SISTEMAS AUTÔNOMOS NO PLANO

Consideremos o sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y), \end{cases}$$

sendo f, g funções de clase C^1 em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Um sistemaa do tipo (1) (f e g não dependem de t), é denominado *sistema autônomo*.

Sejam $(x_1(t), y_1(t))$ e $(x_2(t), y_2(t))$ duas soluções de (1) tais que $(x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$.

Definindo $(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t)) = (x_2(t + (t_2 - t_1)), x_2(t + (t_2 - t_1)))$,, teremos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \dot{x}_2(t + (t_2 - t_1)) \\ &= f(x_2(t + (t_2 - t_1)), y_2(t + (t_2 - t_1))) \\ &= f(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t)) \end{aligned}$$

e analogamente $\dot{\tilde{y}}_2(t) = g(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t))$.

Além disso, $\tilde{x}_2(t_1) = x_2(t_2) = x_1(t_1)$ e $\tilde{y}_2(t_1) = y_2(t_2) = y_1(t_1)$. Do Teorema de Existência e unicidade, segue que $(\tilde{x}_2(t), \tilde{y}_2(t)) = (x_1(t), y_1(t)) \Rightarrow (x_2(t+(t_2-t_1)), y_2(t+(t_2-t_1))) = (x_1(t), y_1(t))$, ou seja, as curvas $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$ diferem apenas por uma translação no tempo.

Date: June 22, 2020.

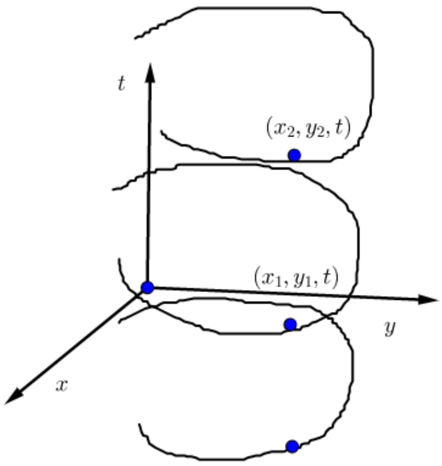

FIGURE 1.

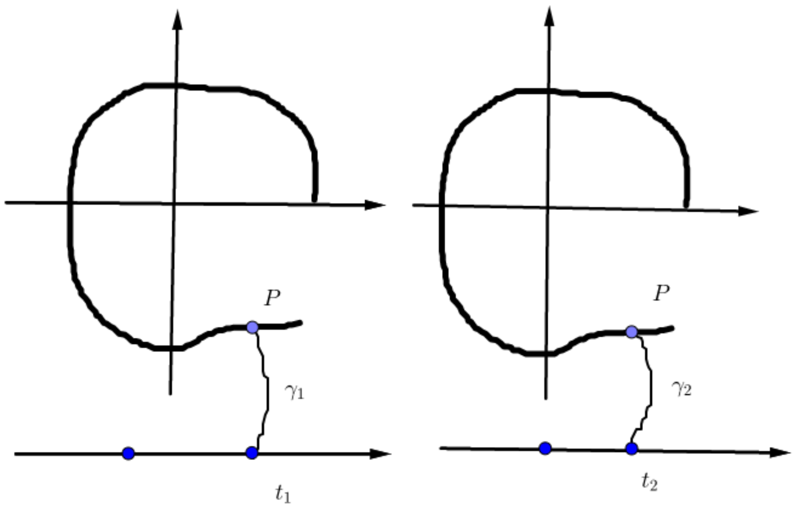

FIGURE 2.

Portanto, no temos mais informações olhando as soluções do sistema (1) no espaçø(x, y, t), basta olhar no plano (x, y) e podemos supor que a condição inicial está dada no instante $t = 0$. As curvas solução do sistema no plano são denominadas *órbitas* ou *trajetórias* do sistema.

O objetivo da teoria qualitativa é estudar o comportamento dessas trajetórias. Para este objetivo é especialmente importante encontrar as soluções especiais de dois tipos:

- Pontos de equilíbrio,
- Órbitas periódicas.

1. Pontos de equilíbrio

Definição 1. *Uma solução constante de* (1) $(x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *é denominada um ponto de equilíbrio (ou ponto singular) do sistema* (1).

Se (x_0, y_0) é um ponto de equilíbrio do sistema (1) então:
$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow f(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow f(x_0, y_0) = 0.$
$\dot{y}(t) = 0 \Rightarrow g(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow g(x_0, y_0) = 0.$ e reciprocamente, ou seja

Proposição 2. *Um ponto* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *é um ponto de equilíbrio do sistema* (1) *se e somente se* $f(x_0, y_0) = 0$ *e* $g(x_0, y_0) = 0$.

Em vista desta proposição, para encontrar as soluções de equilíbrio do sistema (1), *basta resolver uma equação algébrica.*

Exemplo 3. *Consideremos a equação de* 2^a *ordem :* $\ddot{x} - 8x\dot{x} = 0$. *Fazendo* $y = \dot{x}$ *, obtemos o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8xy, \end{cases} \tag{2}$$

Os pontos de equilíbrio são os pontos (x, y) *tais que* $y = 0$, *ou seja, os pontos do eixo* x. *Para as outras soluções, supondo* $\dot{x} \neq 0$ *(ou seja* $y \neq 0$*), teremos a equação:*
$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 8x.$

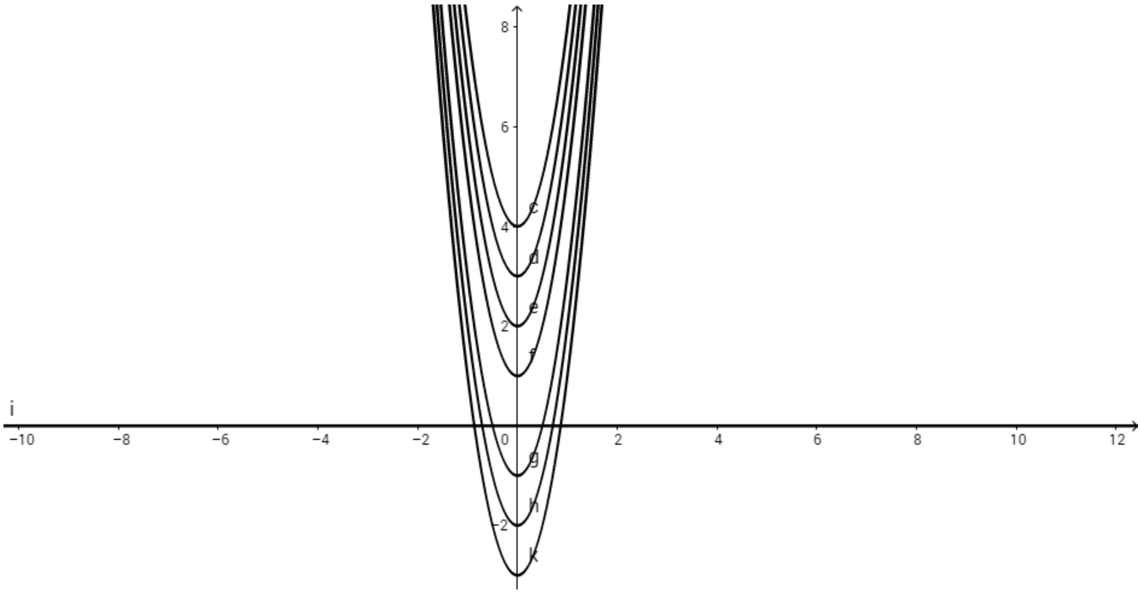

Figure 3.

Segue que $y(x) = 4x^2 + K$.

Para o estudo do sistema (1) é importante entender o comportamento das órbitas próximo dos pontos de equilíbrio.

Definição 4. *Dizemos que um ponto de equilíbrio é estável se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$. *tal que, se* $d(x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \delta$ *então* $d(x(t), y(t)), (x_0, y_0)) < \epsilon$, *para todo* $t > 0$.

Definição 5. *Dizemos que um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\eta > 0$. *tal que, se* $d(x(0), y(0)), (x_0, y_0)) < \eta$ *então* $d(x(t), y(t)), (x_0, y_0)) \to 0$, *quando* $t \to \infty$.

Suponhamos agora que (x_0, y_0) seja uma singularidade isolada de (1). Por uma conveniente mudança linear de coordenadas, podemos supor $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Pela fórrmula de Taylor temos

$$\begin{cases} f(x,y) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + r_1(x,y) \\ g(x,y) = g_x(0,0)x + g_y(0,0)y + r_2(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

sendo r_1 e r_2 funções do tipo $o(|x| + |y|)$.

Pode-se esperar que as soluções do sistema (1) próximas da origem se comportem da mesma maneira que as soluções do sistema linear.

$$
\begin{cases} \dot{x} = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ \dot{y} = g_x(0,0)x + g_y(0,0)y \end{cases} \tag{4}
$$

Pode-se mostrar que isto de fato ocorre 'genericamente, ou mais precisamente se os autovalores da matriz $\begin{bmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0) \\ g_x(0,0) & g_y(0,0) \end{bmatrix}$ tiverem todos parte real não nula. Dizemos que a singularidade é *hiperbólica* se isto ocorrer.

2. Órbitas periódicas

Definição 6. *Uma solução* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *de* (1) *é dita* periódica de período T *se* $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Ao contrário do que ocorre no caso de pontos críticos, a pesquisa de órbitas periódicas não pode, em geral, ser reduzida a um problema "algébrico" e pode ser bastante difícil. No caso do plano, porém temos um resultado importante, o *Teorema de Poincaré Bendixon* que dá condições suficientes para a existência de órbitas periódicas. Para enunciá-lo, precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares. Inicialmente, denotemos por

$$
\Phi(t, P) = (x(t), y(t))
$$

a solução de (1) com condição inicial: $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) = P$.

Supondo que a solução esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$, O conjunto $\gamma = \{\Phi(t, P), \quad t \in \mathbb{R}\}$ é então a órbita passando por P. A *semi órbita positiva* passando por P é então $\gamma^+ = \{\Phi(t, P), \quad t \in \mathbb{R}^+\}$. e analogamente definimos a *semi órbita negativa*.

Definição 7. *O conjunto*

$$\omega(P) = \omega(\gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \exists t_n \to +\infty \ t.q. \ (x,y) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(t_n, P)\}.$$

é chamado conjunto ω-limite da órbita que passa por P. *Analogamente definimos o* conjunto α-limite *da órbita que passa por* P

$$\alpha(P) = \alpha(\gamma) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \exists t_n \to -\infty \ t.q. \ (x,y) = \lim_{n\to-\infty} \Phi(t_n, P)\}.$$

Alguns exemplos de ω e α limites:

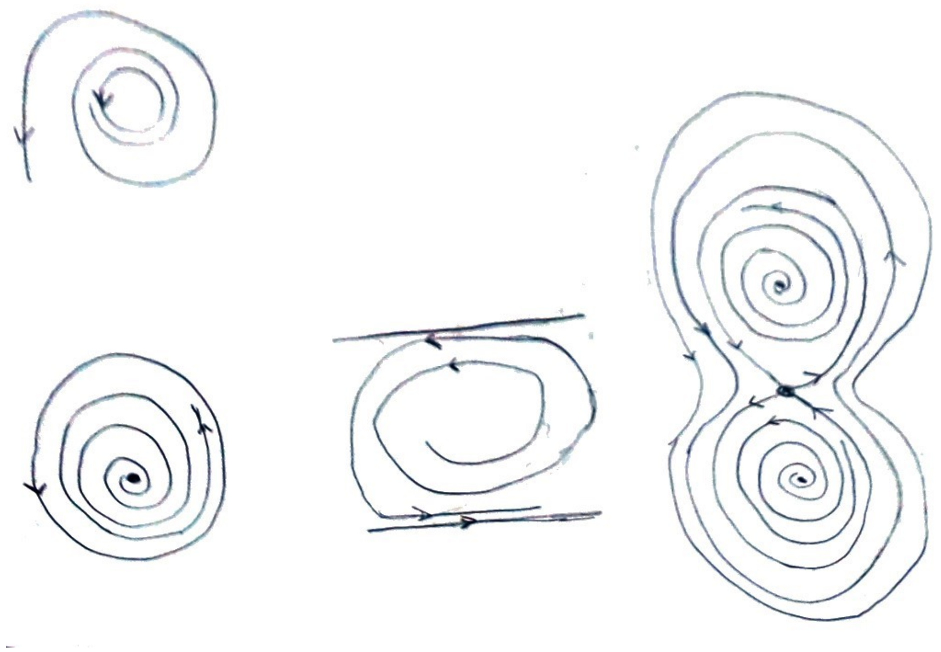

FIGURE 4.

A proposição seguinte apresenta algumas propriedades inportantes para ω limites. Valem propriedades análogas para os α limites mutatis mutandis.

Proposição 8. *Se a semi órbita positiva $\gamma^+(P)$ é limitada, então o conjunto ω-limite de P satisfaz:*

(1) $\omega(P) \neq \emptyset$,
(2) $\omega(P)$ *é compacto,*
(3) $\omega(P)$*é conexo,*
(4) $\omega(P)$ *é invariante, isto é, se* $P^* \in \omega(P)$ *então a solução* $\Phi(t, P^*) \in \omega(P)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
(5) $\omega(P)$ *atrai a solução* $\Phi(t, P)$*, isto é:*

$$\lim_{t \to +\infty} \ dist\ (\Phi(t, P), \omega(P)) = 0$$

.

Uma consequência importante desta proposição é o seguinte

Corolário 9. *Se* $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t, P) = \bar{P}$*, então* $\bar{P}$ *é um ponto de equilíbrio.*

Teorema 10. *(Poincaré-Bendixon). Se a semi órbita positiva $\gamma^+(P)$ é limitada e $\omega(P)$ não contém nehum ponto de equilíbrio, então $\omega(P)$ é uma órbita periódica (vale resultado análogo para $\alpha(P)$).*

Definição 11. *Um* ciclo limite *é uma órbita periódica γ contida no ω -imite de um ponto $p \notin \omega(P)$.*

Exemplo 12. *Consideremos a equação :* $\ddot{u} + (2u^2 + \dot{u}^2 - 2)\dot{u} + u = 0$*, que é equivalente ao sistema:* $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(2x^2 + y^2 - 2)y - x \end{cases}$
Seja a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $V(x, y) = x^2 + y^2$*. Então temos*

$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \leq 0$, se $x^2 + y^2 = 3$ e $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \geq 0$, se $x^2 + y^2 = 1$. Segue que a semi órbita positiva de um ponto $P \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \leq x^2 + y^2 \leq 3\}$ permanece em Ω . Como Ω não contém pontos singulares, segue do Teorema de Poincaré-Bendixon que Ω contém uma órbita periódica.