Relatividade

Aula 09 - Parte 02

Marcelo G Munhoz
Edifício HEPIC, sala 212, ramal 916940
munhoz@if.usp.br

Espaço-Tempo de Minkowski

- Uma vez que discutimos a interpretação geométrica dada às Transformações de Lorentz, vamos formalizar um pouco essa visão a partir da formulação de Minkowski para o espaço-tempo e mostrar formalmente como as Transformações de Lorentz podem ser vistas como uma rotação no espaço-tempo

Interpretação Geométrica

- Podemos inicialmente notar que as transformações de Lorentz:

$$x'_1 = \gamma (x_1 - \beta \cdot x_0)$$

$$x'_0 = \gamma (x_0 - \beta \cdot x_1)$$

- tem o mesmo formato de rotações em um plano x e y , visto que uma rotação em um plano é dada por:

$$x' = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$$

$$y' = y \cos \phi - x \operatorname{sen} \phi$$

Quadrado do intervalo entre dois eventos

- Também vimos anteriormente o quadrado do intervalo entre dois eventos 1 e 2:

$$(\Delta S_{12})^2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 = (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2 - c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2$$

- que no caso de considerarmos a variável previamente definida, $x_0 \equiv ct$, pode ser reescrito como:

$$(\Delta S_{12})^2 = (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2 - (x_0^1 - x_0^2)^2$$

- Essa é uma grandeza invariante segundo as Transformações de Lorentz e se assemelha ao módulo ao quadrado de um vetor em 4 dimensões, a menos do sinal negativo em frente à variável x_0

Espaço-tempo Quadridimensional

- Se definirmos agora uma outra coordenada, chamada de x_4 , que é dada por:

$$x_4 \equiv ict \equiv ix_0$$

- ou seja, uma coordenada puramente imaginária, o quadrado do intervalo entre os eventos 1 e 2 será dado por:

$$(\Delta S_{12})^2 = (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + (x_3^2 - x_3^1)^2 + (x_4^2 - x_4^1)^2$$

- Portanto, uma expressão idêntica ao módulo de um vetor, porém em 4 dimensões

Espaço-tempo Quadridimensional

- Para facilitar os cálculos, vamos considerar que os dois eventos diferem apenas nas coordenadas x_1 e x_4 , ou seja, $(x_2^2 - x_2^1)^2 = 0$ e $(x_3^2 - x_3^1)^2 = 0$, restando:

$$(\Delta S_{12})^2 = (x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_4^2 - x_4^1)^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_4^2$$

Espaço-tempo Quadridimensional

- Voltando à consideração das Transformações de Lorentz como rotações no espaço, podemos compara-las com uma rotação no plano $x_1 \times x_4$:

$$x'_1 = x_1 \cos \phi + x_4 \text{sen} \phi$$

$$x'_4 = -x_1 \text{sen} \phi + x_4 \cos \phi$$

- e buscar um significado para o ângulo ϕ a fim de realmente escrever as Transformações de Lorentz como rotações nesse espaço-tempo quadridimensional

Espaço-tempo Quadridimensional

- Como x'_1 deve permanecer um número real e x'_4 um número imaginário puro, devemos ter que $\cos \phi$ deve ser real e $\text{sen} \phi$ deve ser imaginário
- Com isso, podemos escrever que ϕ é um número imaginário, dado por $\phi = i\psi$ e, portanto:

$$\cos \phi = \cos(i\psi) = \frac{1}{2} (e^{-\psi} + e^{\psi}) = \cosh \psi, \text{ que é real}$$

$$\text{sen} \phi = \text{sen}(i\psi) = \frac{1}{2i} (e^{-\psi} - e^{\psi}) = i \text{senh} \psi, \text{ que é imaginário}$$

Espaço-tempo Quadridimensional

- Consequentemente, teremos que:

$$x'_1 = x_1 \cosh \psi + x_4 i \sinh \psi$$

$$x'_4 = -x_1 i \sinh \psi + x_4 \cosh \psi$$

- que de um ponto de vista mais físico (sem a parte imaginária) leva a:

$$x'_1 = x_1 \cosh \psi - x_0 \sinh \psi$$

$$x'_0 = -x_1 \sinh \psi + x_0 \cosh \psi$$

Espaço-tempo Quadridimensional

- Agora, do movimento da origem do referencial S' que é dada por $x'_1 = 0$ e tem seu movimento descrito no referencial S como sendo $x_1 = Vt = V/c \cdot x_0 = \beta x_0$ (lembrando que $\beta = V/c$) chegamos a:

$$x'_1 = x_1 \cosh \psi - x_0 \sinh \psi \Rightarrow 0 = \beta x_0 \cosh \psi - x_0 \sinh \psi$$

- Portanto:

$$\beta x_0 \cosh \psi = x_0 \sinh \psi \Rightarrow \tanh \psi = \beta$$

Interpretação Geométrica

- Portanto as transformações de Lorentz:

$$x'_1 = \gamma (x_1 - \beta \cdot x_0)$$

$$x'_0 = \gamma (x_0 - \beta \cdot x_1)$$

- podem ser interpretadas como uma rotação:

$$x'_1 = x_1 \cosh \psi - x_0 \sinh \psi$$

$$x'_0 = -x_1 \sinh \psi + x_0 \cosh \psi$$

- no espaço-tempo quadridimensional, sendo que:

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \psi}} = \gamma \text{ e } \sinh \psi = \gamma \beta$$

Quadrivetores no Espaço-tempo

- Essa interpretação geométrica das transformações de Lorentz facilita a identificação de leis físicas que são consistentes com a Teoria da Relatividade, isto é, que são válidas em qualquer referencial considerando as transformações de Lorentz
- Como no caso da física clássica, onde a definição de uma lei física a partir de uma equação vetorial garante que essa lei será válida em qualquer referencial (pois os termos da expressão se transformam de forma semelhante, como as coordenadas, que é a definição de um vetor), o mesmo vale para a Relatividade se definirmos as leis físicas a partir de vetores no espaço-tempo quadridimensional, ou quadrivetores

Quadrivector

Espaço-tempo

- Um exemplo é o quadrivector espaço-tempo:

$$x_\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4), \text{ com } \alpha = 1, 2, 3, 4$$

- cujo módulo é invariante:

$$\sum_{\alpha=1}^4 (x_\alpha^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

- de forma equivalente ao quadrado do intervalo entre dois eventos 1 e 2 (que também é invariante)

Quadrimento

- Para chegarmos em um outro quadri vetor importante, o quadrimento, precisamos examinar a versão infinitesimal do quadrado do intervalo entre dois eventos:

$$dS^2 = (d\vec{x})^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2$$

- onde τ é o tempo próprio do sistema físico, ou seja, o tempo no referencial em que ele está em repouso ($d\vec{x} = 0$)

Quadrimento

- Como:

$$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \vec{v} dt$$

- teremos que:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (\vec{v} dt)^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

Quadrimento

- Com isso chegamos ao quadrimento, definido como:

$$p_\alpha \equiv m_0 \frac{dx_\alpha}{d\tau}$$

- onde a parte espacial é dada por:

$$\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- e a parte temporal é dada por:

$$p_4 = m_0 \frac{dx_4}{d\tau} = m_0 \frac{ic}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dt}{dt} = i \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = i \frac{E}{c}$$

Quadrimento

- Assim como o módulo ao quadrado de qualquer quadri vetor é invariante, como o quadri vetor espaço-tempo:

$$\sum_{\alpha=1}^4 (x_{\alpha}^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

- o módulo ao quadrado do quadrimento:

$$\sum_{\alpha=1}^4 (p_{\alpha}^2) = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2$$

- também é invariante e corresponde ao princípio da conservação da energia total