

Monitonia:

Ex 23: Demonstração:

Queremos mostrar que o conj. de irreduzíveis em $[K[x]]$ é infinito.

Suponha por contradição que

$$\{p_1, \dots, p_k\}$$

seja o conj. de todos os irred. Considere $f \in [K[x]]$, $f = p_1 \dots p_k + 1$.

Pelo ex 22(b) existe algum irred. P_j ,
 $1 \leq j \leq k$ tal que $P_j \mid f$. Como $P_j \mid p_1 \cdots p_k$
 temos que $P_j \mid 1 \Rightarrow 1 = P_j q$, contradicção,

pois $\deg(1) = \deg(P_j) + \deg(q) \Rightarrow$
 $0 = \underbrace{\deg(P_j)}_{\geq 0} + \underbrace{\deg(q)}_{\geq 0}.$

Resumo: Alg. de divisão

$$f = gq + r, \quad 0 \leq \deg(r) < \deg(g) \text{ ou } r = 0 \leftarrow$$

obs: Seja $f \in K[x]$ e α uma raiz de f então $(x - \alpha) \mid f$.

Veja que pelo alg. de Euclides

$$f = (x - \alpha) \cdot q(x) + r(x), \quad 0 \leq \deg(r) < \deg(x - \alpha)$$

ou $r = 0$.

Tanto se $0 \leq \deg(r) < 1$ ou $r = 0$ temos
que r é um pol. constante. Logo

$$r = k$$

Daí, usamos que $f(x) = (x-\alpha) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow$

$$f(\alpha) = 0 + r(x) \Rightarrow 0 = \underbrace{r(x)}_{=k}.$$

Portanto, $r = 0$ e $(x-\alpha) \mid f$.

