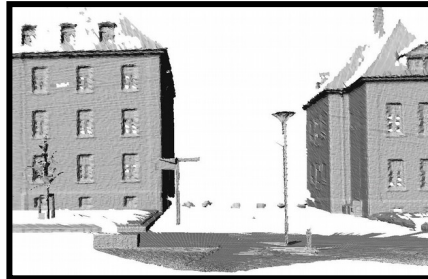
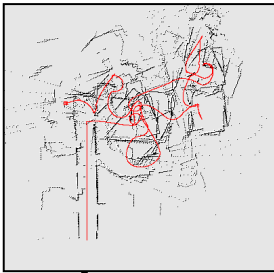


SLAM - Aplicações

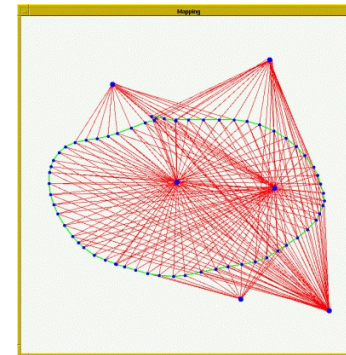
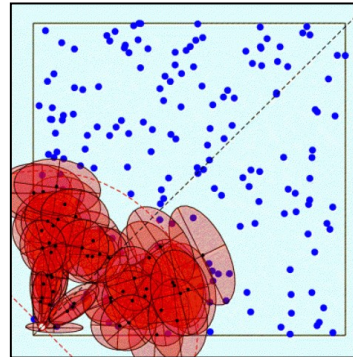
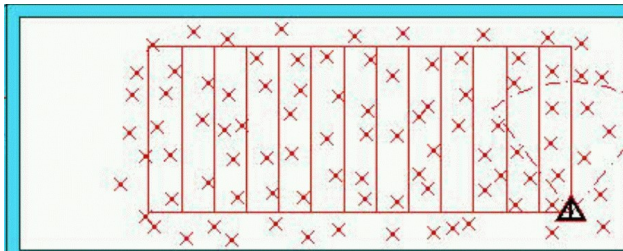


Tipos de mapas

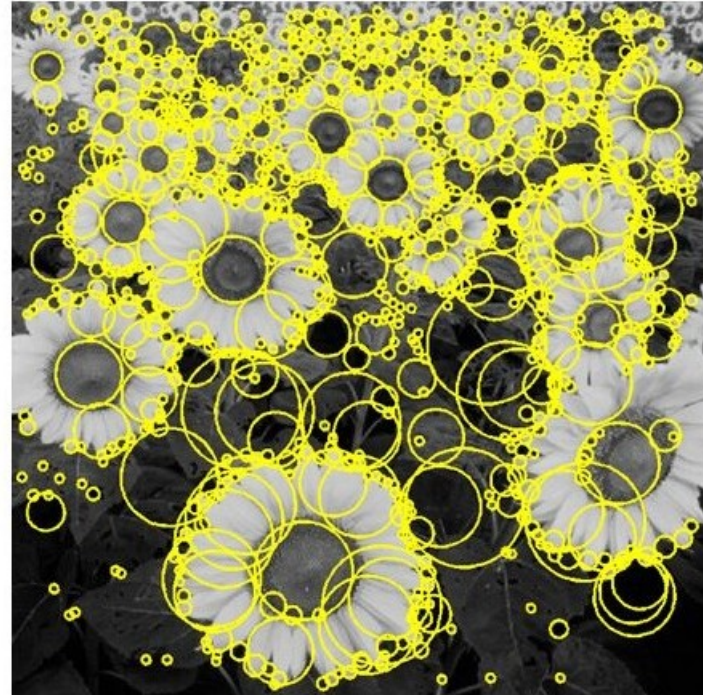
- Mapas de grade ou varredura



Baseados em marcos

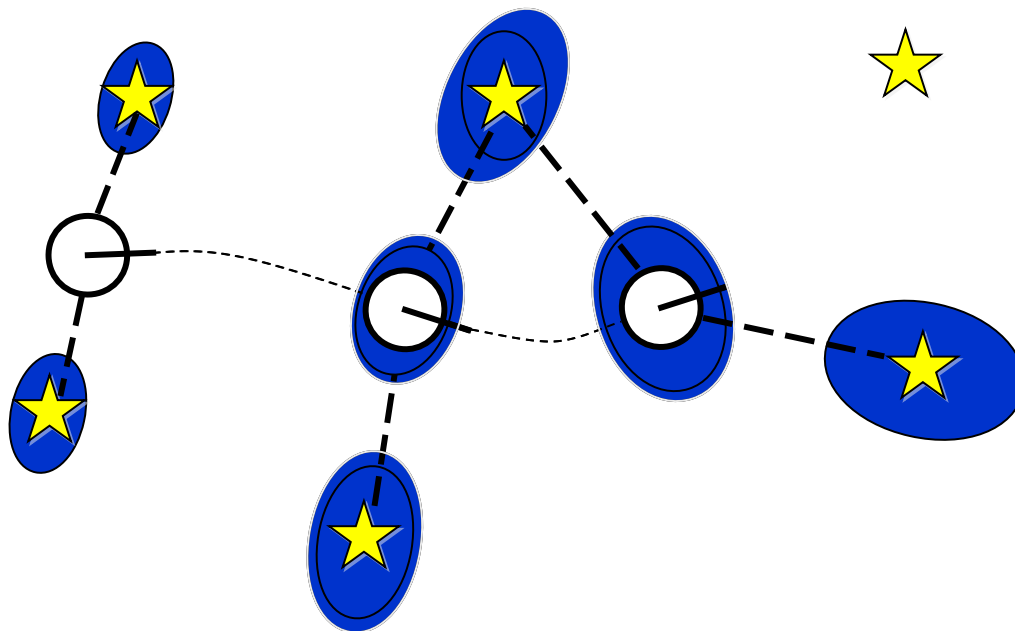


Sensores - Visão



SLAM – Dificuldade central

Trajetoira e mapa desconhecidos



Erros de trajetória criam erros de mapa e vice-versa!

SLAM

- *SLAM Offline:*

Estima trajetória completa e mapa.

$$p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t})$$

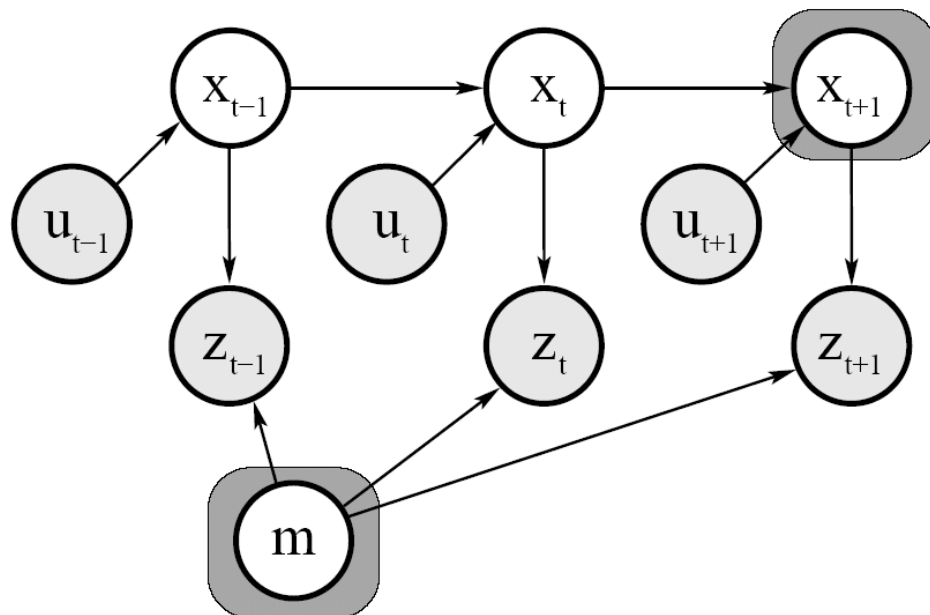
- *Slam Online.*

$$p(x_t, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) = \int \int \dots \int p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) dx_1 dx_2 \dots dx_{t-1}$$

Integrais feitas passo-a-passo

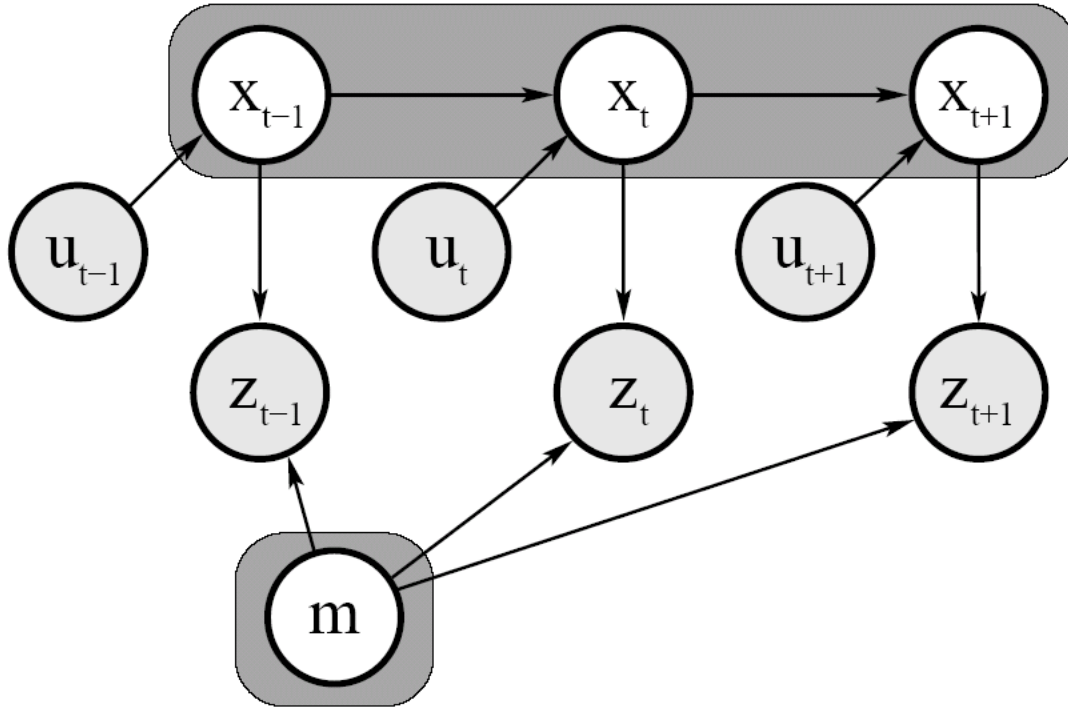
Estima *posição mais recente* e mapa.

SLAM Online



$$p(x_t, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) = \int \int \dots \int p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t}) dx_1 dx_2 \dots dx_{t-1}$$

SLAM Offline



$$p(x_{1:t}, m \mid z_{1:t}, u_{1:t})$$

SLAM – Abordagens tradicionais

- Casamento de varreduras (*scan matching*)
- EKF SLAM
- Fast-SLAM
- Mapeamento probabilístico.
- Graph-SLAM, SEIFs

SLAM – *Scan Matching*

- Maximizar a verossimilhança da i-ésima posição e mapa relativos a posição anterior e mapa.

$$\hat{x}_t = \arg \max_{x_t} \left\{ p(z_t | x_t, \hat{m}^{[t-1]}) \cdot p(x_t | u_{t-1}, \hat{x}_{t-1}) \right\}$$

Medição atual

Movimento do robô

Mapa até o momento

Mapa é gerado pela sobreposição de mapas com posições conhecidas (aula anterior).

EKF-SLAM

Extended_Kalman_filter

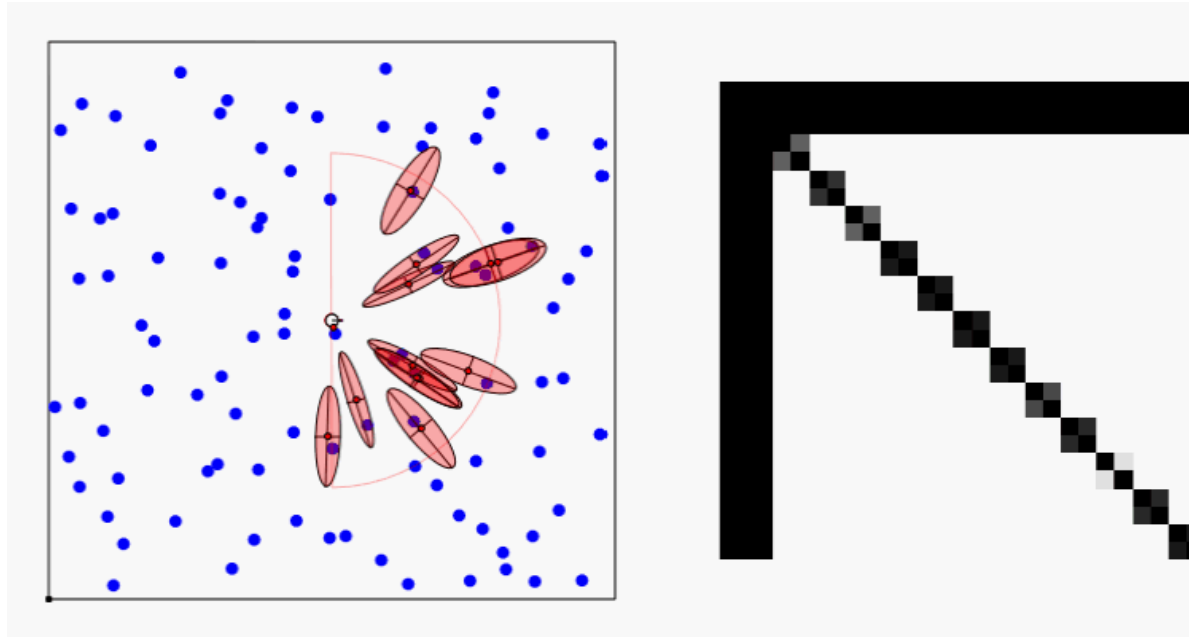
1. Previsão:
2. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$
3. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
4. Correção:
5. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$
6. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$
7. $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$
8. Retorne μ_t, Σ_t

EKF-SLAM

- Mapa

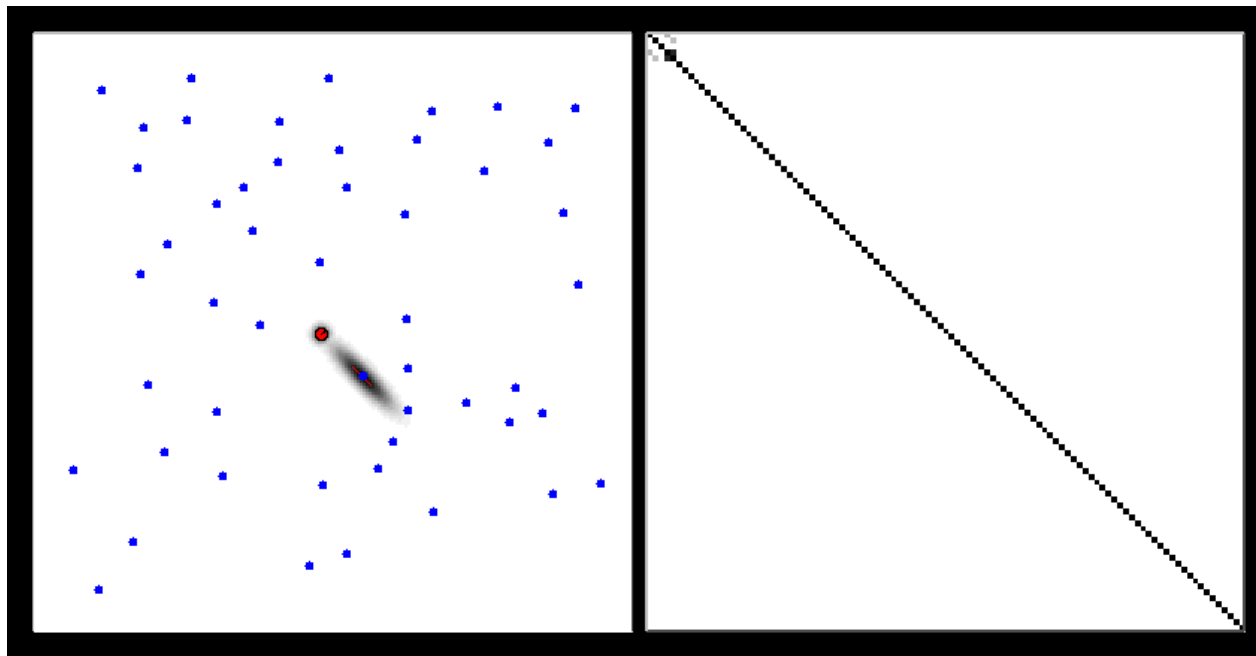
$$Bel(x_t, m_t) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} & \sigma_{xl_1} & \sigma_{xl_2} & \cdots & \sigma_{xl_N} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\theta} & \sigma_{yl_1} & \sigma_{yl_2} & \cdots & \sigma_{yl_N} \\ \sigma_{x\theta} & \sigma_{y\theta} & \sigma_\theta^2 & \sigma_{\theta l_1} & \sigma_{\theta l_2} & \cdots & \sigma_{\theta l_N} \\ \sigma_{xl_1} & \sigma_{yl_1} & \sigma_{\theta l_1} & \sigma_{l_1}^2 & \sigma_{l_1 l_2} & \cdots & \sigma_{l_1 l_N} \\ \sigma_{xl_2} & \sigma_{yl_2} & \sigma_{\theta l_2} & \sigma_{l_1 l_2} & \sigma_{l_2}^2 & \cdots & \sigma_{l_2 l_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{xl_N} & \sigma_{yl_N} & \sigma_{\theta l_N} & \sigma_{l_1 l_N} & \sigma_{l_2 l_N} & \cdots & \sigma_{l_N}^2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

EKF-SLAM



- Hipótese de associação única de marcos com observações. Associação é um problema!

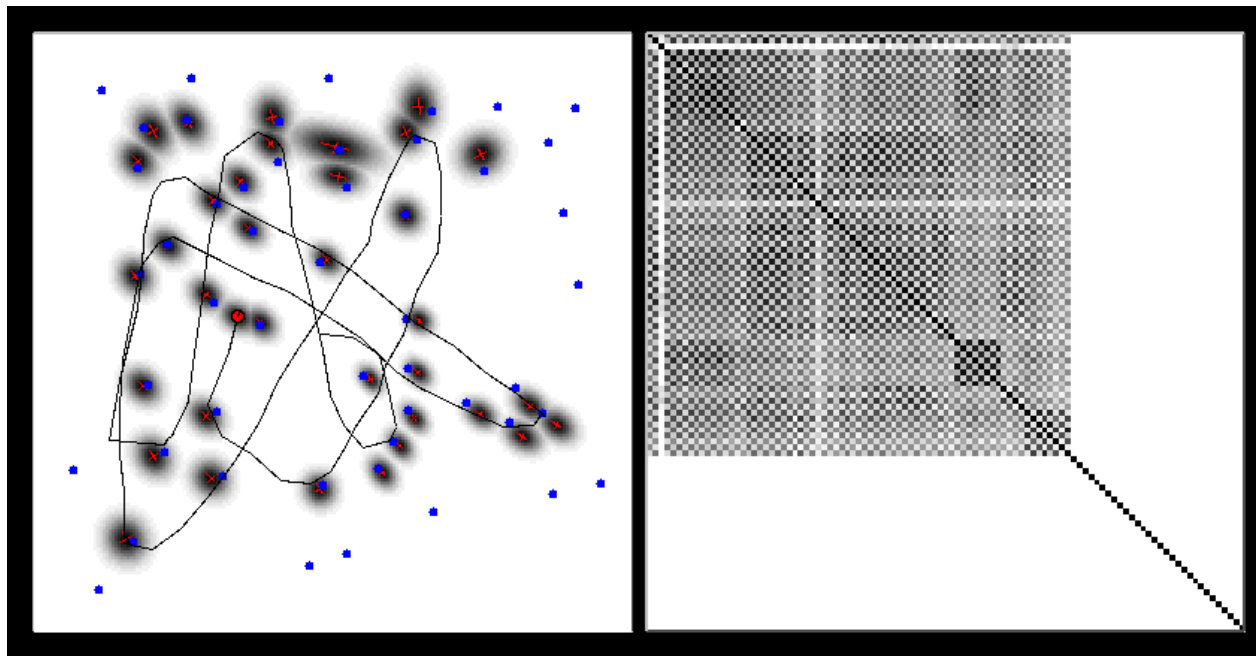
EKF-SLAM



Mapa

Matriz de cov.

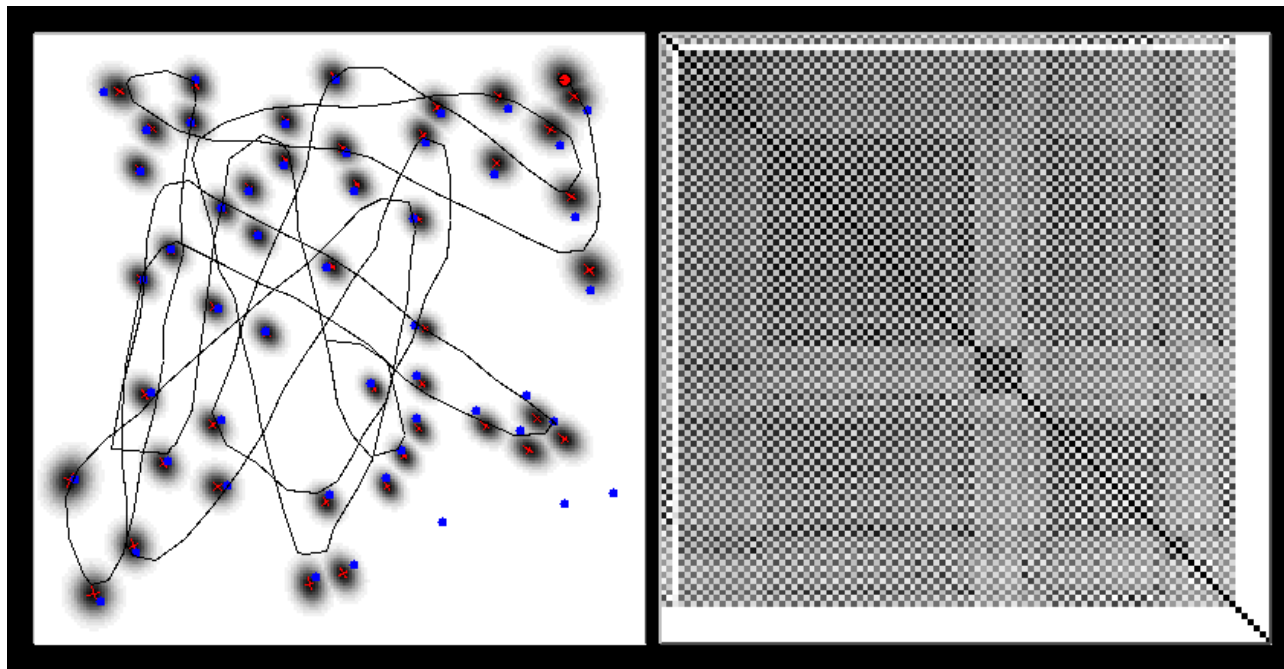
EKF-SLAM



Mapa

Matriz de cov.

EKF-SLAM



Mapa

Matriz de cov.

EKF-SLAM – Associação conhecida

1. $\bar{\mu}_t^{(0)} = f(u_t, \mu_{t-1})$ Previsão: Mapa é inalterado aqui
2. $\bar{\Sigma}_t^{(0)} = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
3. Para cada marco observado j faça:
4. Se é a *primeira* observação de j :
5. Adicione j ao estado $\bar{\mu}_t^{(j)}, \bar{\Sigma}_t^{(j)}$ (*prior* apropriado)
6. $K_t^{(j)} = \bar{\Sigma}_t H_t^{jT} (H_t^j \bar{\Sigma}_t H_t^{jT} + Q_t^j)^{-1}$
7. $\bar{\mu}_t^{(j)} = \bar{\mu}_t^{(j-1)} + \sum_j K_t^{(j)} (z_t^{(j)} - \hat{z}_t^{(j)})$
8. $\bar{\Sigma}_t^{(j)} = (I - K_t^{(j)} H_t^{(j)}) \bar{\Sigma}_t^{(j-1)}$
9. Retorne $\bar{\mu}_t^{(n)}, \bar{\Sigma}_t^{(n)}$

(E)KF-SLAM

Para o caso **linear** vale: [Dissanayake et al., 2001]

O determinante de qualquer sub-matriz da matriz de covariância do mapa é monotonicamente decrescente com o aumento de observações.

No limite as estimativas de marcos tornam-se completamente correlacionadas.

EKF-Slam: Exemplo

Robô de duas rodas. Posição x , y e orientação θ .

Modelo *cinemático*. Perímetro de rodas $p=1$, largura entre rodas $l=1$.

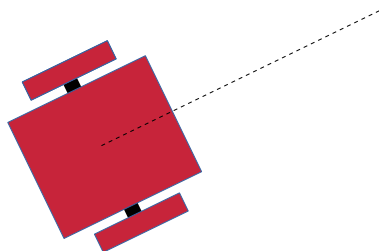
Rotação esquerda, direita: ω_e , ω_d (rad/s). $\Delta t=1s$

$$\Delta \theta_t = \frac{\omega_{dt} - \omega_{et}}{2\pi}, r_t = \frac{(\omega_{dt} + \omega_{et})}{2(\omega_{dt} - \omega_{et})}$$

$$\theta_t = \theta_{t-1} + \Delta \theta + \epsilon_\theta$$

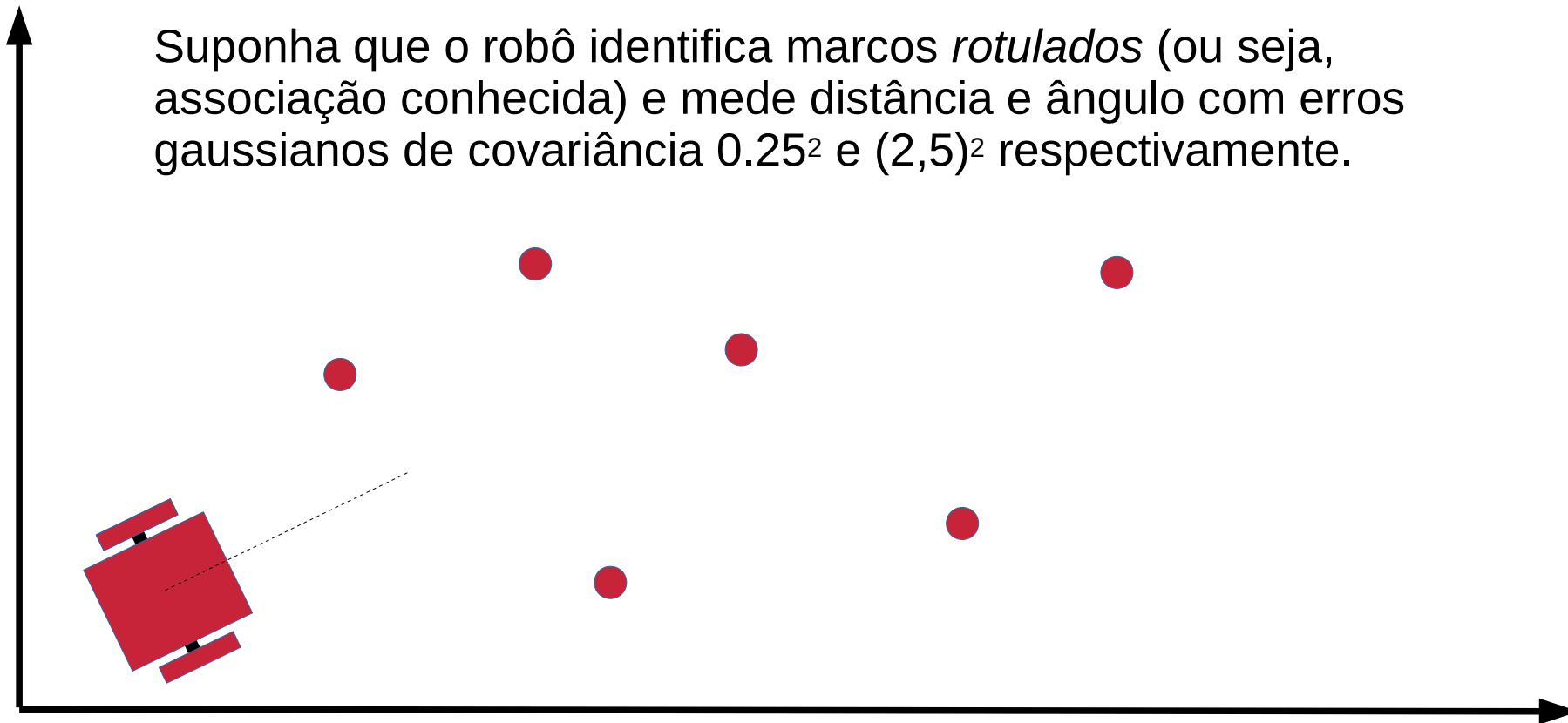
$$x_t = x_{t-1} + r_t \left(\sin \Delta \theta_t \cos \theta_{t-1} - (1 - \cos \Delta \theta_t) \sin \theta_{t-1} \right) + \epsilon_x$$

$$y_t = y_{t-1} + r_t \left(\sin \Delta \theta_t \sin \theta_{t-1} + (1 - \cos \Delta \theta_t) \cos \theta_{t-1} \right) + \epsilon_y$$



EKF-Slam: Exemplo

Suponha que o robô identifica marcos *rotulados* (ou seja, associação conhecida) e mede distância e ângulo com erros gaussianos de covariância 0.25^2 e $(2,5)^2$ respectivamente.



EKF-Slam: Exemplo

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{bmatrix} 2,356 \\ 3,927 \end{bmatrix} \quad \bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0,498 \\ 0,061752 \\ 0,25 \end{bmatrix} \quad \bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 \end{bmatrix}$$

$$G_t = \begin{bmatrix} \frac{dx_t}{dx_{t-1}} & \frac{dx_t}{dy_{t-1}} & \frac{dx_t}{d\theta_{t-1}} \\ \frac{dy_t}{dx_{t-1}} & \frac{dy_t}{dy_{t-1}} & \frac{dy_t}{d\theta_{t-1}} \\ \frac{d\theta_t}{dx_{t-1}} & \frac{d\theta_t}{dy_{t-1}} & \frac{d\theta_t}{d\theta_{t-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0466 \cos \theta_{t-1} - 0,371 \sin \theta_{t-1} \\ 0 & 1 & 0,371 \cos \theta_{t-1} - 0,0466 \sin \theta_{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Novos estados (Valores iniciais irrelevantes, $U \gg 1$)

Observações:

1. Marco "5" em (-0.6857, -0.117)

2. Marco "9" em (0.654, -0.11).

- Coord. Cartesianas no **ref. do robô**

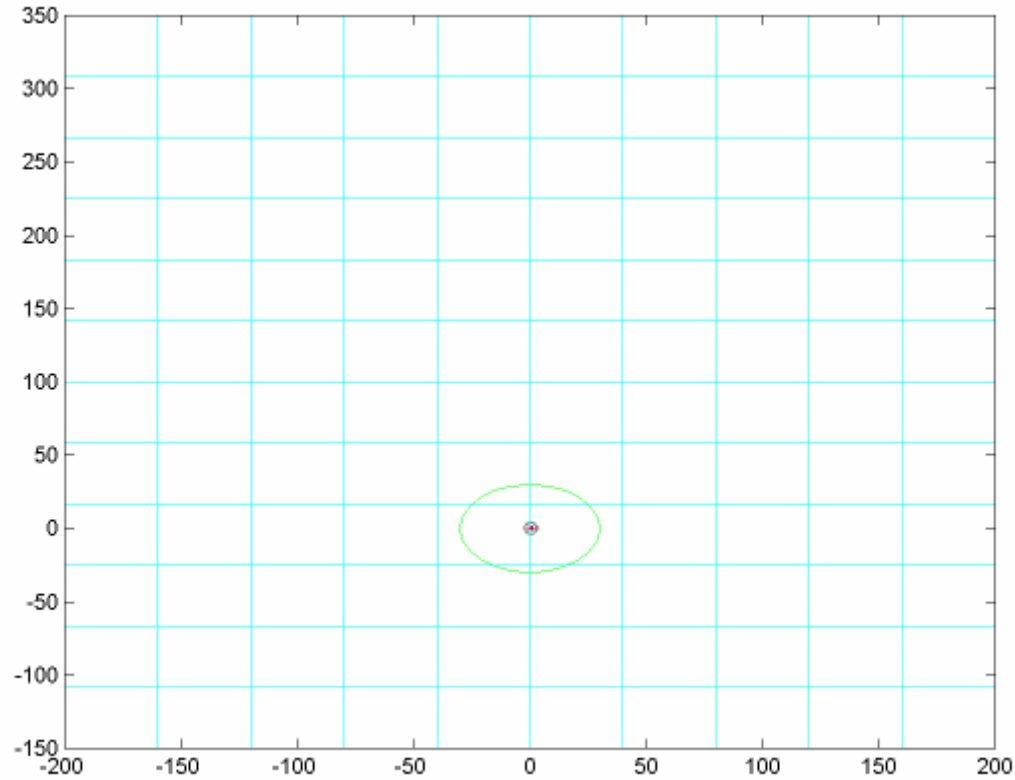
$$\bar{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0,498 \\ 0,061752 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix}$$

$$H_t^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,42775 & \cos(0,25) & \sin(0,25) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,904 & \cos(0,25) & -\sin(0,25) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,8816 & 0 & 0 & \cos(0,25) & \sin(0,25) \\ 0 & 1 & -0,472 & 0 & 0 & \cos(0,25) & -\sin(0,25) \end{bmatrix} \quad Q_t^1 = \begin{bmatrix} 0,0607 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,0266 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

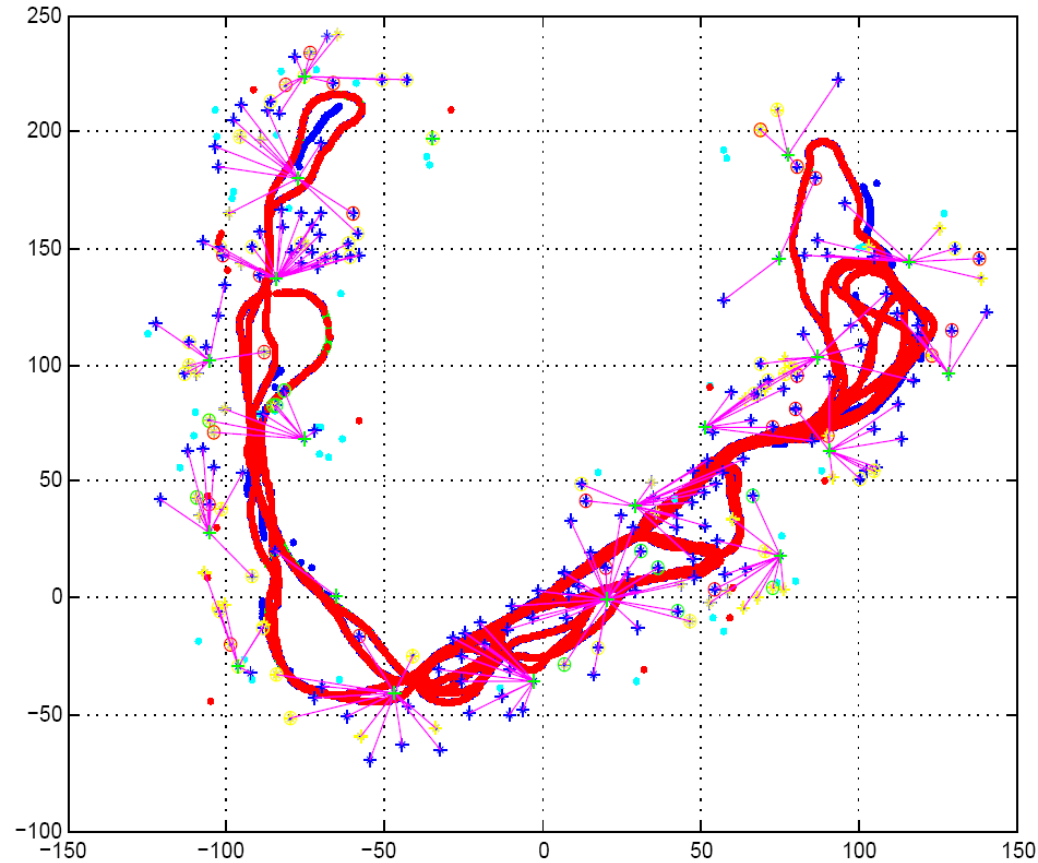
(E)KF-SLAM exemplo



(E)KF-SLAM exemplo



(E)KF-SLAM exemplo



EKF-SLAM – Associação conhecida?

1. $\bar{\mu}_t^{(0)} = f(u_t, \mu_{t-1})$ Previsão: Mapa é inalterado aqui
2. $\bar{\Sigma}_t^{(0)} = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
3. Para cada marco observado j faça:
4. Se é a *primeira* observação de j :
5. Adicione j ao estado $\bar{\mu}_t^{(j)}, \bar{\Sigma}_t^{(j)}$ (*prior* apropriado)
6. $K_t^{(j)} = \bar{\Sigma}_t^{(j)} H_t^{(j)T} (H_t^{(j)} \bar{\Sigma}_t^{(j)} H_t^{(j)T} + Q_t^{(j)})^{-1}$
7. $\bar{\mu}_t^{(j)} = \bar{\mu}_t^{(j-1)} + \sum_j K_t^{(j)} (z_t^{(j)} - \hat{z}_t^{(j)})$
8. $\bar{\Sigma}_t^{(j)} = (I - \sum_j K_t^{(j)} H_t^{(j)}) \bar{\Sigma}_t^{(j-1)}$
9. Retorne $\bar{\mu}_t^{(n)}, \bar{\Sigma}_t^{(n)}$

EKF-SLAM – Associação conhecida?

1. $\bar{\mu}_t^{(0)} = f(u_t, \mu_{t-1})$ Previsão: Mapa é inalterado aqui
2. $\bar{\Sigma}_t^{(0)} = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
3. Para cada marco observado j faça:
4. Se é a *primeira* observação de j :
5. Adicione j ao estado $\bar{\mu}_t^{(j)}, \bar{\Sigma}_t^{(j)}$ (*prior* apropriado)
6. $K_t^{(j)} = \bar{\Sigma}_t^{(j)} H_t^{(j)T} (H_t^{(j)} \bar{\Sigma}_t^{(j)} H_t^{(j)T} + Q_t^{(j)})^{-1}$
7. $\bar{\mu}_t^{(j)} = \bar{\mu}_t^{(j-1)} + \sum_j K_t^{(j)} (z_t^{(j)} - \hat{z}_t^{(j)})$
8. $\bar{\Sigma}_t^{(j)} = (I - \sum_j K_t^{(j)} H_t^{(j)}) \bar{\Sigma}_t^{(j-1)}$
9. Retorne $\bar{\mu}_t^{(n)}, \bar{\Sigma}_t^{(n)}$

Os valores de Q , H e $\hat{z}$ dependem da escolha de um marco apropriado no mapa!

EKF-SLAM – Associação desconhecida

Seja i o índice do marco *observado*.

$j(i)$ é o índice correspondente ao marco.

Em um determinado instante, há $N_t^{(i)}$ marcos no mapa.

Há a possibilidade de que um marco ainda não tenha sido observado!

Se i nunca foi observado (marco novo),

- $N_t^{(i)} = N_t^{(i-1)} + 1 \quad j(i) = N_t^{(i)}$

EKF-SLAM – Associação desconhecida

Como fazer a determinação de $j(i)$?

Abordagem de máxima Verissimilhança.

Seja $m_t^{(i-1, j(i))}$ o marco de índice $j(i)$ no mapa $m_t^{(i-1)}$ (note que o mapa é também atualizado a cada medida).

$j(i)$ deve *maximizar* $p(z_t^{(i)} | x_t^{(i-1)}, m_t^{(i-1, j(i))})$.

$$\Psi_t^{(i-1, k)} = H_t^{(i-1, k)} \bar{\Sigma}_t^{(i-1)} [H_t^{(i-1, k)}]^T + Q_t$$

$$\Psi_t^{(i-1, N_t^{(i-1)}+1)} = \alpha$$

$$j(i) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \Psi_t^{(i-1, k)}$$

EKF-SLAM – Associação desconhecida

α é um parâmetro do algoritmo relacionado com a probabilidade de se encontrar um novo marco.

Se todos os pesos de ψ são menores do que α , o marco deve ser considerado inédito.

$$\Psi_t^{(i-1,k)} = H_t^{(i-1,k)} \bar{\Sigma}_t^{(i-1)} [H_t^{(i-1,k)}]^T + Q_t$$

$$\Psi_t^{(i-1, N_t^{(i-1)}+1)} = \alpha$$

$$j(i) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \Psi_t^{(i-1,k)}$$

EKF-SLAM – Associação desconhecida

α é um parâmetro do algoritmo relacionado com a probabilidade de se encontrar um novo marco.

Se todos os pesos de ψ são menores do que α , o marco deve ser considerado inédito.

$$\Psi_t^{(i-1,k)} = H_t^{(i-1,k)} \bar{\Sigma}_t^{(i-1)} [H_t^{(i-1,k)}]^T + Q_t$$

$$\Psi_t^{(i-1, N_t^{(i-1)}+1)} = \alpha$$

$$j(i) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \quad \Psi_t^{(i-1,k)}$$

EKF-SLAM – Associação desconhecida

Note que a associação da observação i deve ser feita *após* a atualização de todo o estado (inclusive o mapa) pela observação $i-1$.

Aparentemente este passo tem complexidade $O(N)$.

Estruturas de dados (kd-tree) permitem reduzi-la a $O(\log N)$

$$\Psi_t^{(i-1,k)} = H_t^{(i-1,k)} \bar{\Sigma}_t^{(i-1)} [H_t^{(i-1,k)}]^T + Q_t$$
$$\Psi_t^{(i-1, N_t^{(i-1)}+1)} = \alpha$$
$$j(i) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \Psi_t^{(i-1,k)}$$

EKF-SLAM – Associação desconhecida

Para um conjunto de observações em um instante t , múltiplas observações podem estar relacionadas com o mesmo marco (isso é um problema?).

Observações espúrias podem poluir o mapa.

Mitigação → Adicionar a cada marco no mapa um contador. Se o marco for observado, incremente. Se não foi e *deveria ser*, decamente. Limpe o mapa retirando marcos com contador abaixo de um determinado limite.

FastSlam

```

1: Algorithm FastSLAM 1.0( $z_t, u_t, Y_{t-1}$ ):
2:   for  $k = 1$  to  $M$  do                                // loop over all particles
3:     retrieve  $\left\langle x_{t-1}^{[k]}, N_{t-1}^{[k]}, \left\langle \mu_{1,t-1}^{[k]}, \Sigma_{1,t-1}^{[k]}, i_1^{[k]} \right\rangle, \dots, \right.$ 
        $\left. \left\langle \mu_{N_{t-1}^{[k]},t-1}^{[k]}, \Sigma_{N_{t-1}^{[k]},t-1}^{[k]}, i_{N_{t-1}^{[k]},t-1}^{[k]} \right\rangle \right\rangle$  from  $Y_{t-1}$ 
4:      $x_t^{[k]} \sim p(x_t | x_{t-1}^{[k]}, u_t)$                 // sample new pose
5:     for  $j = 1$  to  $N_{t-1}^{[k]}$  do                          // measurement likelihoods
6:        $\hat{z}_j = h(\mu_{j,t-1}^{[k]}, x_t^{[k]})$                 // measurement prediction
7:        $H_j = h'(\mu_{j,t-1}^{[k]}, x_t^{[k]})$                 // calculate Jacobian
8:        $Q_j = H_j \Sigma_{j,t-1}^{[k]} H_j^T + Q_t$           // measurement covariance
9:        $w_j = |2\pi Q_j|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_t - \hat{z}_j)^T Q_j^{-1} (z_t - \hat{z}_j) \right\}$  // likelihood of correspondence
10:    endfor
11:     $w_{1+N_{t-1}^{[k]}} = p_0$                             // importance factor, new feature
12:     $w^{[k]} = \max w_j$                                 // max likelihood correspondence
13:     $\hat{c} = \operatorname{argmax} w_j$                           // index of ML feature
14:     $N_t^{[k]} = \max\{N_{t-1}^{[k]}, \hat{c}\}$                     // new number of features in map
15:    for  $j = 1$  to  $N_t^{[k]}$  do                            // update Kalman filters
16:      if  $j = \hat{c} = 1 + N_{t-1}^{[k]}$  then                  // is new feature?
17:         $\mu_{j,t}^{[k]} = h^{-1}(z_t, x_t^{[k]})$               // initialize mean
18:         $H_j = h'(\mu_{j,t}^{[k]}, x_t^{[k]})$ ;  $\Sigma_{j,t}^{[k]} = (H_j^{-1})^T Q_t H_j^{-1}$  // initialize covar.
19:         $i_{j,t}^{[k]} = 1$                                 // initialize counter
20:      else if  $j = \hat{c} \leq N_{t-1}^{[k]}$  then              // is observed feature?
21:         $K = \Sigma_{j,t-1}^{[k]} H_j^T Q_t^{-1}$               // calculate Kalman gain
22:         $\mu_{j,t}^{[k]} = \mu_{j,t-1}^{[k]} + K(z_t - \hat{z}_j)$       // update mean
23:         $\Sigma_{j,t}^{[k]} = (I - K H_j) \Sigma_{j,t-1}^{[k]}$     // update covariance
24:         $i_{j,t}^{[k]} = i_{j,t-1}^{[k]} + 1$                 // increment counter

```

see next page for continuation

continued from the previous page

```

25:   else                                              // all other features
26:      $\mu_{j,t}^{[k]} = \mu_{j,t-1}^{[k]}$                         // copy old mean
27:      $\Sigma_{j,t}^{[k]} = \Sigma_{j,t-1}^{[k]}$                   // copy old covariance
28:     if  $\mu_{j,t-1}^{[k]}$  outside perceptual
       range of  $x_t^{[k]}$  then // should feature have been seen?
29:        $i_{j,t}^{[k]} = i_{j,t-1}^{[k]}$                         // no, do not change
30:     else
31:        $i_{j,t}^{[k]} = i_{j,t-1}^{[k]} - 1$                     // yes, decrement counter
32:       if  $i_{j,t-1}^{[k]} < 0$  then
33:         discard feature  $j$  // discard dubious features
34:       endif
35:     endif
36:   endif
37: endfor
38: add  $\left\langle x_t^{[k]}, N_t^{[k]}, \left\langle \mu_{1,t}^{[k]}, \Sigma_{1,t}^{[k]}, i_1^{[k]} \right\rangle, \dots, \left\langle \mu_{N_t^{[k]},t}^{[k]}, \Sigma_{N_t^{[k]},t}^{[k]}, i_{N_t^{[k]},t}^{[k]} \right\rangle \right\rangle$  to  $Y_{\text{aux}}$ 
39: endfor
40:  $Y_t = \emptyset$                                         // construct new particle set
41: do  $M$  times                                          // resample  $M$  particles
42:   draw random index  $k$ 
     with probability  $\propto w^{[k]}$  // resample
43:   add  $\left\langle x_t^{[k]}, N_t^{[k]}, \left\langle \mu_{1,t}^{[k]}, \Sigma_{1,t}^{[k]}, i_1^{[k]} \right\rangle, \dots, \left\langle \mu_{N_t^{[k]},t}^{[k]}, \Sigma_{N_t^{[k]},t}^{[k]}, i_{N_t^{[k]},t}^{[k]} \right\rangle \right\rangle$  to  $Y_t$ 
44: enddo
45: return  $Y_t$ 

```

EKF-SLAM

Associação

desconhecida

Robo 2d com observações
de (r, θ)

Reproduzido de Thrun et al.
Probabilistic Robotics 2006.

Cap. 10.

```

1: Algorithm EKF SLAM( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t, N_{t-1}$ ):
2:    $N_t = N_{t-1}$ 
3:    $F_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ 
4:    $\bar{\mu}_t = \mu_{t-1} + F_x^T \begin{pmatrix} -\frac{v_t}{\omega_t} \sin \mu_{t-1, \theta} + \frac{v_t}{\omega_t} \sin(\mu_{t-1, \theta} + \omega_t \Delta t) \\ \frac{v_t}{\omega_t} \cos \mu_{t-1, \theta} - \frac{v_t}{\omega_t} \cos(\mu_{t-1, \theta} + \omega_t \Delta t) \\ \omega_t \Delta t \end{pmatrix}$ 
5:    $G_t = I + F_x^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{v_t}{\omega_t} \cos \mu_{t-1, \theta} - \frac{v_t}{\omega_t} \cos(\mu_{t-1, \theta} + \omega_t \Delta t) \\ 0 & 0 & \frac{v_t}{\omega_t} \sin \mu_{t-1, \theta} - \frac{v_t}{\omega_t} \sin(\mu_{t-1, \theta} + \omega_t \Delta t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_x$ 
6:    $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + F_x^T R_t F_x$ 
7:    $Q_t = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{pmatrix}$ 
8:   for all observed features  $z_t^i = (r_t^i \ \phi_t^i \ s_t^i)^T$  do
9:      $\begin{pmatrix} \bar{\mu}_{N_t+1, x} \\ \bar{\mu}_{N_t+1, y} \\ \bar{\mu}_{N_t+1, s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_{t, x} \\ \bar{\mu}_{t, y} \\ s_t^i \end{pmatrix} + r_t^i \begin{pmatrix} \cos(\phi_t^i + \bar{\mu}_{t, \theta}) \\ \sin(\phi_t^i + \bar{\mu}_{t, \theta}) \\ 0 \end{pmatrix}$ 
10:    for  $k = 1$  to  $N_t + 1$  do
11:       $\delta_k = \begin{pmatrix} \delta_{k, x} \\ \delta_{k, y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_{k, x} - \bar{\mu}_{t, x} \\ \bar{\mu}_{k, y} - \bar{\mu}_{t, y} \end{pmatrix}$ 
12:       $q_k = \delta_k^T \delta_k$ 
13:       $z_t^k = \begin{pmatrix} \text{atan2}(\delta_{k, y}, \delta_{k, x}) - \bar{\mu}_{t, \theta} \\ \bar{\mu}_{k, s} \end{pmatrix}$ 
14:       $F_{x, k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ 
15:       $H_t^k = \frac{1}{q_k} \begin{pmatrix} \sqrt{q_k} \delta_{k, x} & -\sqrt{q_k} \delta_{k, y} & 0 & -\sqrt{q_k} \delta_{k, x} & \sqrt{q_k} \delta_{k, y} & 0 \\ \delta_{k, y} & \delta_{k, x} & -1 & -\delta_{k, y} & -\delta_{k, x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_{x, k}$ 
16:       $\Psi_k = H_t^k \bar{\Sigma}_t [H_t^k]^T + Q_t$ 
17:       $\pi_k = (z_t^i - z_t^k)^T \Psi_k^{-1} (z_t^i - z_t^k)$ 
18:    endfor
19:     $\pi_{N_t+1} = \alpha$ 
20:     $j(i) = \underset{k}{\operatorname{argmin}} \ \pi_k$ 
21:     $N_t = \max_k \{N_t, j(i)\}$ 
22:     $K_t^i = \bar{\Sigma}_t [H_t^{j(i)}]^T \Psi_{j(i)}^{-1}$ 
23:  endfor
24:   $\mu_t = \bar{\mu}_t + \sum_i K_t^i (z_t^i - z_t^{j(i)})$ 
25:   $\Sigma_t = (I - \sum_i K_t^i H_t^{j(i)}) \bar{\Sigma}_t$ 
26:  return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

```

Fast-SLAM – Filtro de Partículas

Representa distribuições por amostras

Estima processos não-gaussianos não lineares.

Princípio da reamostragem por importância:

- Gere uma nova geração de partículas.

- Atribua um peso de importância a cada partícula

- Reamostre com o peso.

Fatoração do Posterior

poses mapa observações & comandos

$$p(x_{1:t}, l_{1:m} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) =$$

$$p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} \mid x_{1:t}, z_{1:t})$$

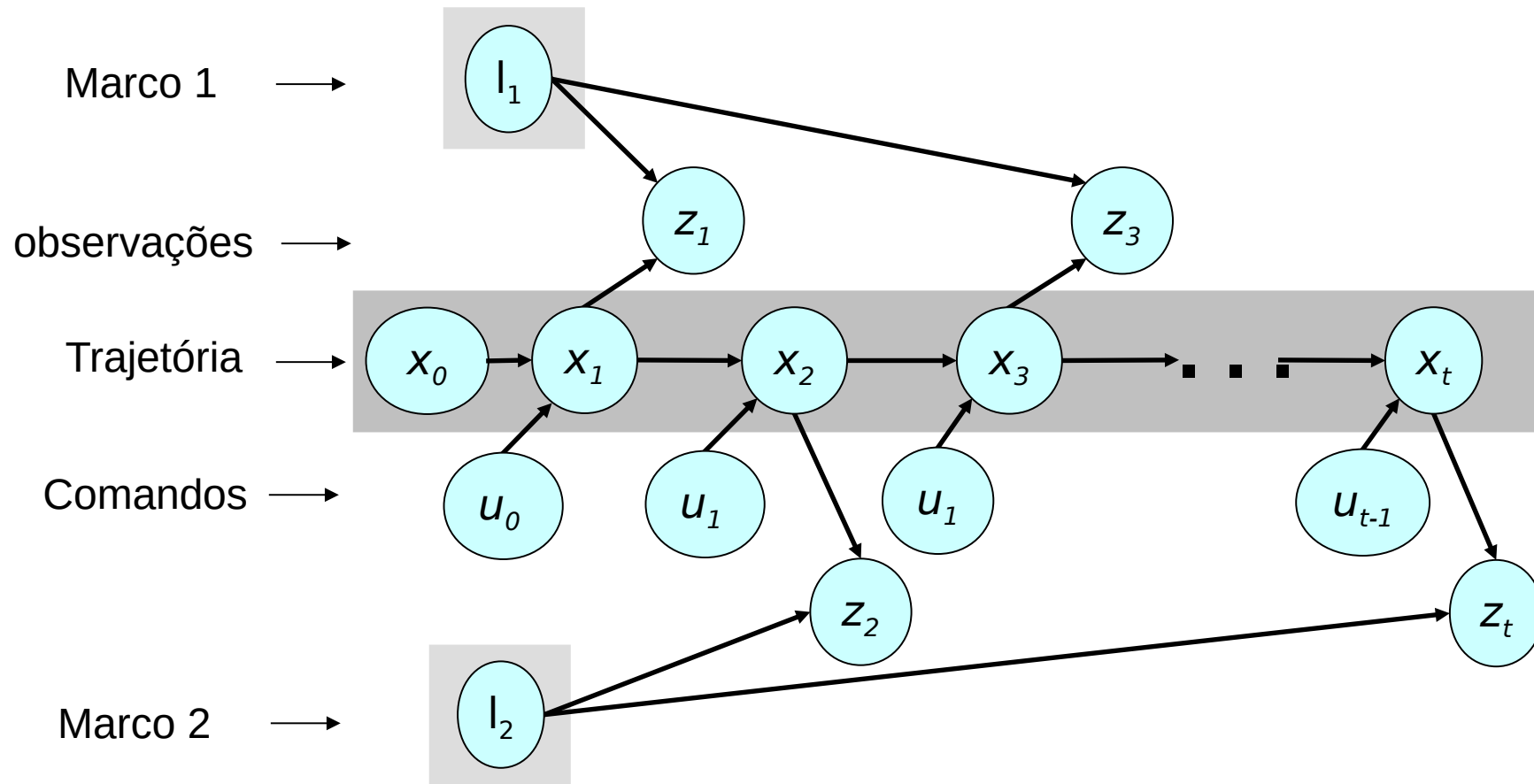
↑
SLAM posterior

↑
Posterior da trajetória

↑
Posterior do mapa

Fatoração do Posterior

(Murphy 1999)

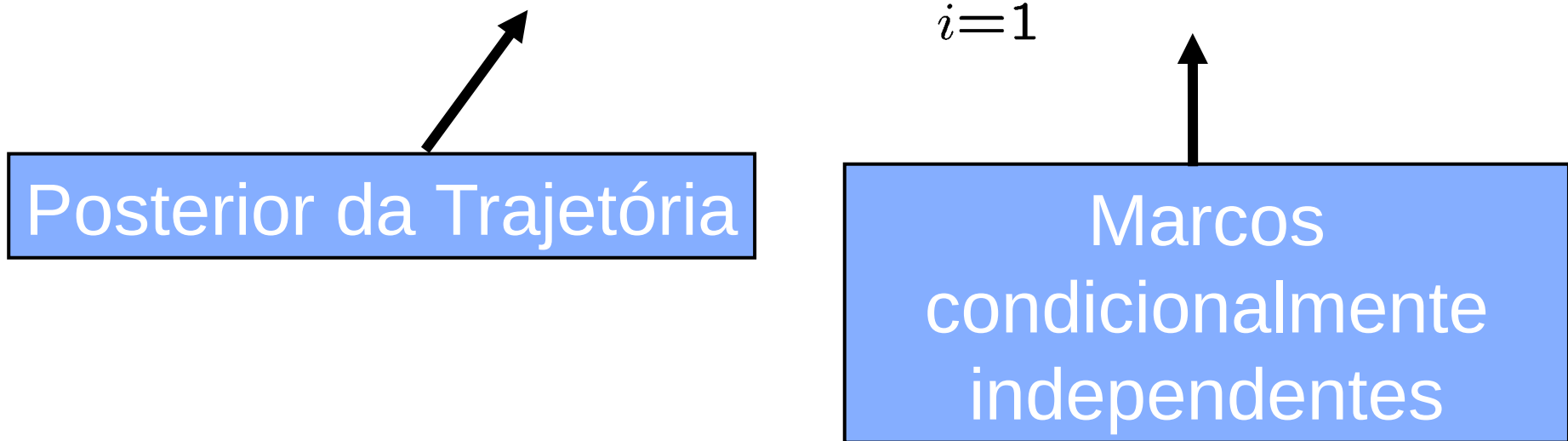


Fatoração do Posterior

(Murphy 1999)

$$\begin{aligned} & p(x_{1:t}, l_{1:m} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \\ &= p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} \mid x_{1:t}, z_{1:t}) \\ &= p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot \prod_{i=1}^M p(l_i \mid x_{1:t}, z_{1:t}) \end{aligned}$$

Posterior da Trajetória



Marcos
condicionalmente
independentes

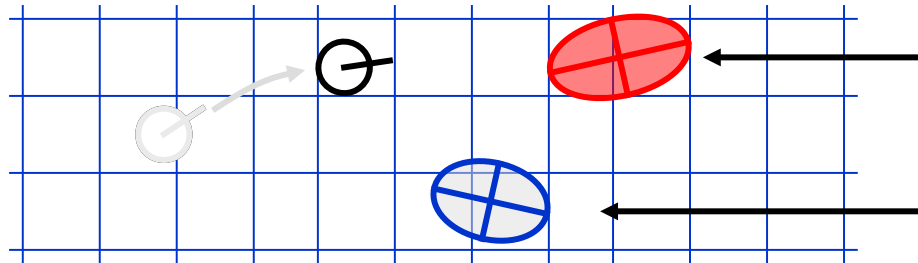
“Rao-Blackwellização”

$$\begin{aligned} & p(x_{1:t}, l_{1:m} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \\ &= p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot p(l_{1:m} \mid x_{1:t}, z_{1:t}) \\ &= p(x_{1:t} \mid z_{1:t}, u_{0:t-1}) \cdot \prod_{i=1}^M p(l_i \mid x_{1:t}, z_{1:t}) \end{aligned}$$

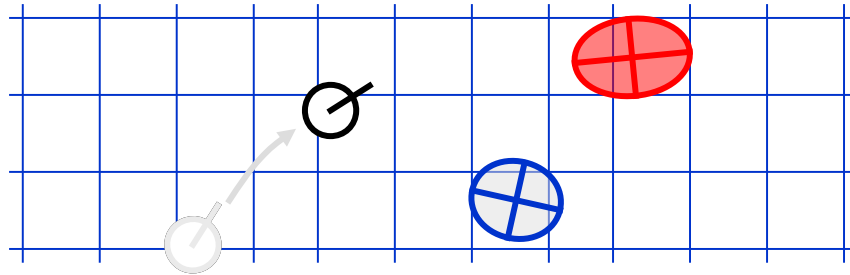
Supondo que o 2º termo possa ser calculado de forma eficiente, Filtros de partículas tornam-se viáveis.

FastSlam - Previsão

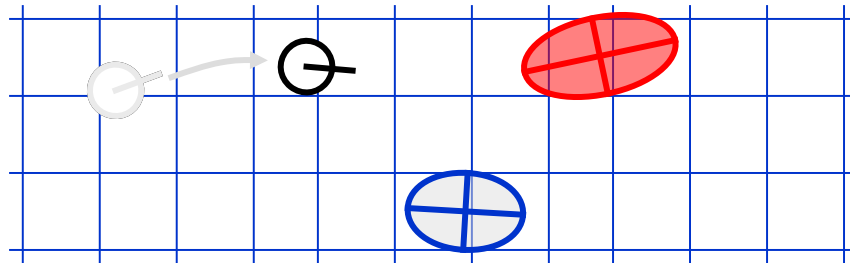
Partícula #1



Partícula #2



Partícula #3

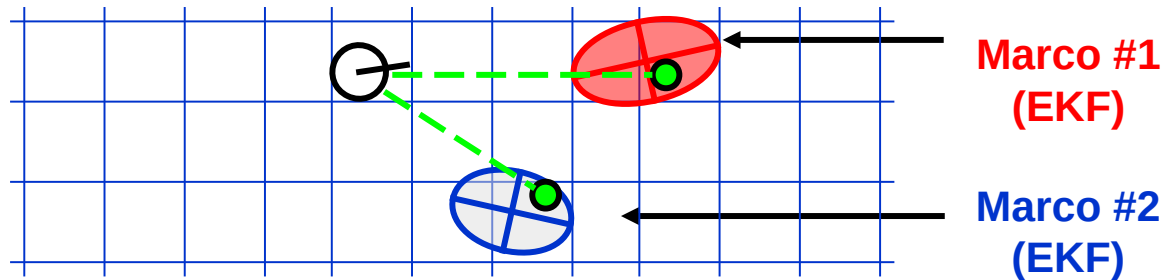


Marco #1
(EKF)

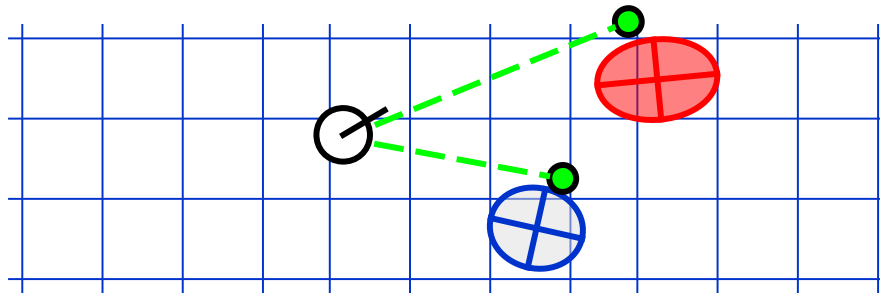
Marco #2
(EKF)

FastSlam - Correção

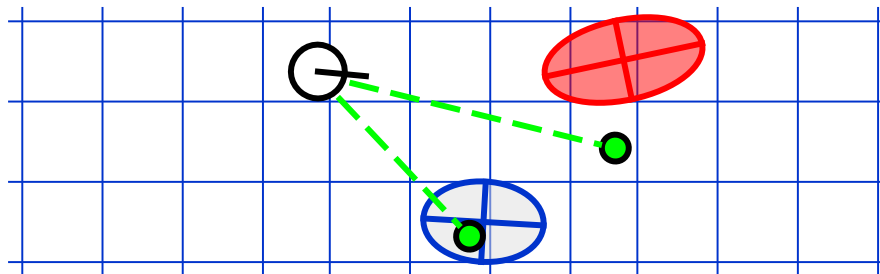
Partícula #1



Partícula #2

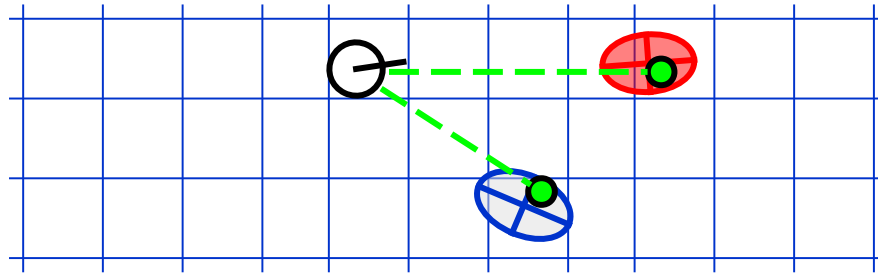


Partícula #3



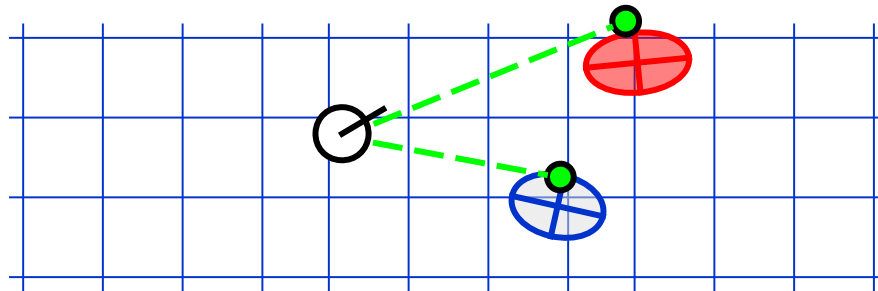
FastSlam – correção

Partícula #1



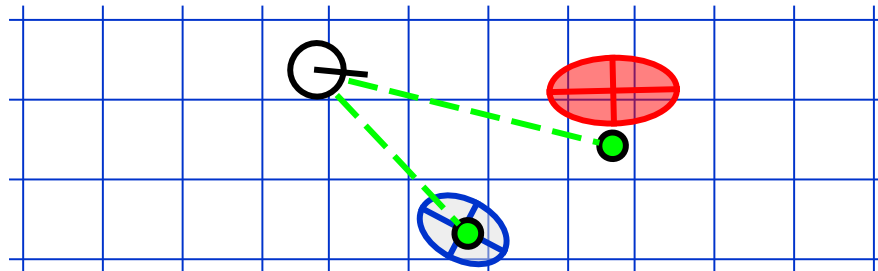
Peso = 0,8

Partícula #2



Peso = 0,4

Partícula #3



Peso = 0,1

FastSlam – Complexidade?

- Atualizar partículas baseadas no controle u_{t-1}

$$O(M)$$

Tempo constante por partícula

- Incorporar observação z_t nos filtros de Kalman (assoc. desconhecida)

$$O(M \log N)$$

Tempo log. por partícula

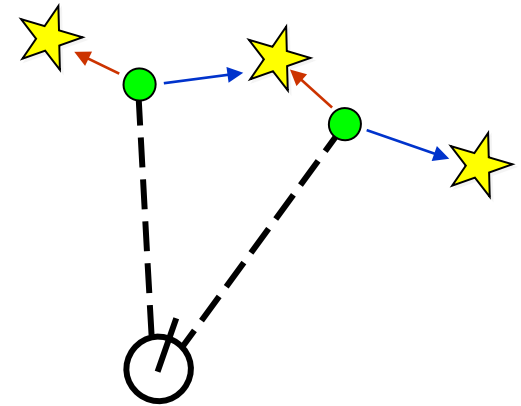
- Reamostrar conjunto de partículas

$$O(M \log N)$$

Tempo log. por partícula

Problema da associação de dados

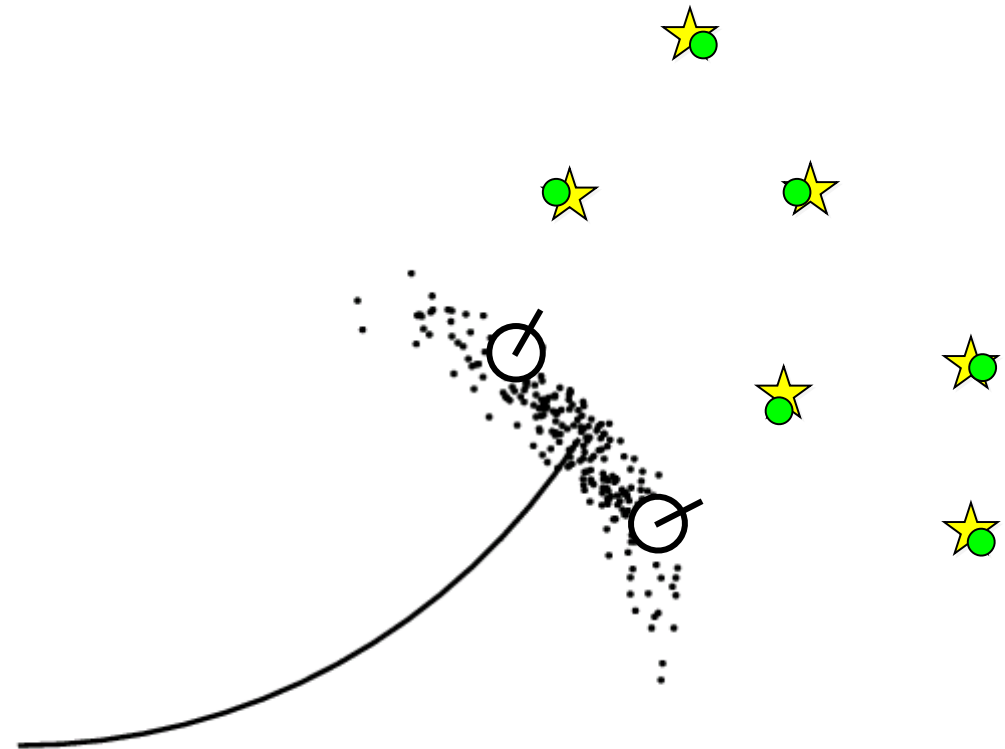
- A qual marco corresponde cada observação?
- Um SLAM robusto deve considerar várias possíveis associações
- Associações dependem do mapa e da *posição* do veículo



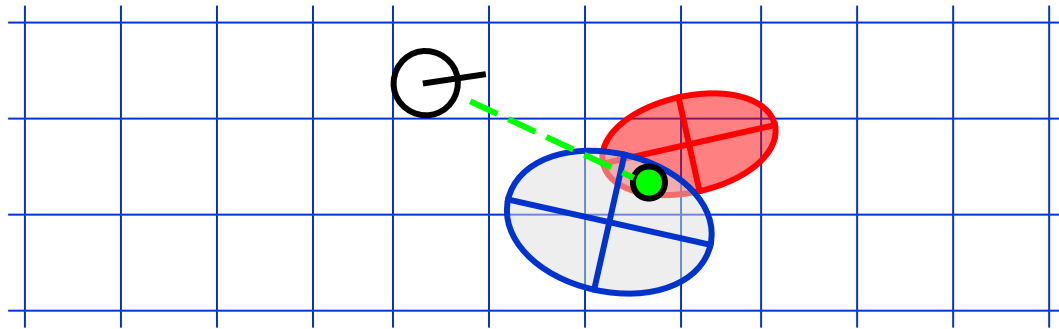
Associação de dados: Multi-hipótese

Associação é feita de forma independente em cada partícula.

Deste modo o erro na posição do robô é retirado da decisão de associações



Associação de dados por partícula



A observação foi gerada por qual marco?

$$P(\text{obs}|\text{vermelho}) = 0.3$$

$$P(\text{obs}|\text{azul}) = 0.7$$

- Duas opções para associação
 - Escolher a mais provável
 - Sortear uma observação com pesos baseados na probabilidade.
- Se a probabilidade é baixa demais, crie um novo marco

Associação de dados por partícula

- Problema: Criação de marcos em posições erradas.
Mesma solução do EKF: Criar contador para cada marco no mapa.
Incrementar quando o marco for associado a uma obs.
Decrementar quando não o for e *deveria ser observado*.
Remover de partículas marcos cujo contador cai para zero.

FastSlam aprimorado (2.0)

- Sortear a próxima partícula *considerando* a medição atual.

Robótica Probabilística

“A robot that carries a notion of its own uncertainty and that acts accordingly is superior to one that does not.”

Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox. 2005.
Probabilistic Robotics. The MIT Press.

