

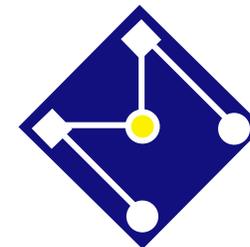


# PMR 3302

## Sistemas Dinâmicos I

### AULA 08: SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

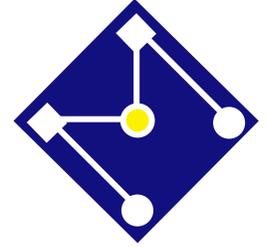
Larissa Driemeier  
Marcílio Alves



# NOSSA AGENDA

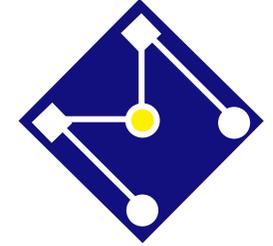
#	Data	Tópico
1	21/02	Introdução ao modelamento e uso do software
2	06/03	Introdução à programação em MatLab
3	20/03	Resolução de Equações Diferenciais - Sistemas Lineares e Não Lineares
4	03/04	Transformada de Laplace e Funções de Transferência
5	24/04	Projeto
6	15/05	Diagrama de Blocos
7	29/05	Análise de Sistemas de Primeira Ordem
8	19/06	Análise de Sistemas de Segunda Ordem





# SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

Enquanto a variação de um parâmetro no sistema de primeira ordem simplesmente altera a velocidade da resposta, as variações nos parâmetros de um sistema de segunda ordem podem alterar a forma da resposta.



# EQUILÍBRIO DINÂMICO

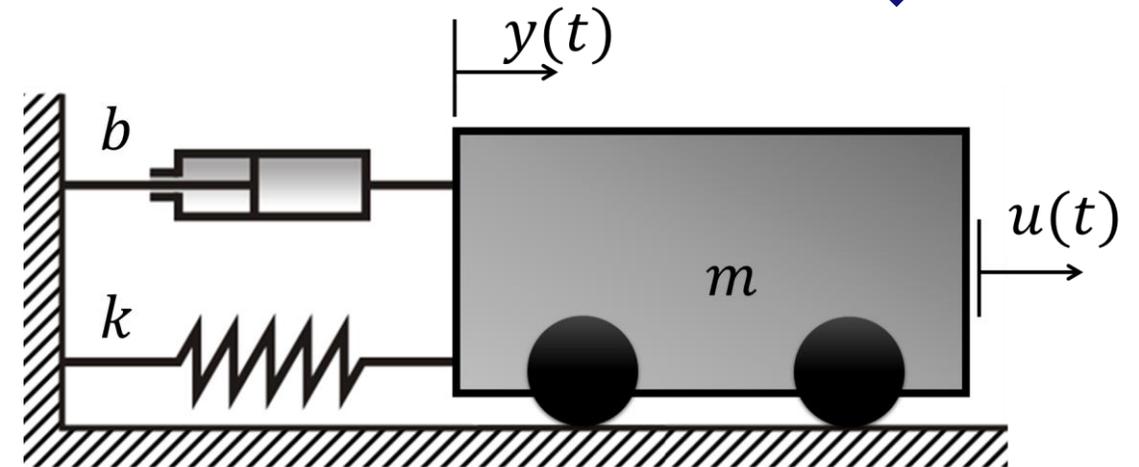
Princípio d'Alembert: a massa  $m$  desenvolve uma força de inércia proporcional à sua aceleração e oposta à ela.

$$F = m\ddot{y}$$

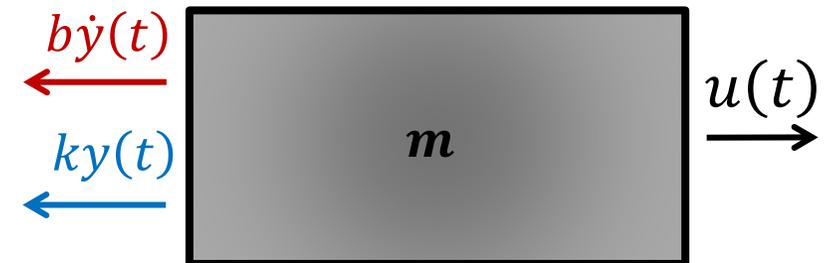
Forças de inércia

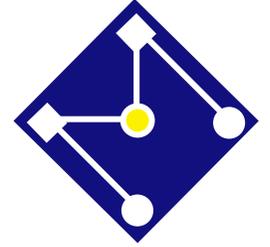
$$u(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) = m\ddot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$



Forças de amortecimento (viscoso)





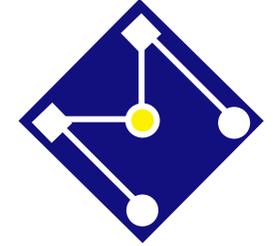
# RESPOSTA DE SISTEMAS DE 2<sup>A</sup> ORDEM

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m}\dot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

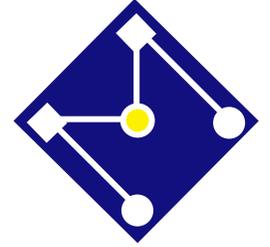
$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \frac{b}{m} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma \quad \frac{1}{k} = K$$

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = K\omega_n^2u(t)$$



# ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTES...

- $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  **frequência natural do sistema**, isto é,
- $\tau_n = \frac{1}{\omega_n}$  tempo característico ou período natural de oscilação: indica o tempo de resposta com que o sistema reage a uma perturbação de entrada;
- $\zeta = \frac{b}{b_{cr}} = \frac{b}{2m\omega_n}$  **fator de amortecimento** adimensional, é a relação entre o amortecimento real e o crítico. Fisicamente, é uma medida do grau de amortecimento (ou do caráter oscilatório) da resposta do sistema;
- **$K$  ganho estático do sistema**: é a razão entre os valores finais da resposta e de uma determinada entrada considerada
- Vamos adiantar uma definição:  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  é a **frequência natural amortecida**.



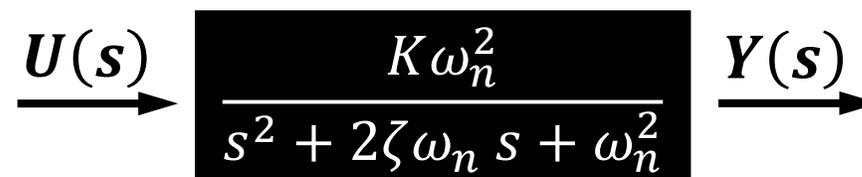
# FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

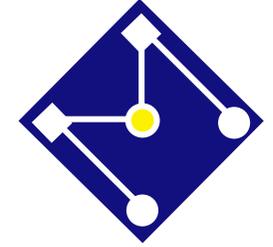
$$s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) Y(s) = K\omega_n^2 U(s)$$

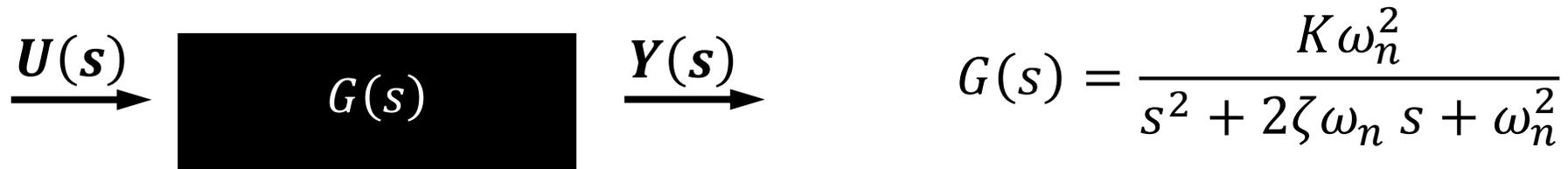
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

**Diagrama de blocos**





# RESPOSTA NO TEMPO: SISTEMA DE 2ª ORDEM. CASO GERAL



Equação característica:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

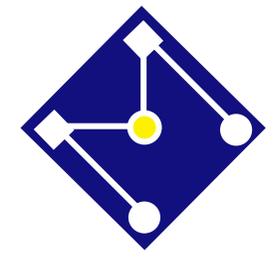
$$\Delta = 4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2$$

$$\Delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)$$

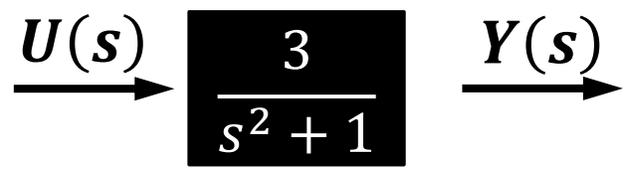
$$\Delta > 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 > 0 \rightarrow \zeta^2 > 1 \rightarrow \zeta > 1$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 = 0 \rightarrow \zeta^2 = 1 \rightarrow \zeta = 1$$

$$\Delta < 0 \rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 \rightarrow \zeta^2 < 1 \rightarrow \zeta < 1, \zeta = 0$$



# EXEMPLOS



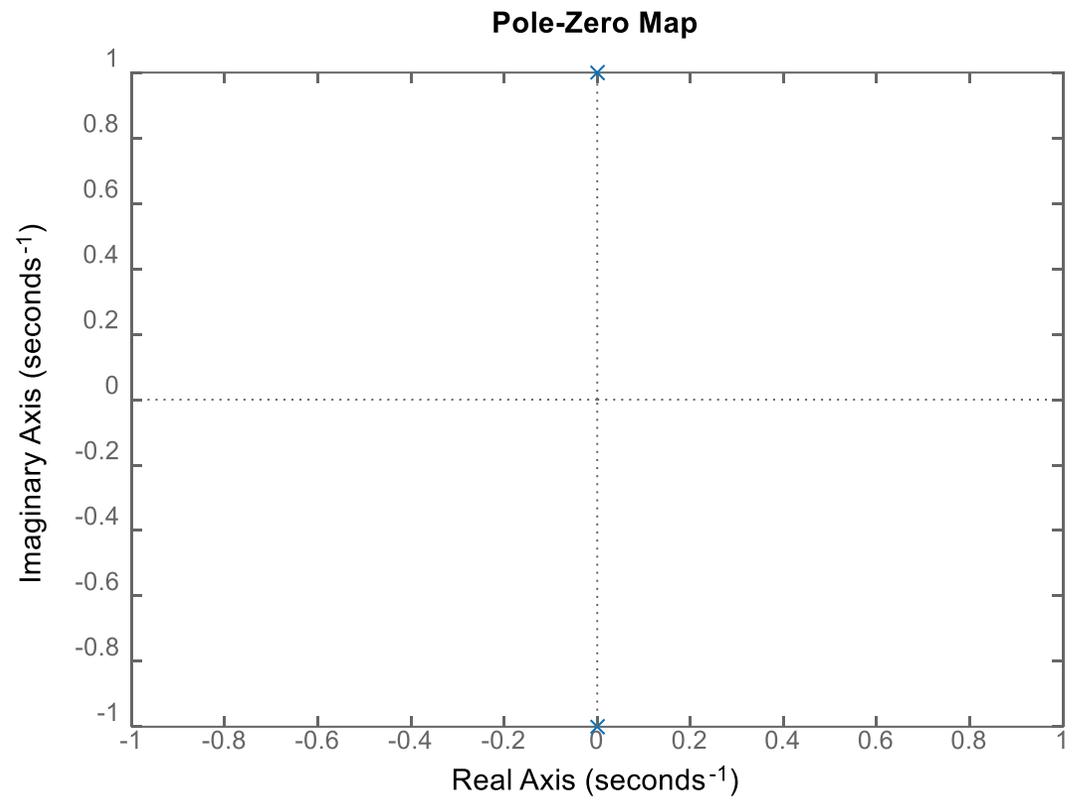
$K = 3 \quad \zeta = 0 \quad \omega_n = \omega_d = 1$

pólos:

$s = 0.0000 - 1.0000i$   
 $s = 0.0000 + 1.0000i$

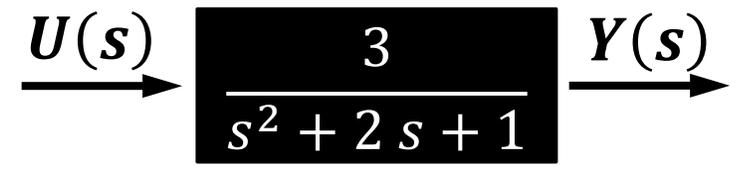
Polos imaginários puros conjugados

```
##
num=[3]
den=[1, 0, 1]
G0=control.tf(num,den)
[z,p,k]=control.tf2zp(num,den)
control.pzmap(G0);
```





# CONT...



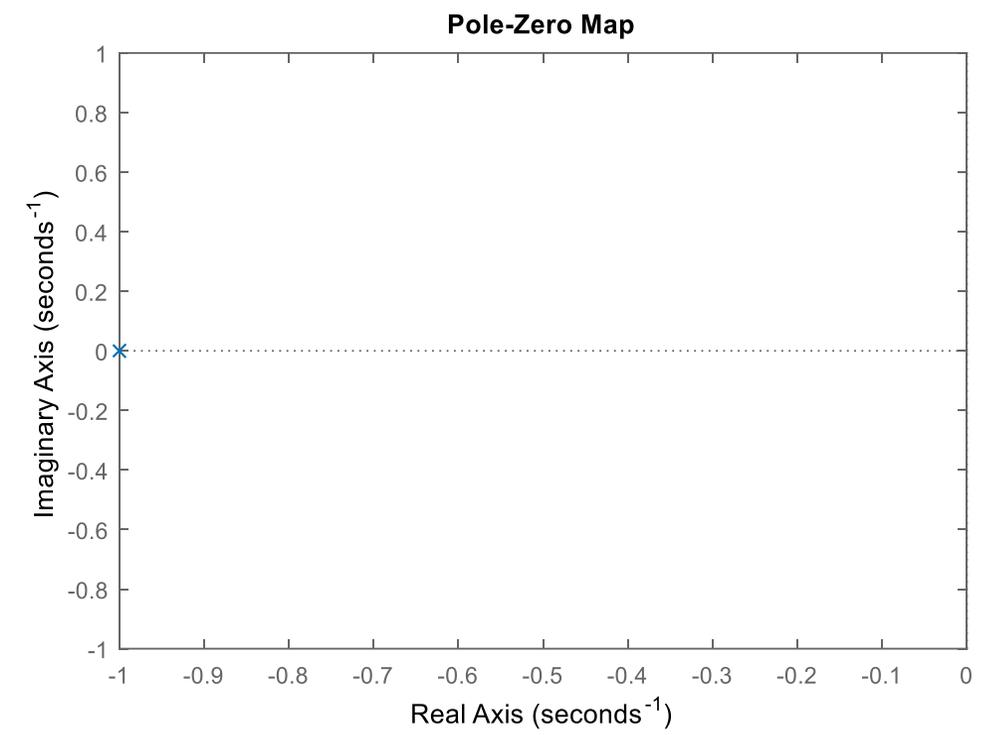
```
##  
num=[3]  
den=[1,2,1]  
G1=control.tf(num,den)  
[z,p,k]=control.tf2zp(num,den)  
control.pzmap(G1);
```

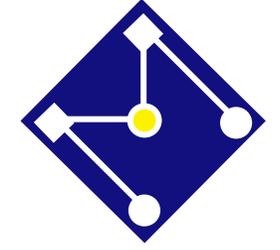
$K = 3$        $\zeta = 1$        $\omega_n = 1$        $\omega_d = 0$

pólos:

$s = -1$   
 $s = -1$

**Polos reais e duplos**





# CONT...

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{3}{2s^2 + 2s + 2}} \xrightarrow{Y(s)}$$

$K = 1,5 \quad \zeta = 0,5 \quad \omega_n = 1 \quad \omega_d = 0,866$

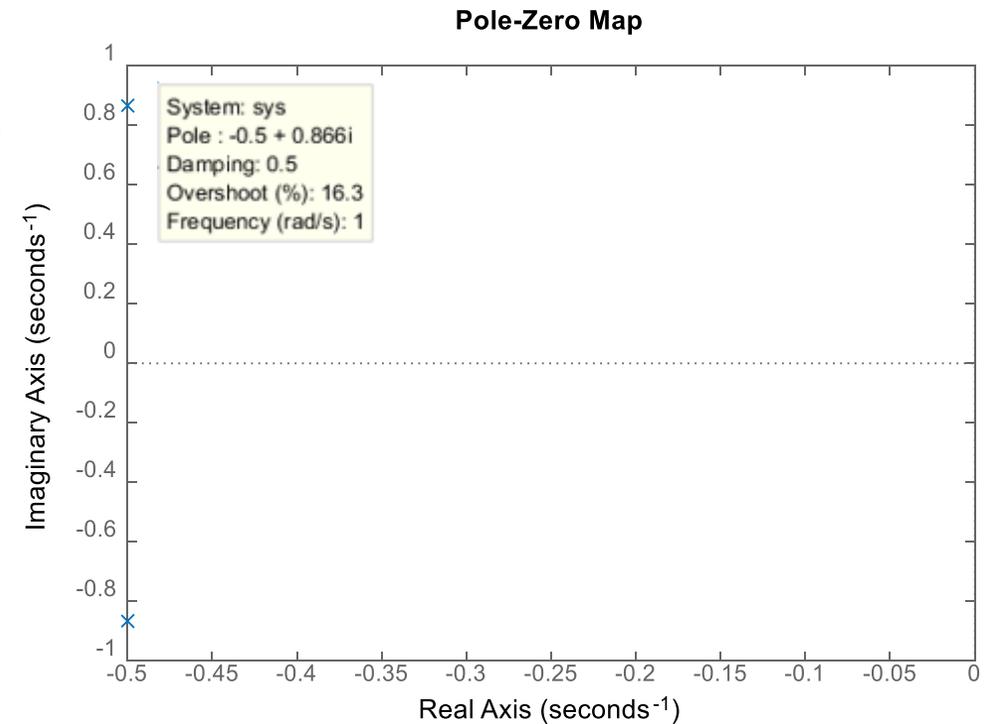
pólos:

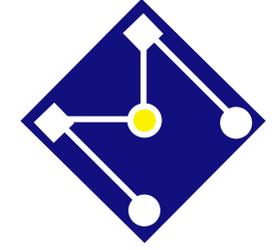
$$s = -0.5000 - 0.8660i$$

$$s = -0.5000 + 0.8660i$$

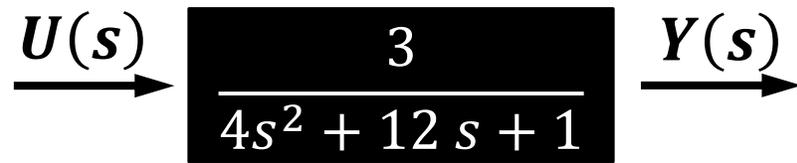
Polos complexos conjugados

```
##
num=[3]
den=[2, 2, 2]
G01=control.tf(num,den)
[z,p,k]=control.tf2zp(num,den)
control.pzmap(G01);
```





# CONT...



$K = 3$        $\zeta = 3$        $\omega_n = 0,5$

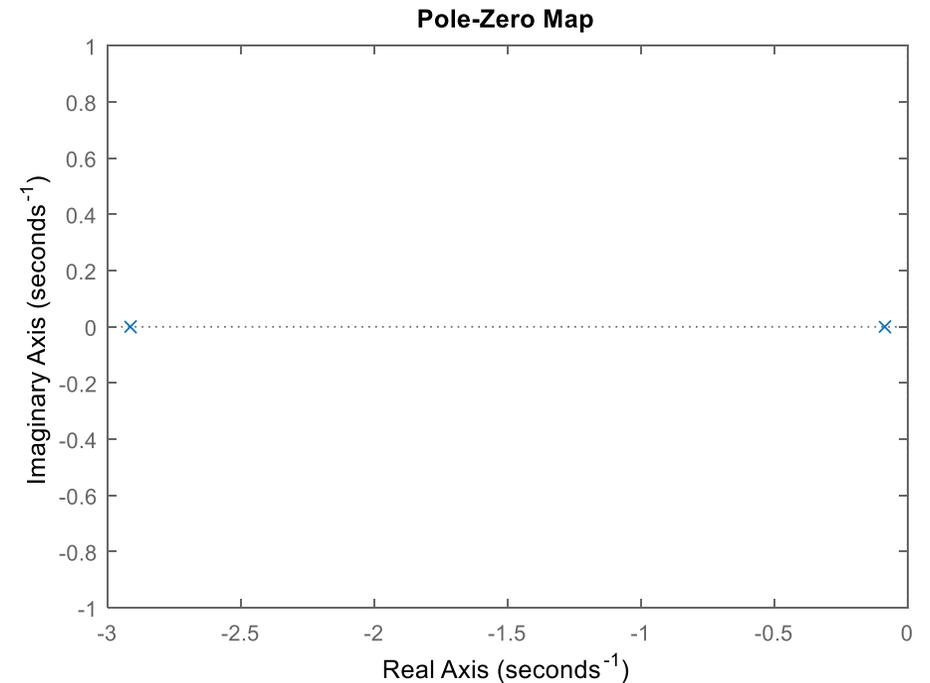
pólos:

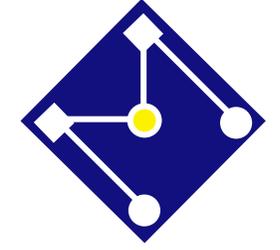
$s = -2,9142$

$s = -0,0858$

Polos reais e distintos

```
##
num=[3]
den=[4, 12, 1]
G2=control.tf(num,den)
[z,p,k]=control.tf2zp(num,den)
control.pzmap(G2);
```





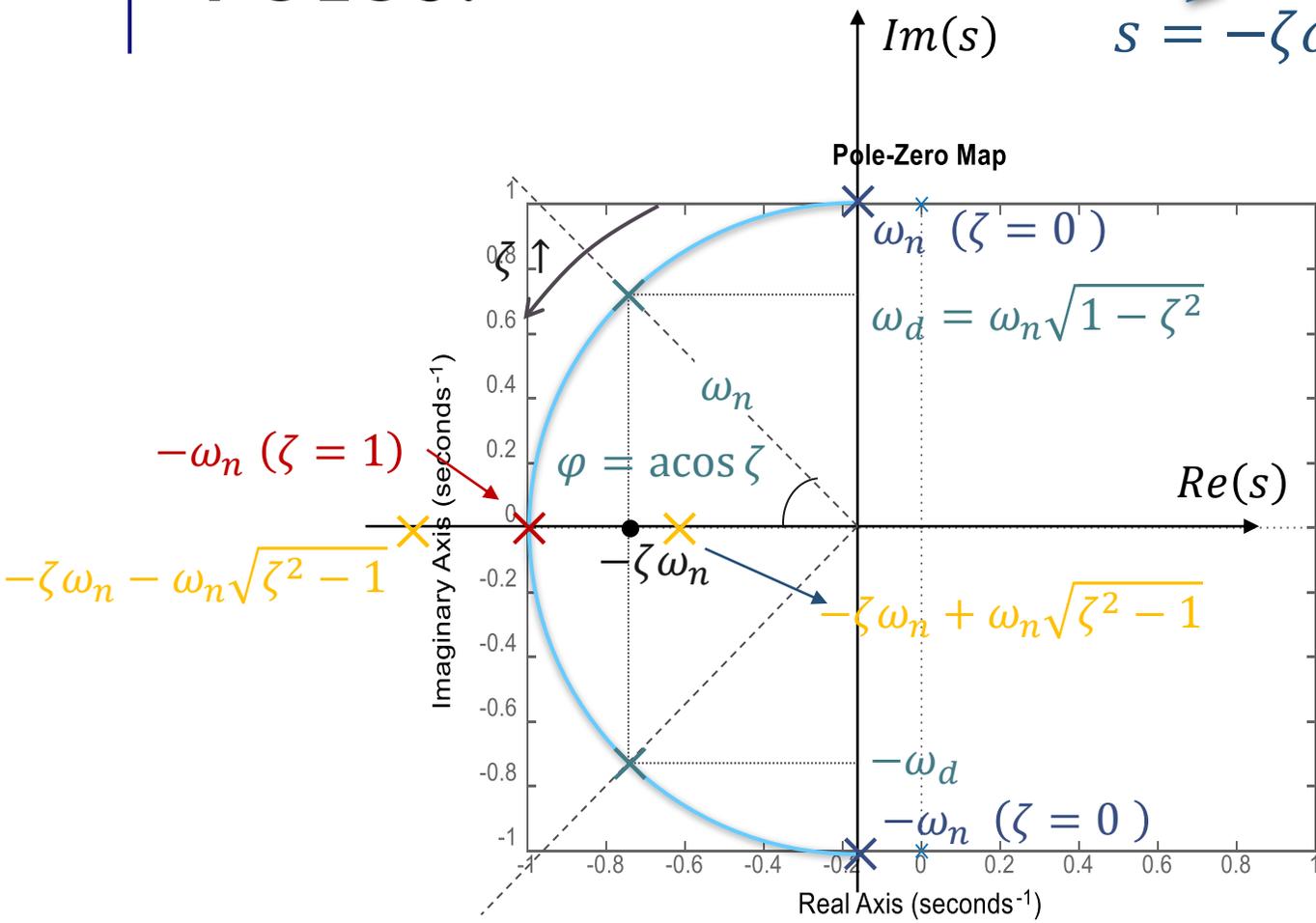
# PÓLOS:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$



$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$



$\zeta = 0$   
Pólos imaginários

**Sistema sem amortecimento**  
 $\pm j\omega_n = \pm j\omega_n$

$0 < \zeta < 1$   
Pólos complexos conjugados

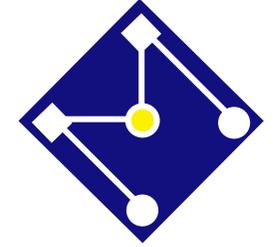
**Sistema subamortecido**  
 $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$

$\zeta = 1$   
Pólo real duplo

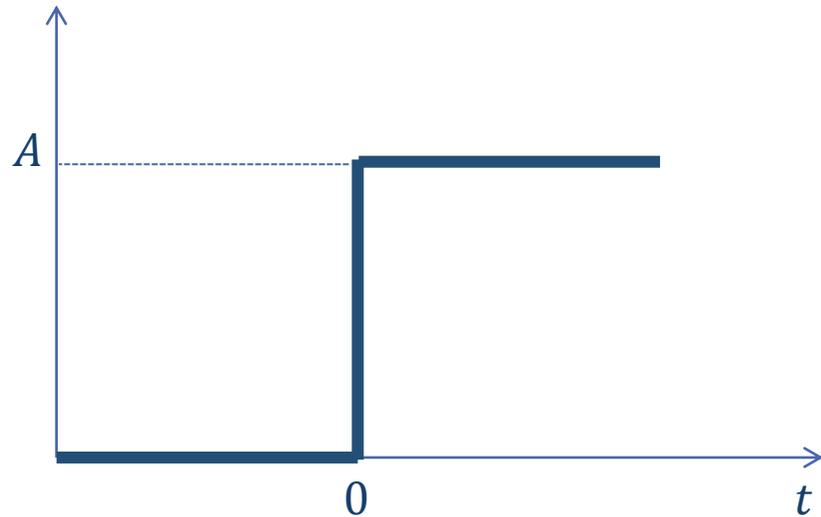
**Sistema criticamente amortecido**  
 $-\zeta\omega_n = -\omega_n$

$\zeta > 1$   
Pólos reais distintos

**Sistema sobreamortecido**  
 $-\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



# RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 2ª ORDEM A UMA FUNÇÃO DEGRAU

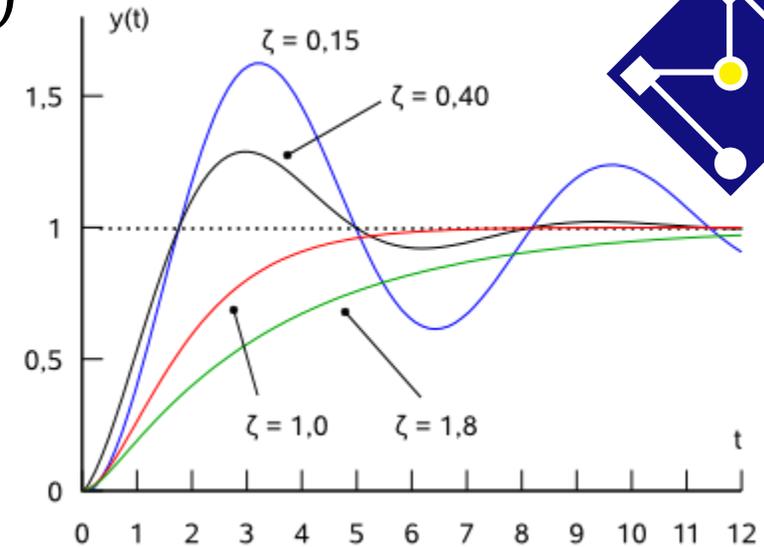
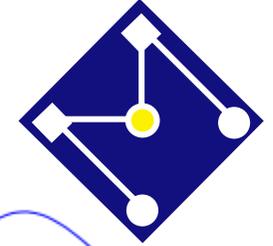


$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{A}{s} = 0$$

Função de transferência de um sistema de 2ª ordem

Transformada de Laplace da função degrau com amplitude  $A = 1$

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{K\omega_n^2}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$



$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

as duas raízes da equação característica

$$p_1 = \omega_n \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

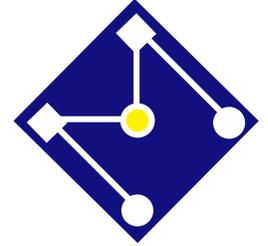
$$p_2 = \omega_n \left( -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

Dependendo do valor de  $\zeta$  podem-se distinguir três casos:

$0 < \zeta < 1$  resposta subamortecida ou oscilatória ("underdamped")

$\zeta = 1$  resposta criticamente amortecida

$\zeta > 1$  resposta superamortecida ou não-oscilatória ("overdamped")



# RESPOSTA SUBAMORTECIDA

$$0 < \zeta < 1$$

Polos complexos (conjugados simétricos). Sistema estável e subamortecido.

$$y(t) = K \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left[ \cos \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right) \right] \right\}$$

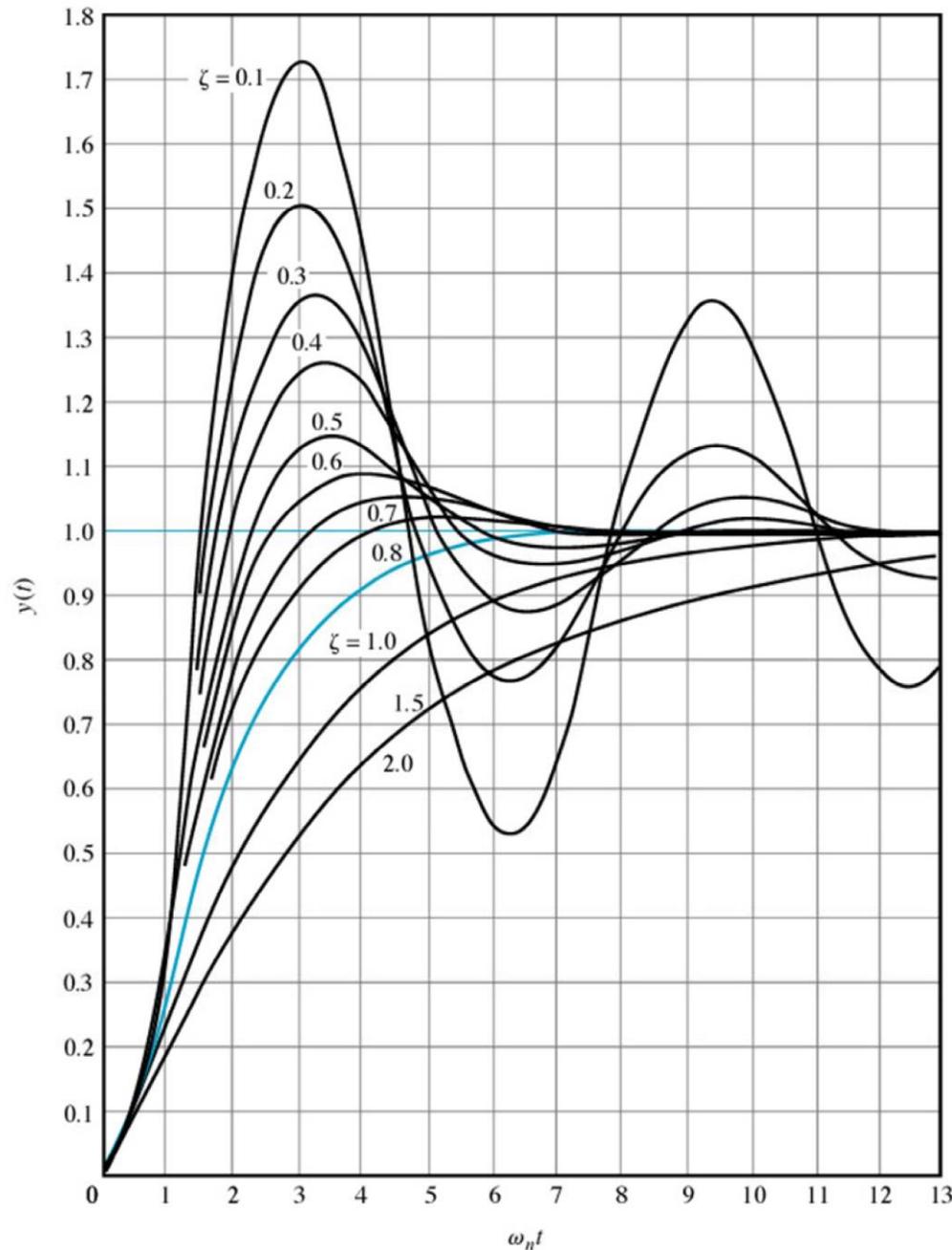
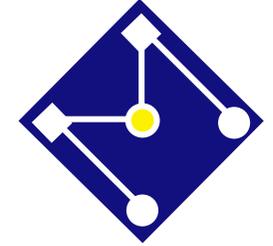
Portanto, a frequência da oscilação de uma resposta subamortecida é dada por

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \text{ em radianos/tempo}$$

$$\omega_d = \frac{\omega_d}{2\pi} \sqrt{1 - \zeta^2}, \text{ em ciclos/tempo}$$

Para  $\zeta = 0$  tem-se  $\omega_d = \omega_n$

O efeito do amortecimento é reduzir a frequência a um valor inferior a frequência natural



Respostas ao degrau unitário do protótipo de um sistema de segunda ordem, geradas como funções do tempo normalizado,  $\omega_n t$  para vários valores de  $\zeta$ .



# RESPOSTA CRÍTICA

$$\zeta = 1$$

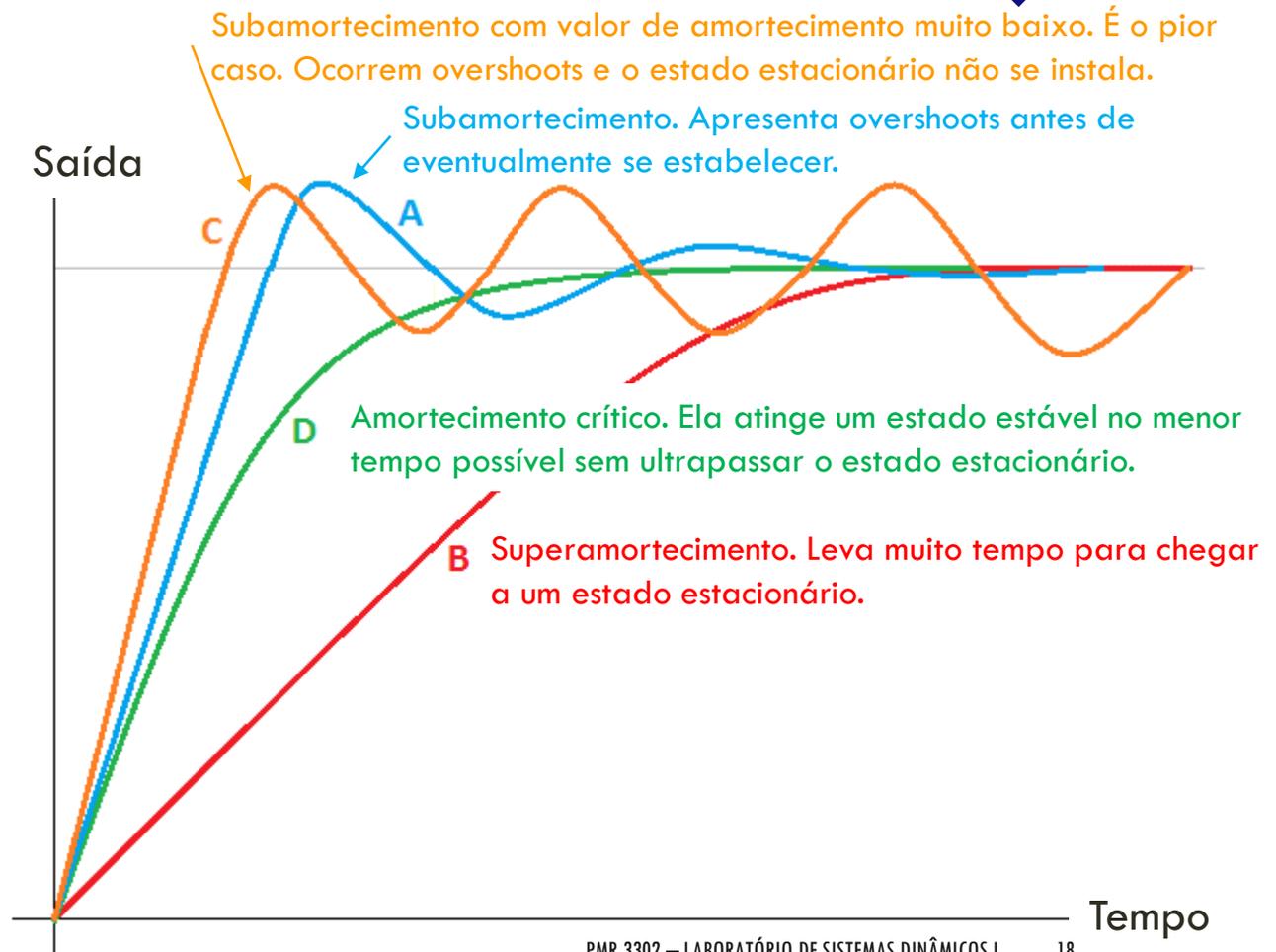
$$p_1 = p_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n$$

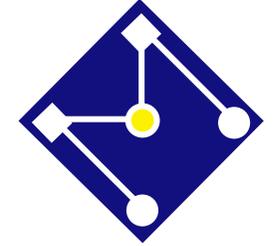
Polos reais iguais. Sistema estável e amortecido criticamente.

$$y(t) = KA [1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}]$$

A resposta para  $\zeta = 1$  permite a aproximação mais rápida e não oscilatória do seu valor final, semelhante a um sistema de 1ª ordem.

Muitas vezes, o **caso com amortecimento crítico** é a melhor escolha.





# RESPOSTA SUPERAMORTECIDA

$$\zeta > 1$$

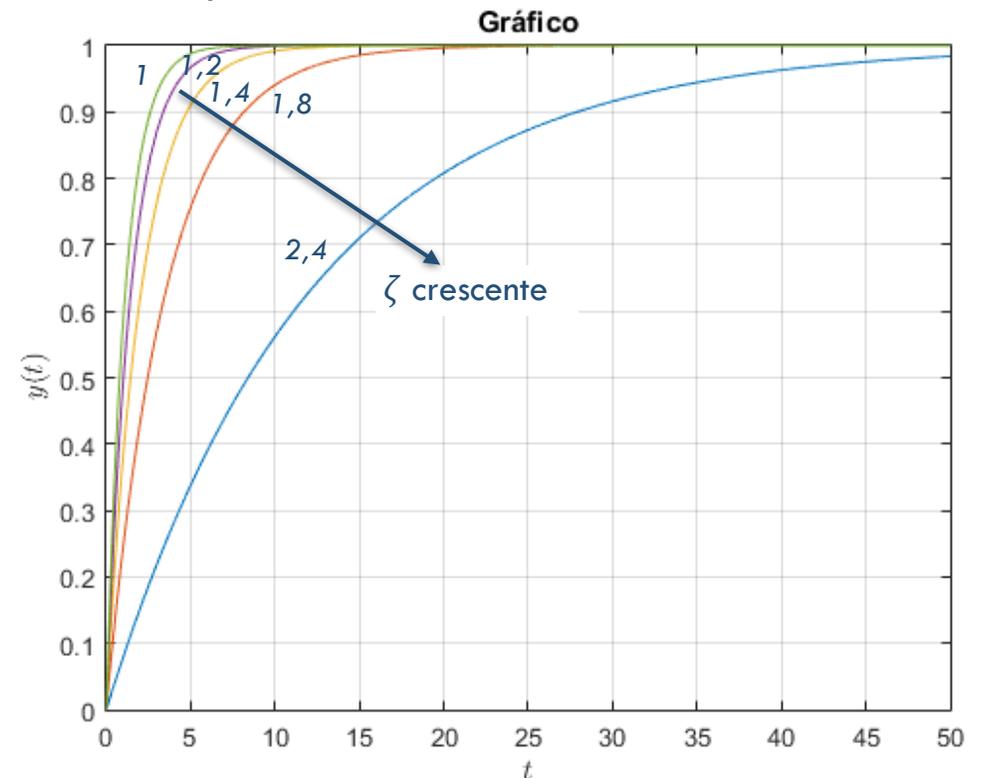
$$y(t) = KA \left[ 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right]$$

$$s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n$$

$$s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n$$

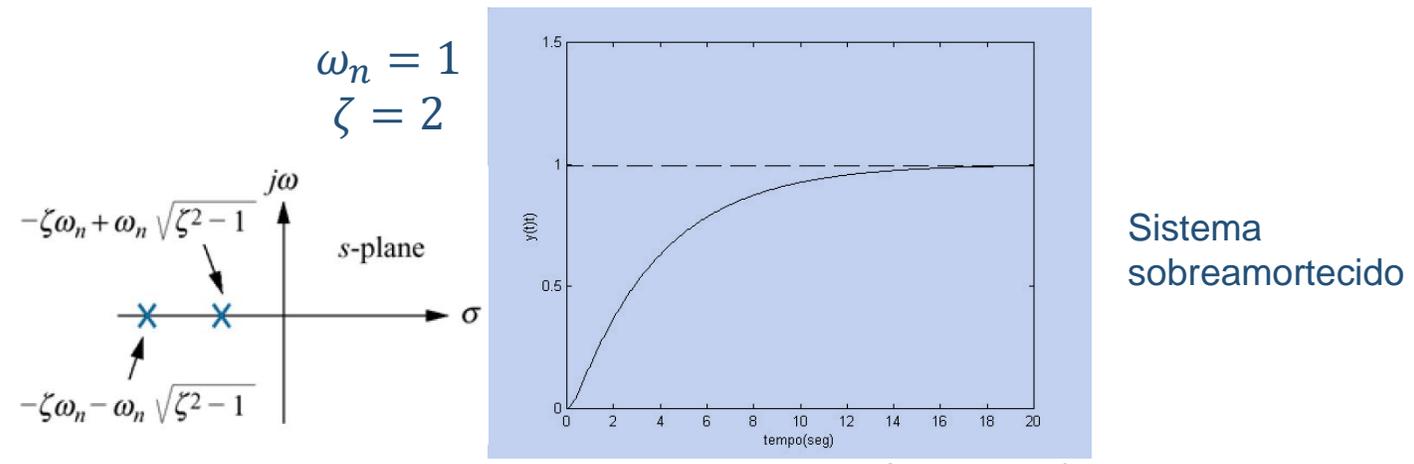
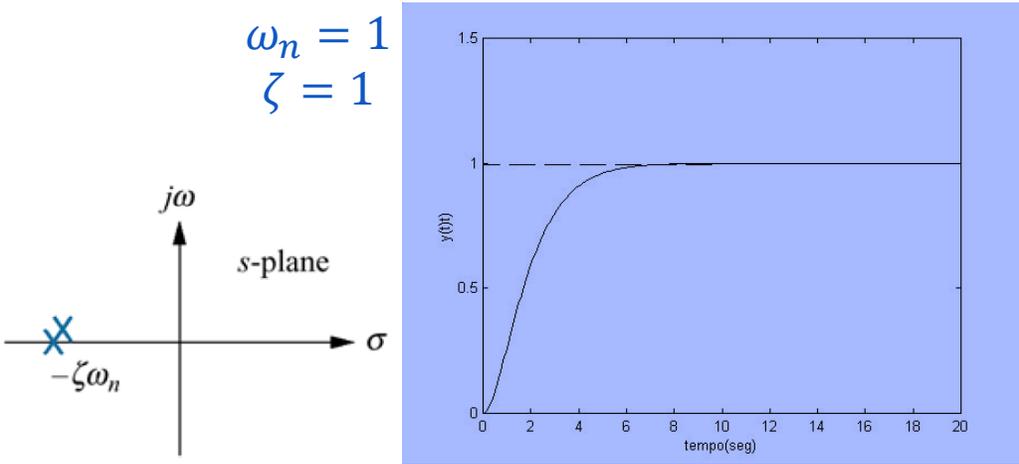
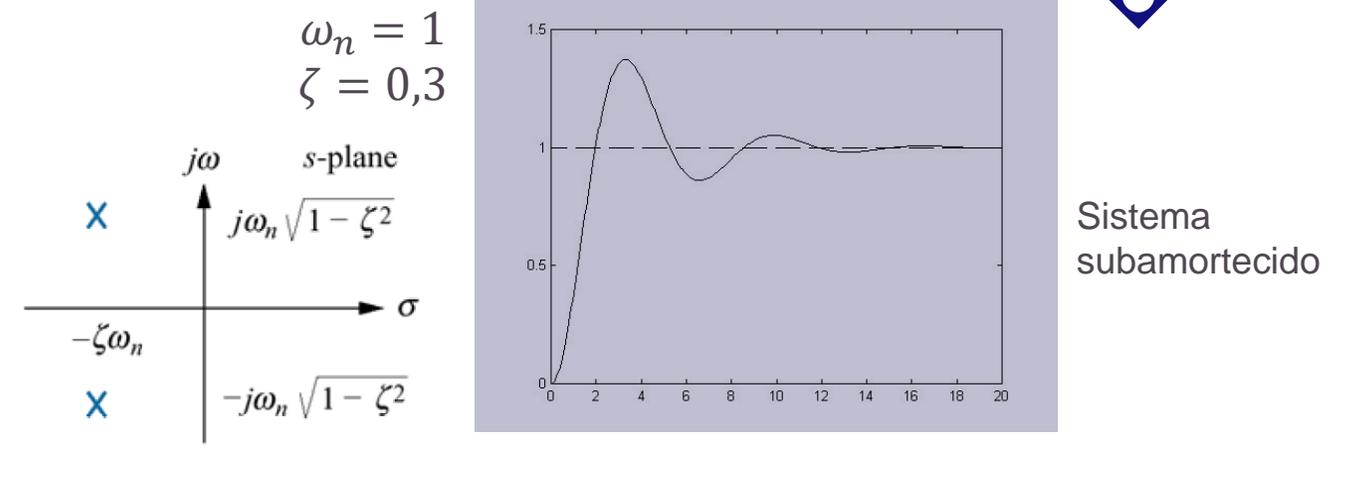
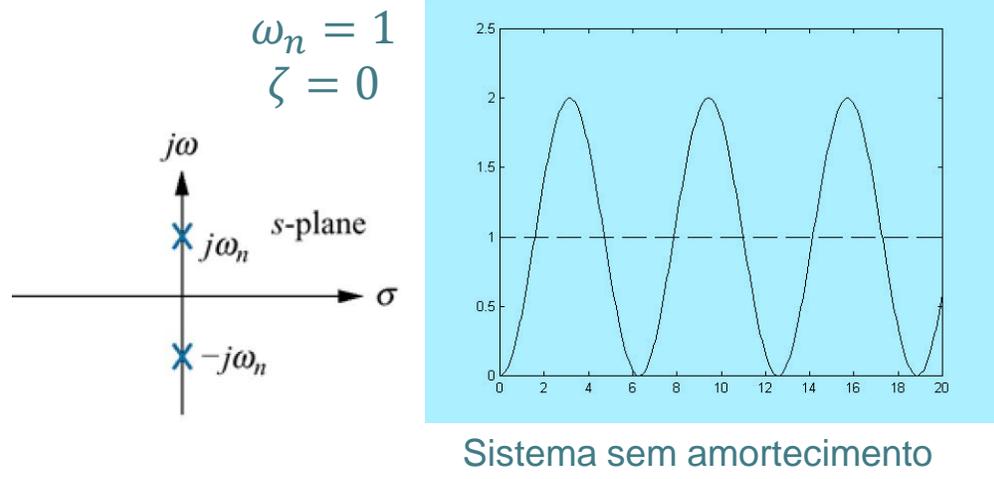
observe que a resposta é não-oscilatória e sem overshoot, e se torna mais lenta à medida que  $\zeta$  aumenta

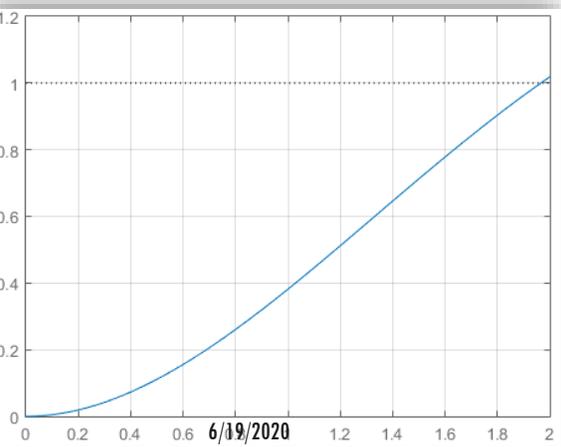
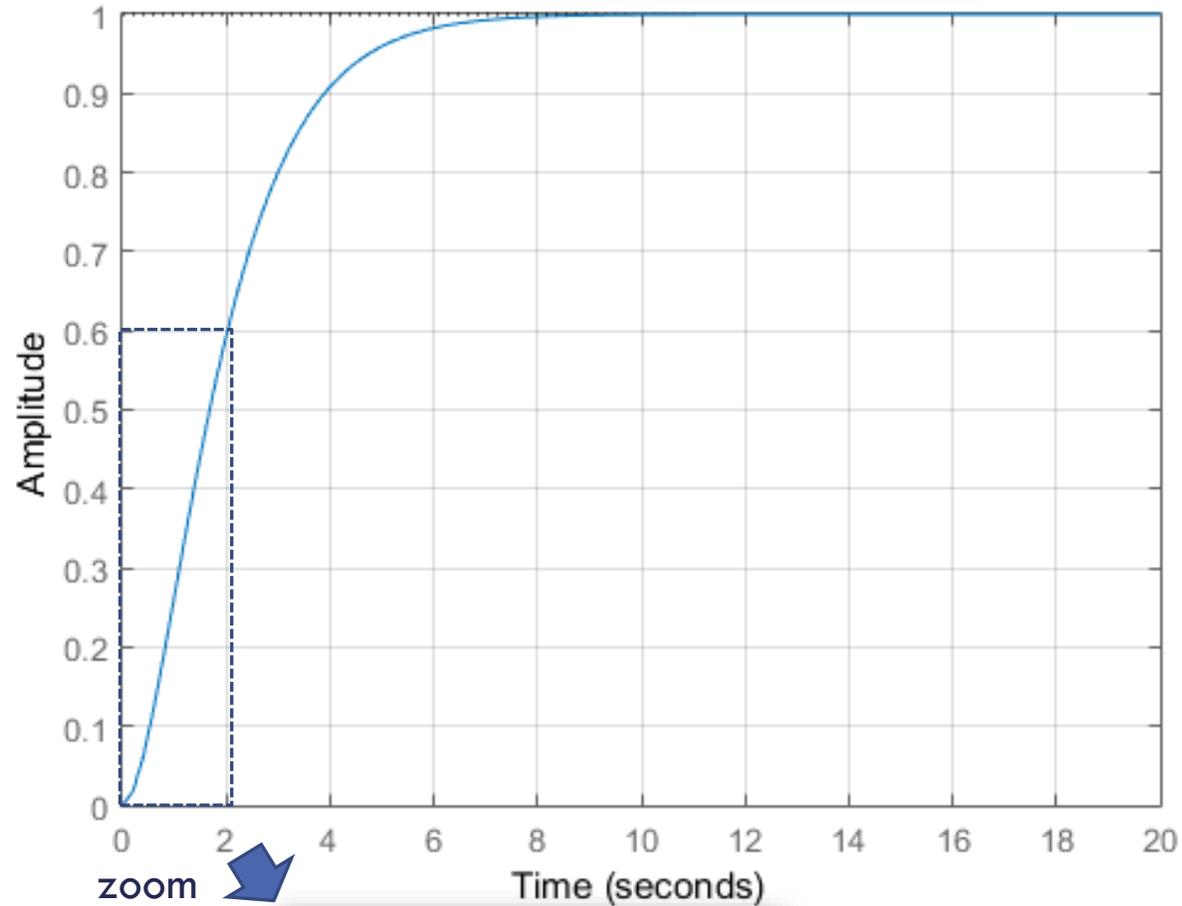
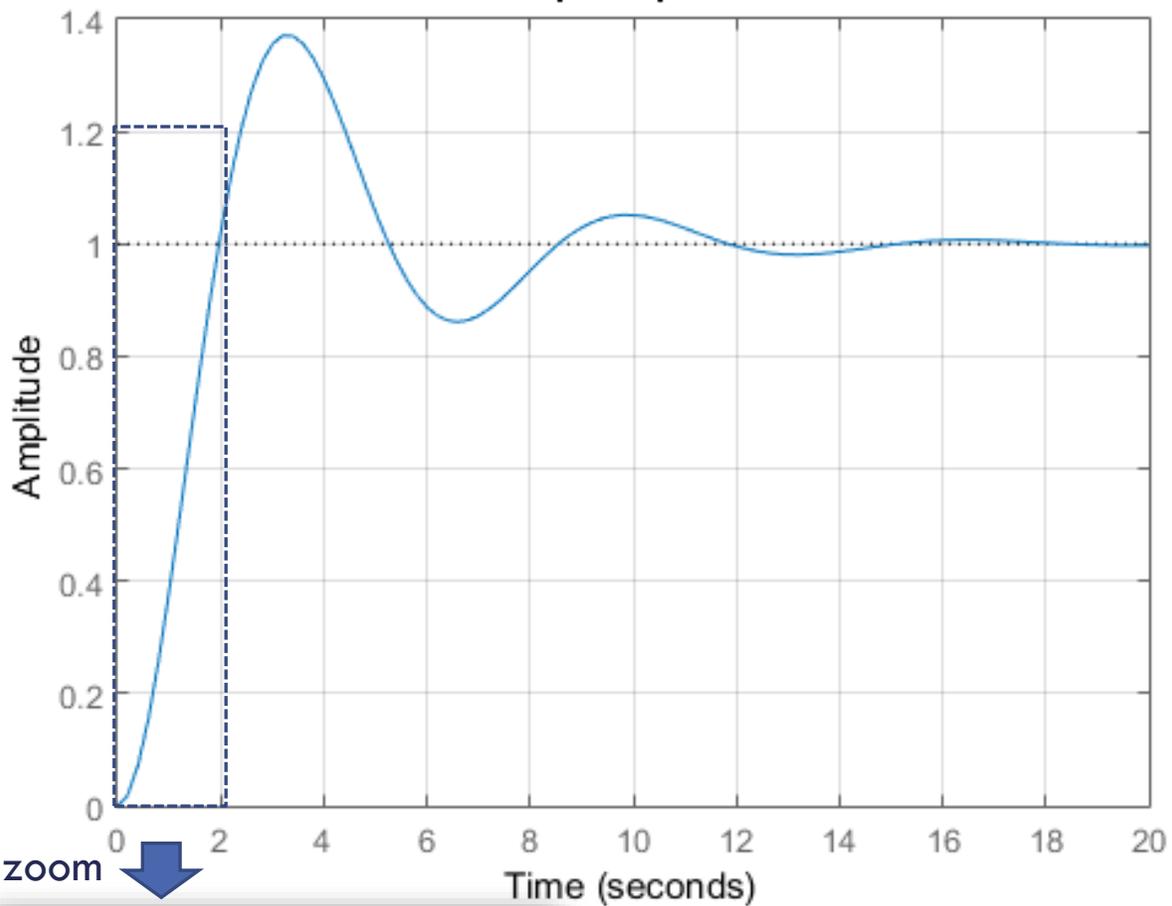
Polos reais distintos. Sistema estável e superamortecido.





# RESPOSTA NO TEMPO: SISTEMA DE 2ª ORDEM (EXEMPLOS)

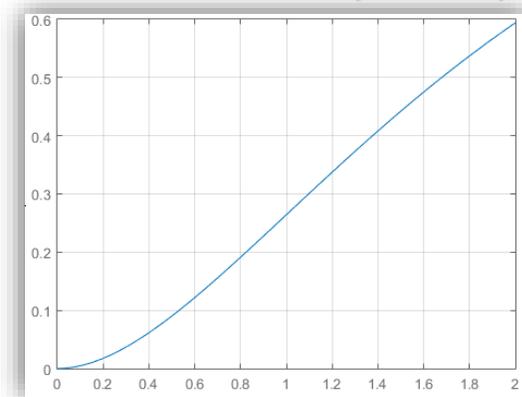


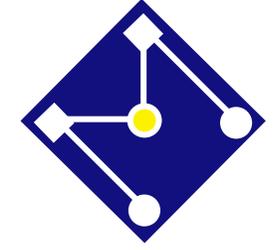


**A derivada na origem é nula!**

(Teorema do Valor Inicial):

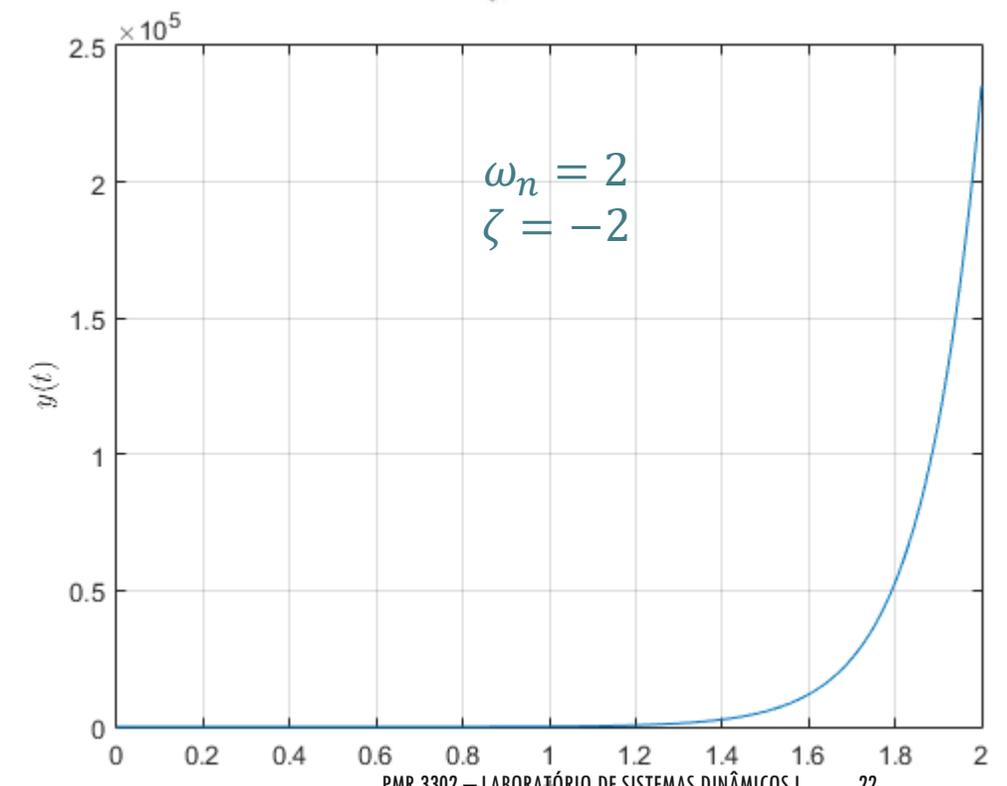
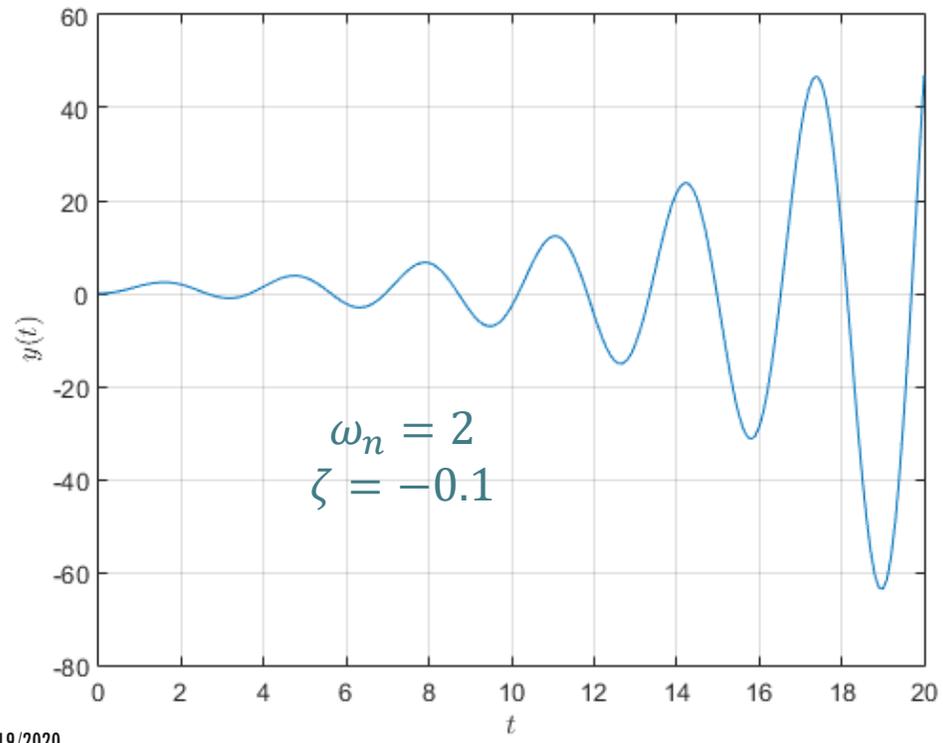
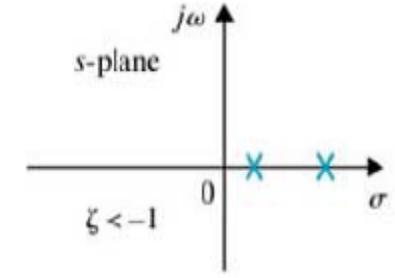
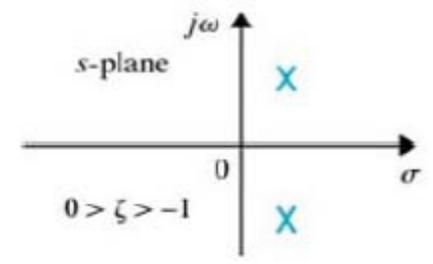
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sK\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$





# SISTEMAS INSTÁVEIS

se  $\zeta < 0$  então o sistema é instável





# RESUMO: SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

subamortecido

$$0 < \zeta < 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

criticamente amortecido

$$\zeta = 1 \quad p_1, p_2 = -\omega_n$$

sobreamortecido

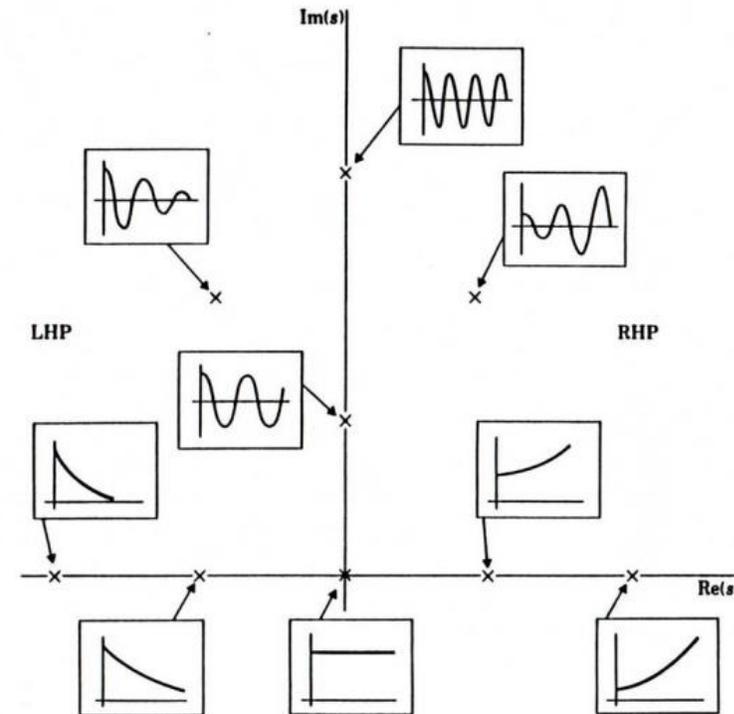
$$\zeta > 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

não amortecido

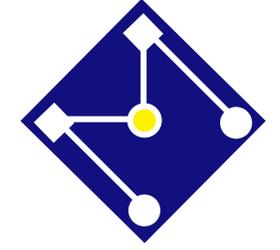
$$\zeta = 0 \quad p_1, p_2 = \pm j\omega_n$$

negativamente amortecido

$$\zeta < 0 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$



Time Functions Associated with Points in the Complex Plane



subamortecido

$$0 < \zeta < 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

criticamente amortecido

$$\zeta = 1 \quad p_1, p_2 = -\omega_n$$

sobreamortecido

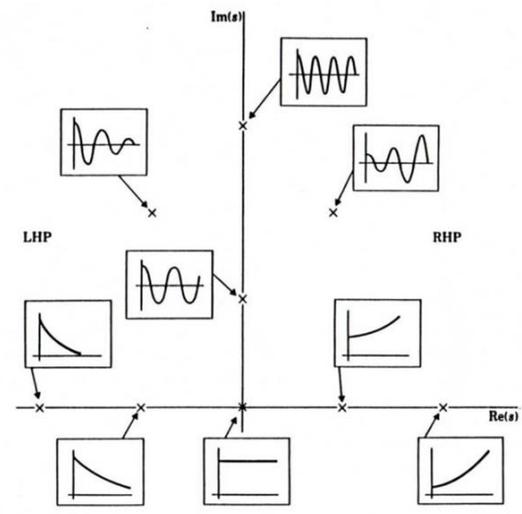
$$\zeta > 1 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

não amortecido

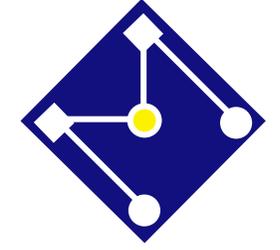
$$\zeta = 0 \quad p_1, p_2 = \pm j\omega_n$$

negativamente amortecido

$$\zeta < 0 \quad p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

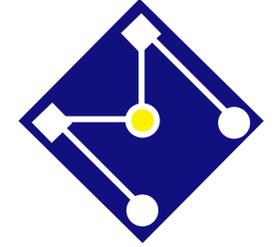


Time Functions Associated with Points in the Complex Plane



VAMOS OLHAR MAIS ATENTAMENTE  
A RESPOSTA...





# SISTEMA SUBAMORTECIDO

No caso  $0 < \zeta < 1$ , a resposta ao degrau unitário

$$y(t) = K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \right] \right\}$$

ou:

$$y(t) = K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right\},$$

Parte real dos polos
Parte imaginária dos polos

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

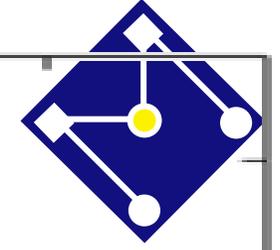
$$\varphi = \tan^{-1} \left( -\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

pode ter muitas formas diferentes, dependendo dos valores de:

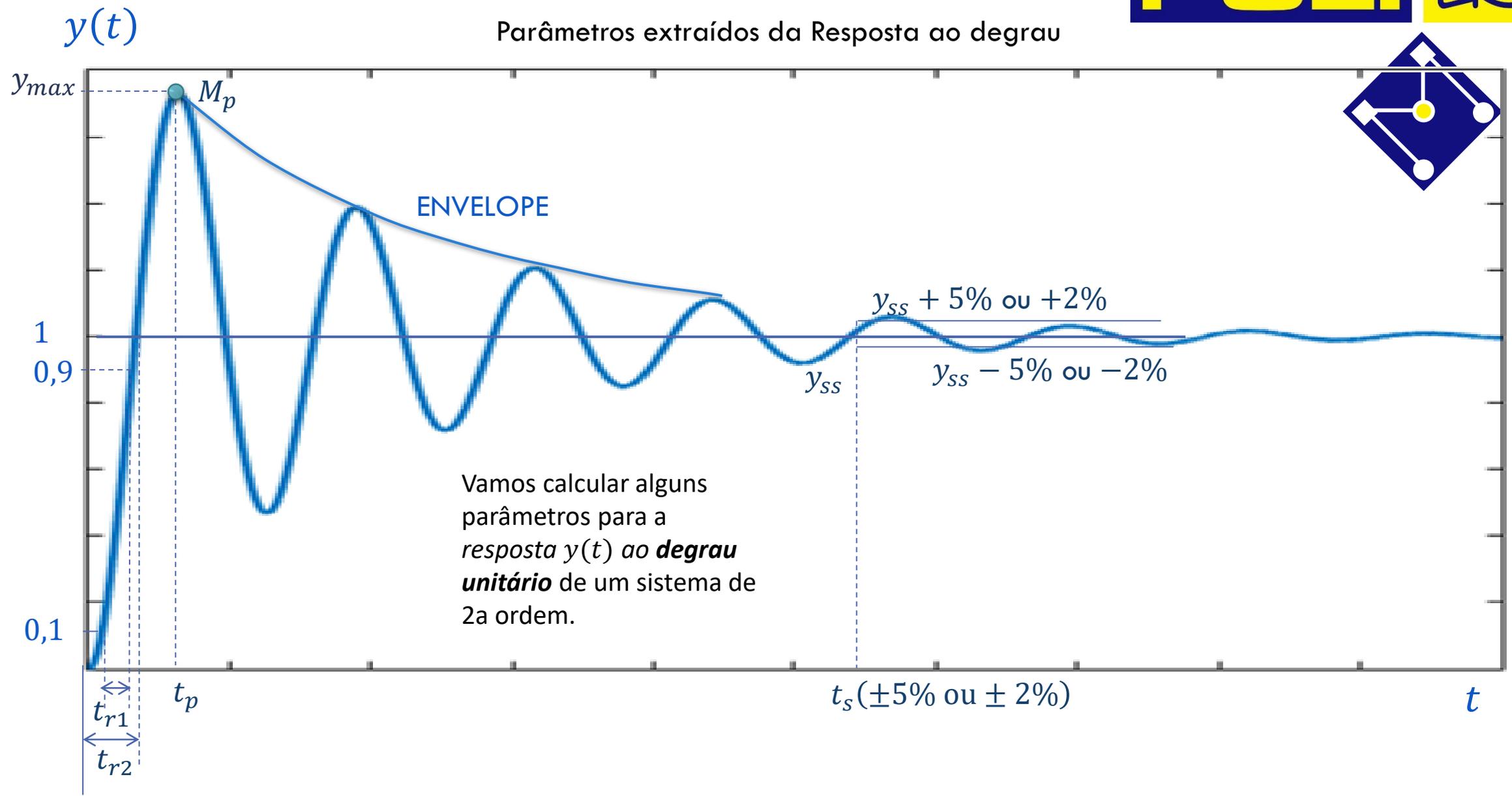
$\zeta$  (coeficiente de amortecimento),

$\omega_n$  (frequência natural)

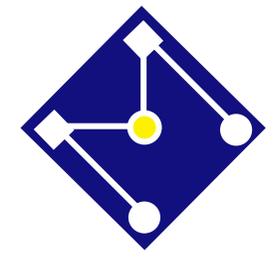
$K$  (ganho)



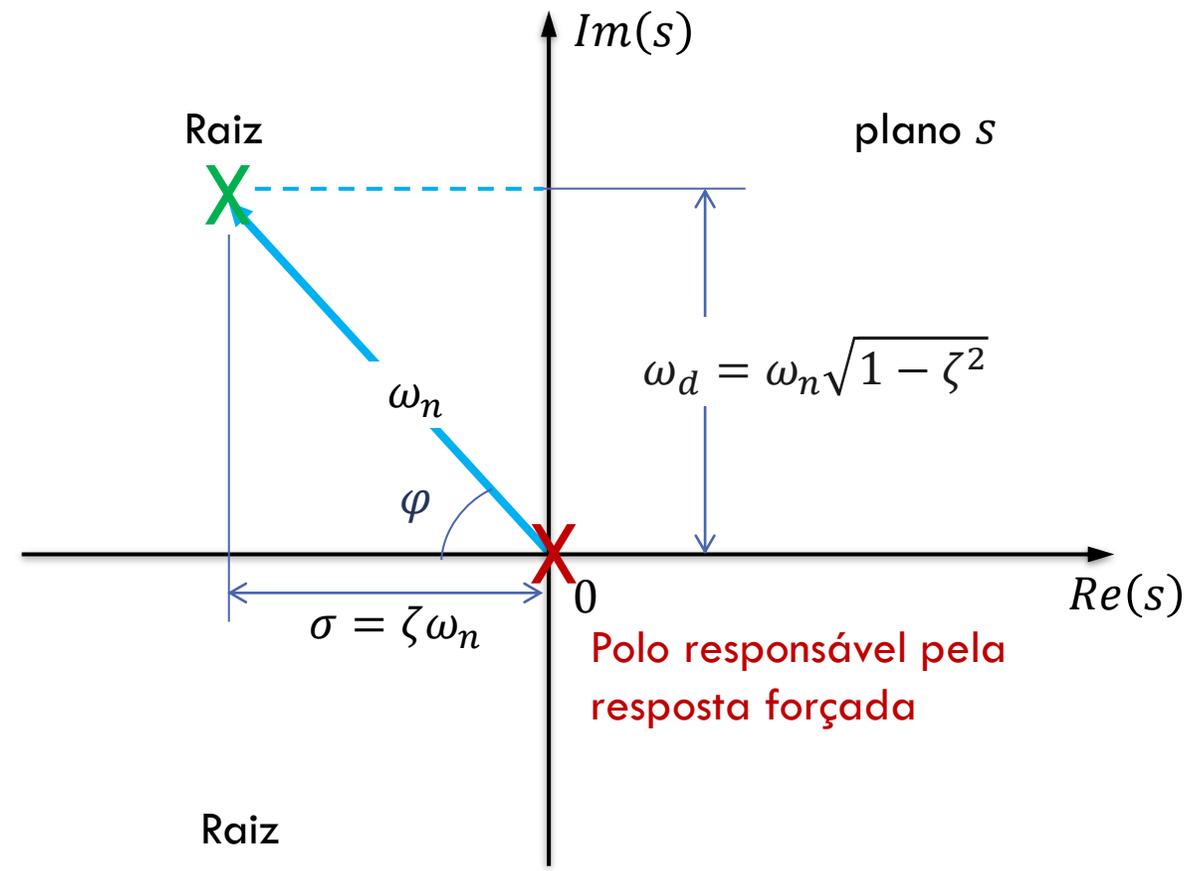
Parâmetros extraídos da Resposta ao degrau



Vamos calcular alguns parâmetros para a resposta  $y(t)$  ao **degrau unitário** de um sistema de 2a ordem.



# RESUMO: SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM SUBAMORTECIDO



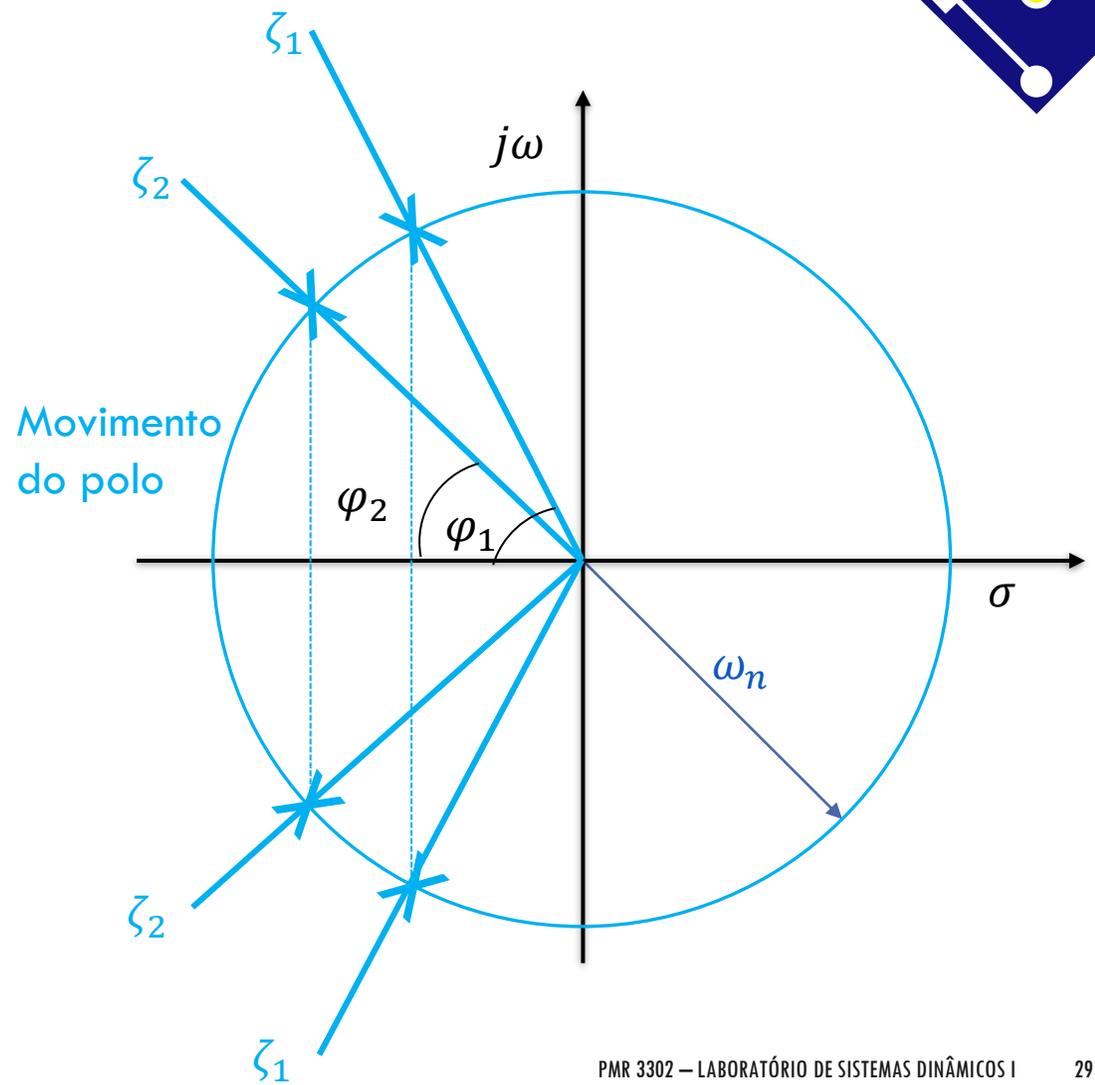
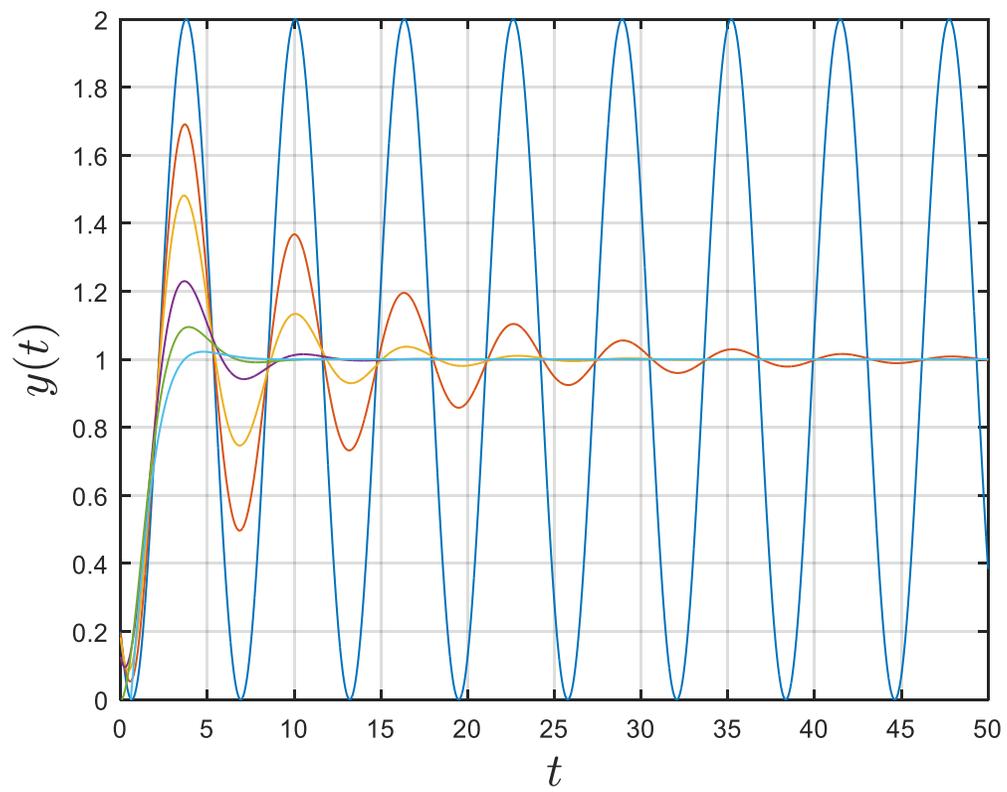
**X** Raiz Polo complexo conjugado responsável pela resposta natural oscilatória

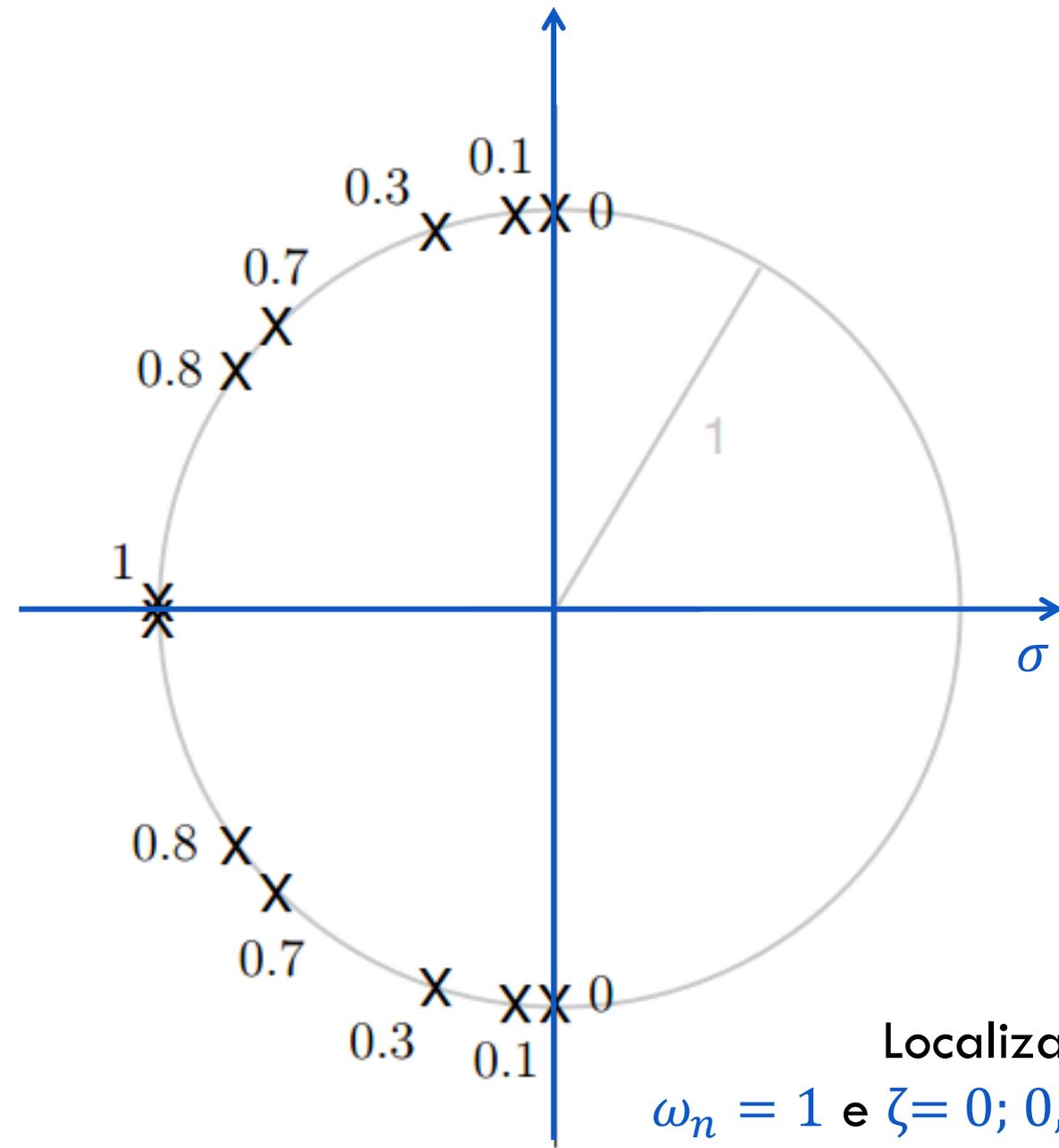
- Verifique as relações entre a localização das raízes da equação característica e  $\sigma$ ,  $\zeta$ ,  $\omega_n$  e  $\omega_d$ .
- $\sigma$ : parte real das raízes
- $\omega_n$  distância radial das raízes até a origem do plano  $s$
- $\zeta$  : seno do ângulo entre a linha radial até as raízes e o eixo imaginário, ou,

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \zeta^2}, \cos \varphi = \zeta, \varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

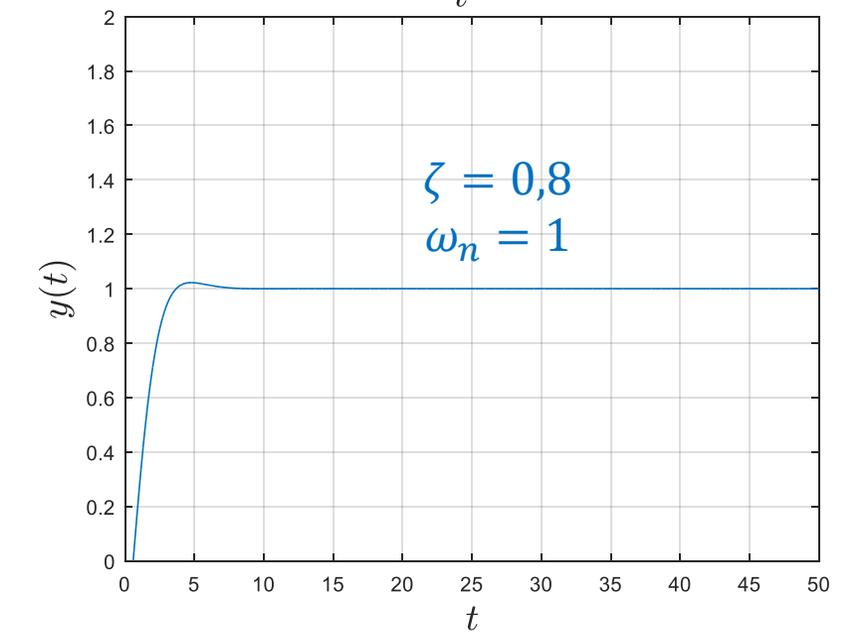
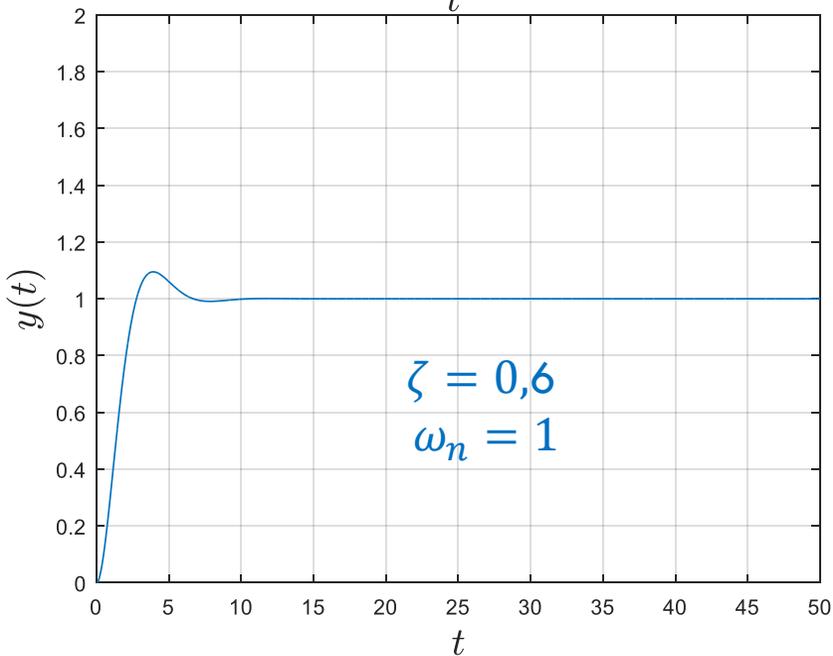
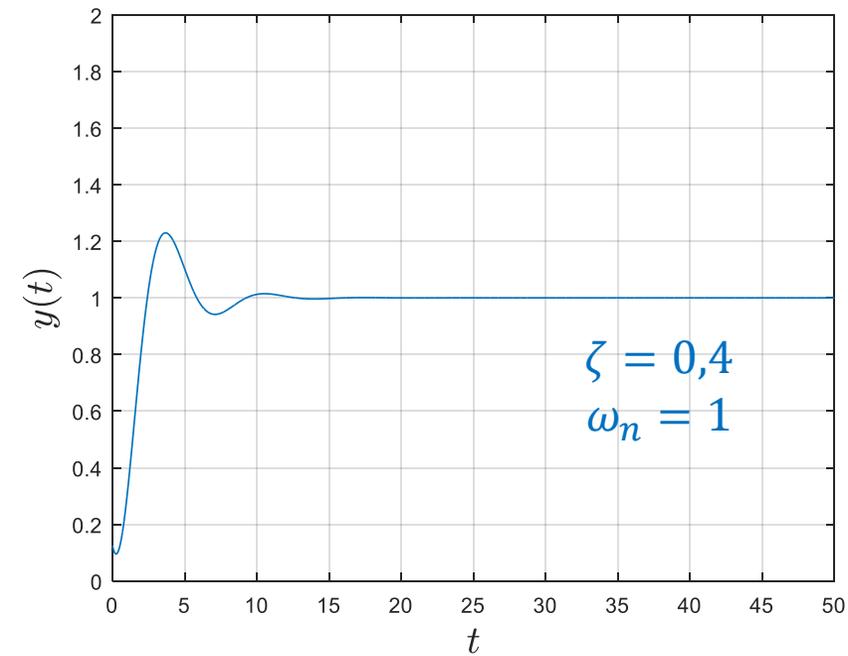
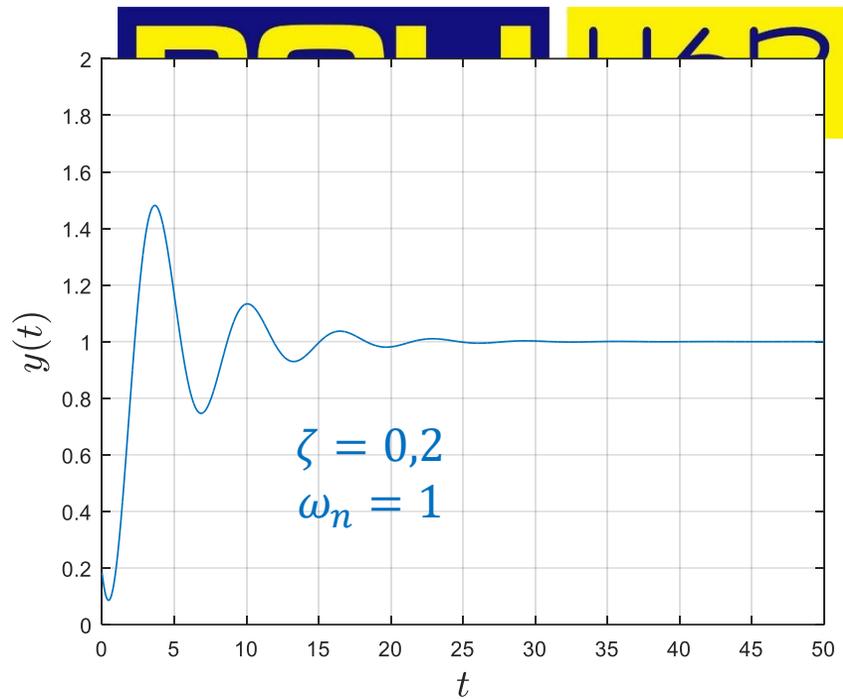
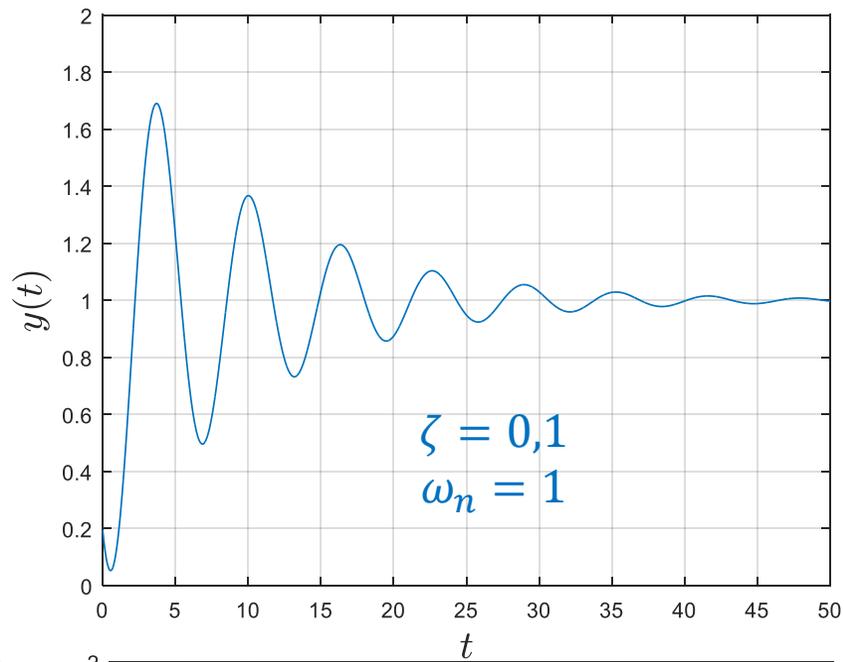
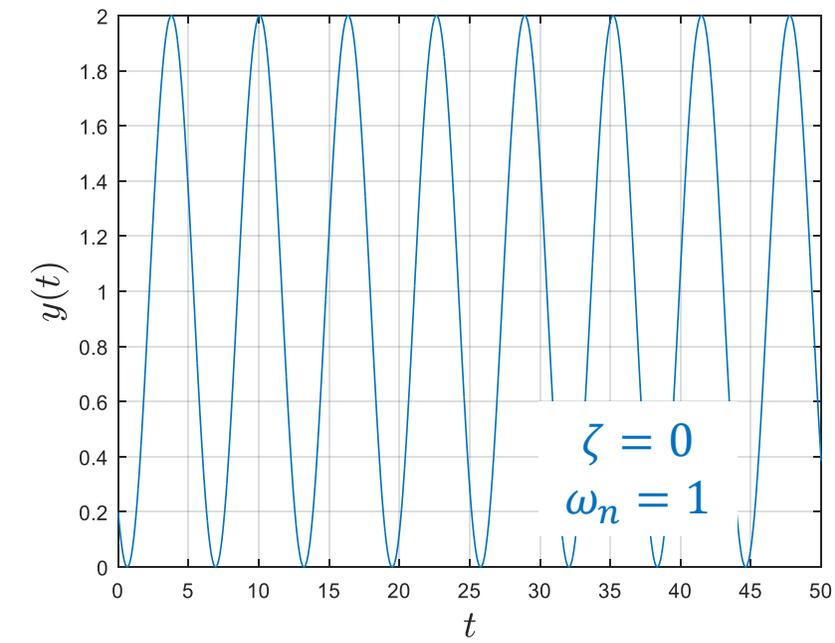


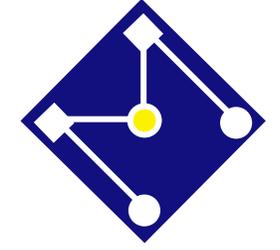
O movimento dos polos ao longo de uma circunferência (para diferentes valores de  $\varphi$ ) implica em um mesmo valor de frequência  $\omega_n$  (raio) e diferentes valores de fator de amortecimento



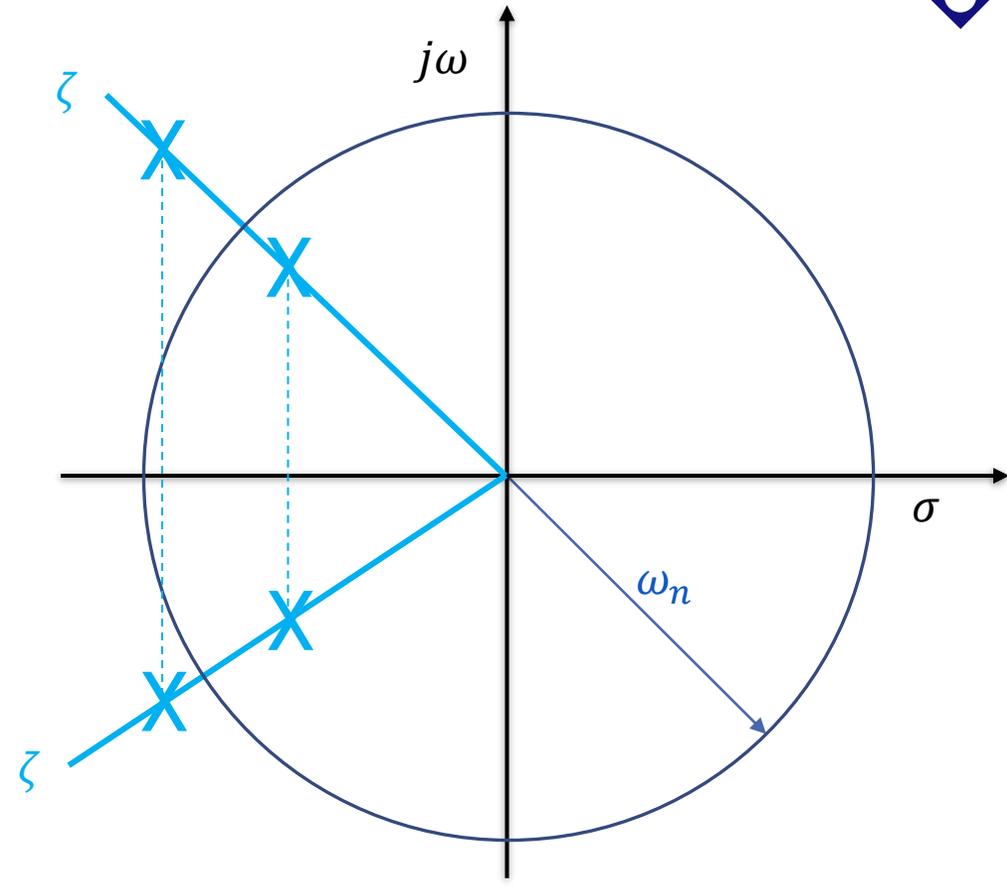
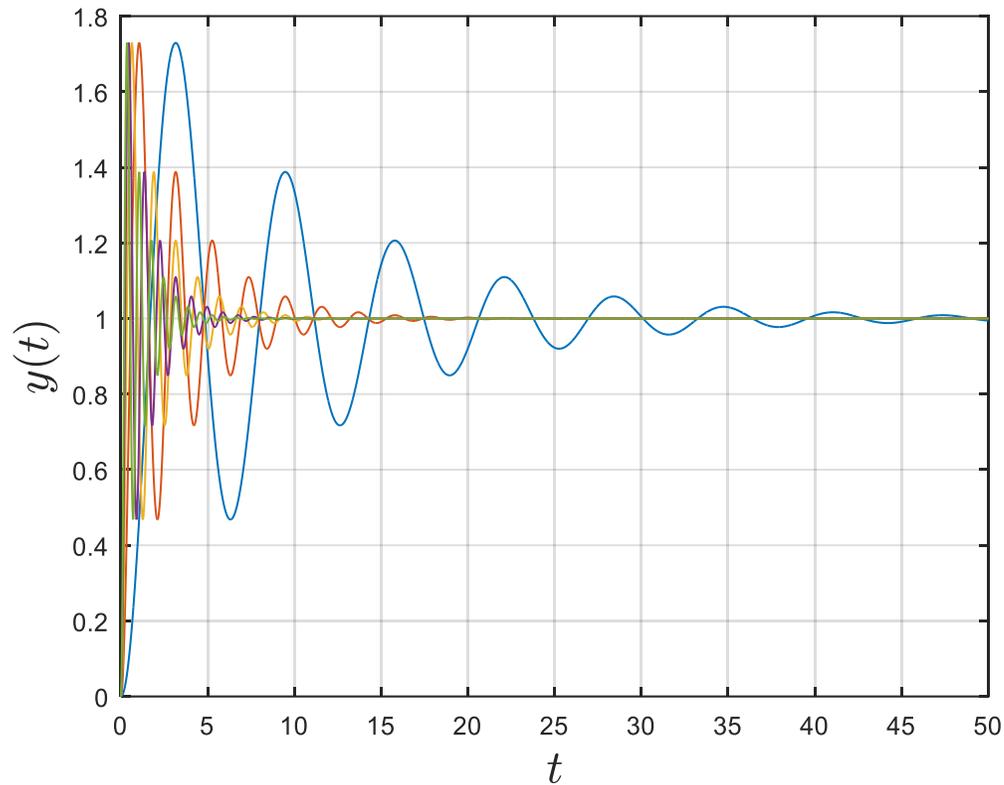


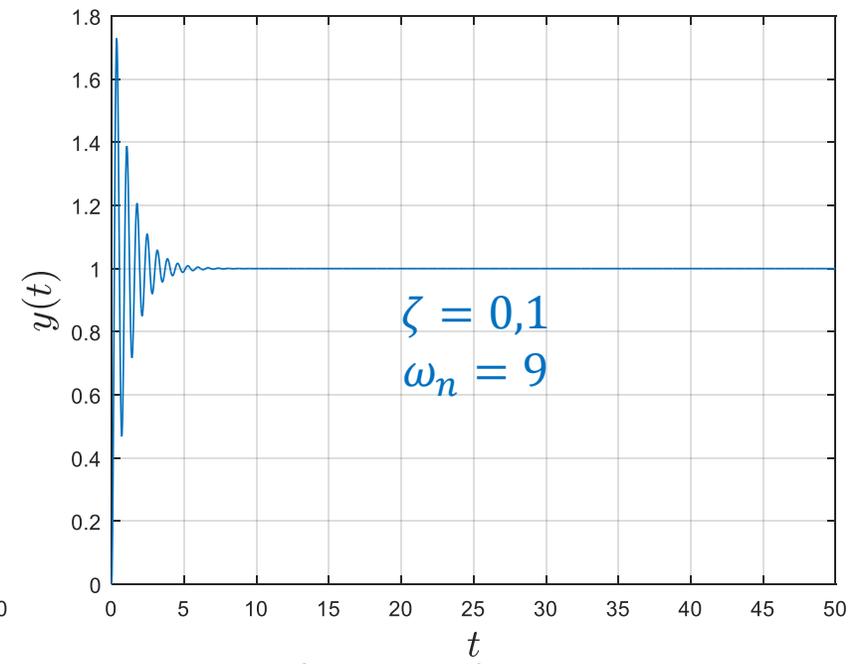
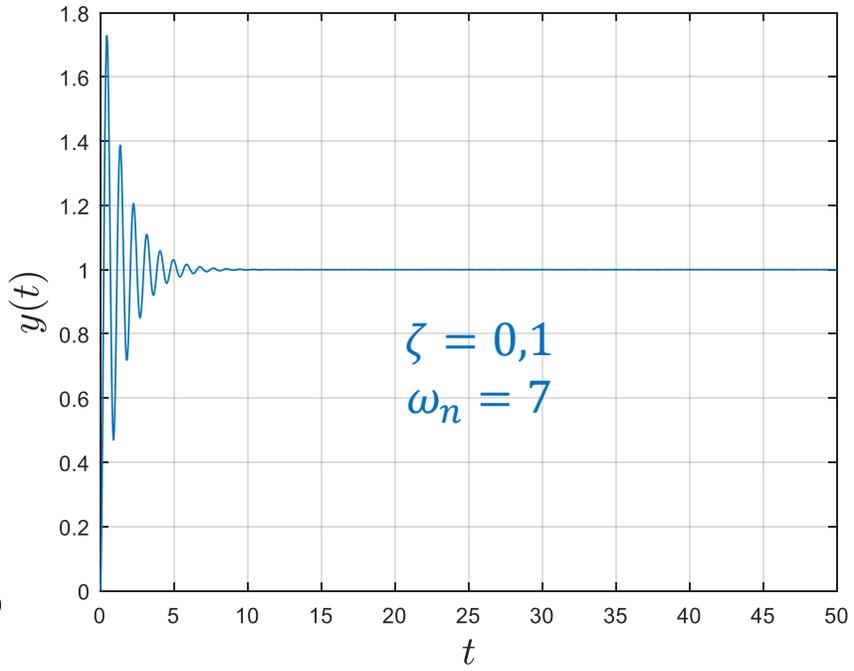
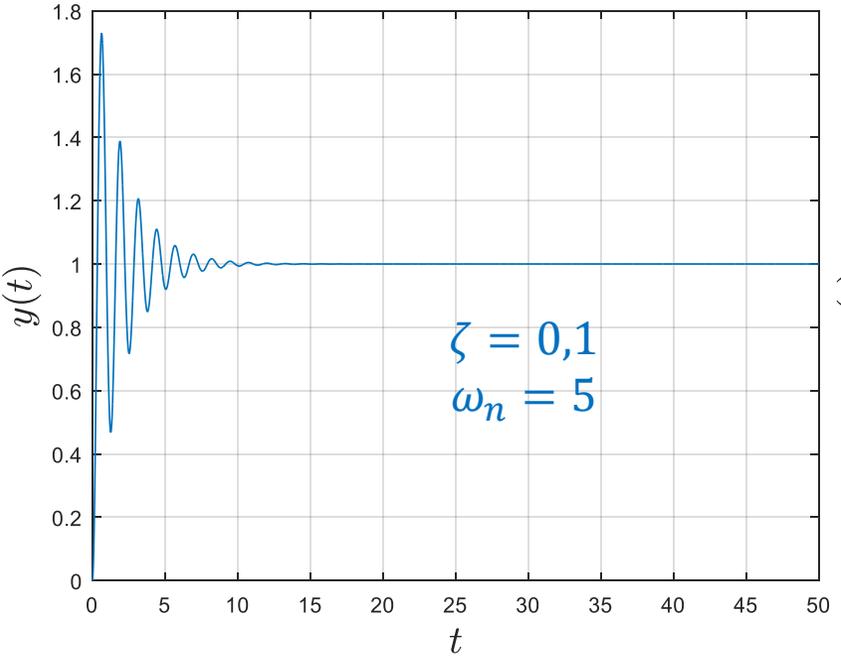
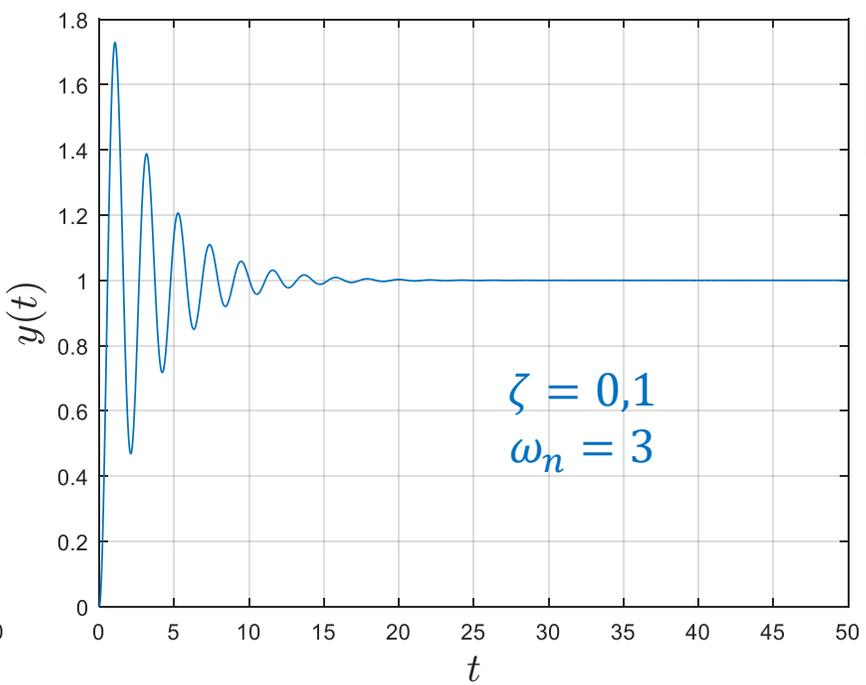
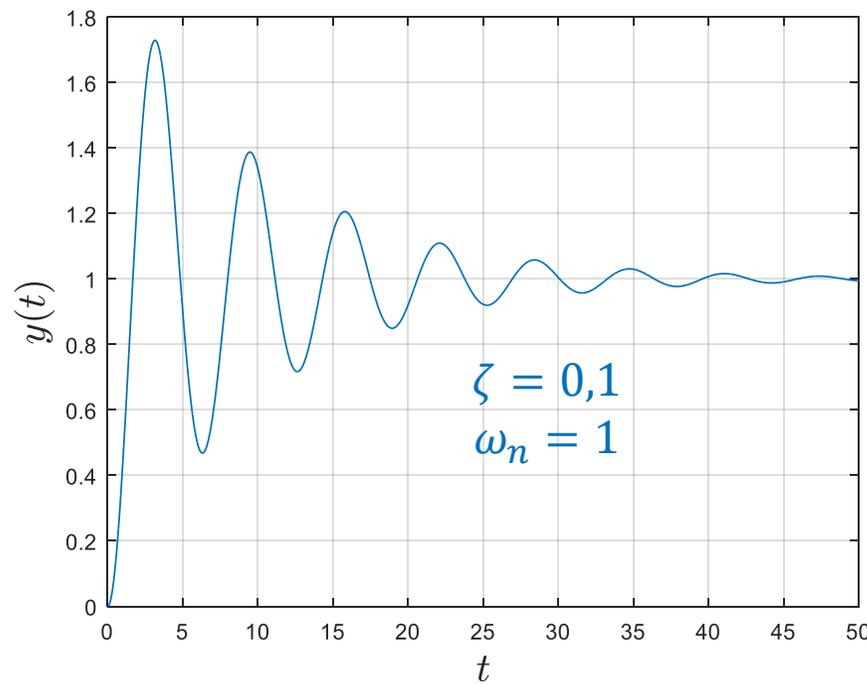
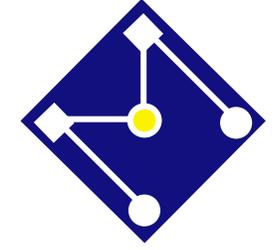
Localização dos pólos para  $\omega_n = 1$  e  $\zeta = 0; 0,1; 0,3; 0,7; 0,8; 1$ .

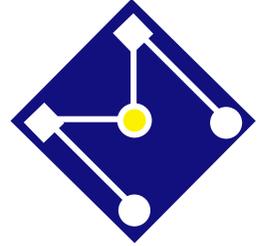




O movimento dos pólos ao longo da reta com mesmo ângulo  $\varphi$  implica em um mesmo valor de fator de amortecimento e diferentes valores frequência  $\omega_n$







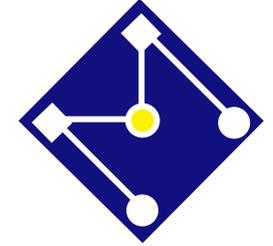
# RESPOSTA EM ESTADO ESTACIONÁRIO $y_{ss}$

$$Y(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

Os teoremas do valor inicial (TVI) e do valor final (TVF) permitem que se descubra o valor inicial  $y(0^+)$  e o valor final  $y(\infty)$  do sinal  $y(t)$  cuja Transformada de Laplace  $Y(s)$  é conhecida,

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s Y(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$



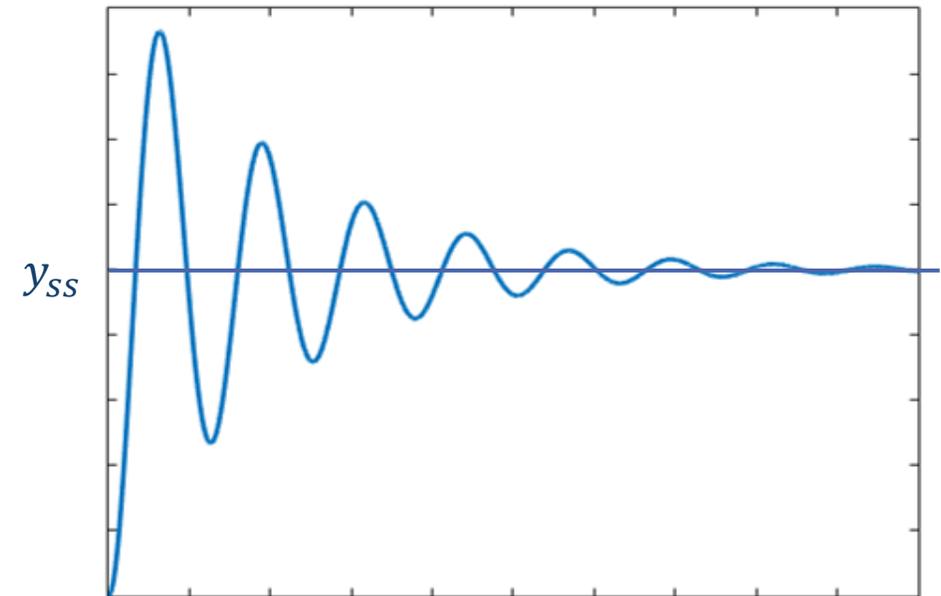
# CONT...

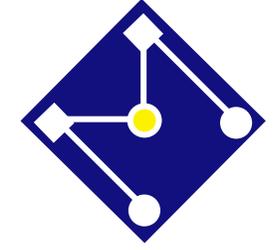
$y_{ss}$  **resposta em estado estacionário** ou saída em regime permanente (*steady state output*). Nesse caso, pelo TVF:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$y_{ss} = K$$





# INSTANTE DE PICO $t_p$

(PEAK TIME)

Diminuir  $t_p \rightarrow$  Aumentar  $\omega_d$ .  
 Aumentar  $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

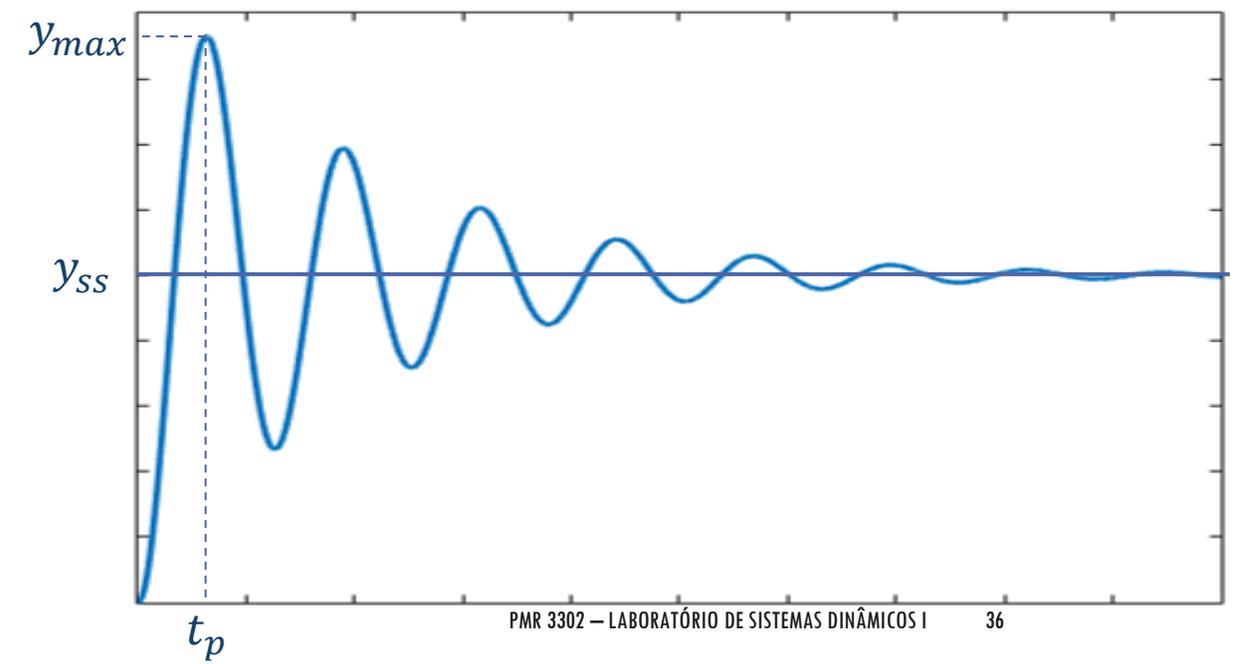
É o instante em que a resposta ao degrau  $y(t)$  atinge o primeiro pico.

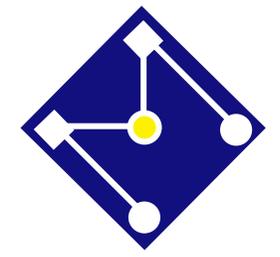
$$\frac{dy(t)}{dt} = \omega_d e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) = 0$$

$$\sin(\omega_d t) = 0$$

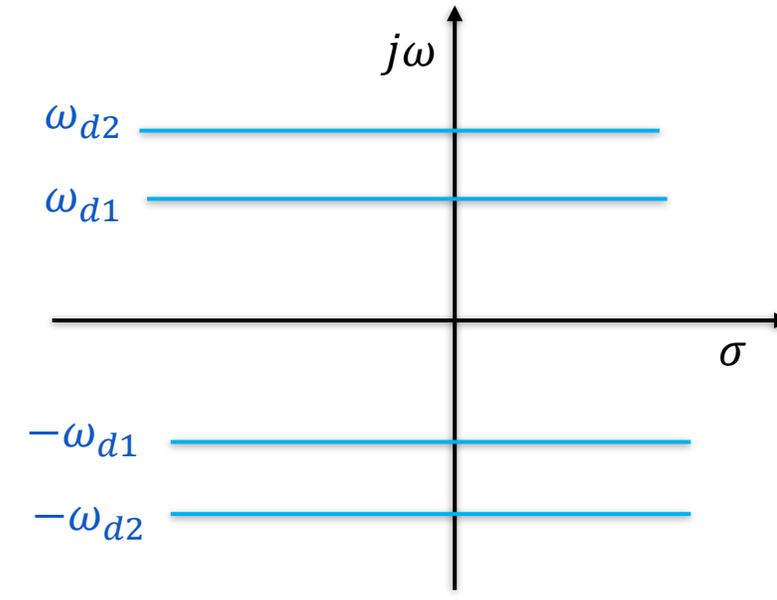
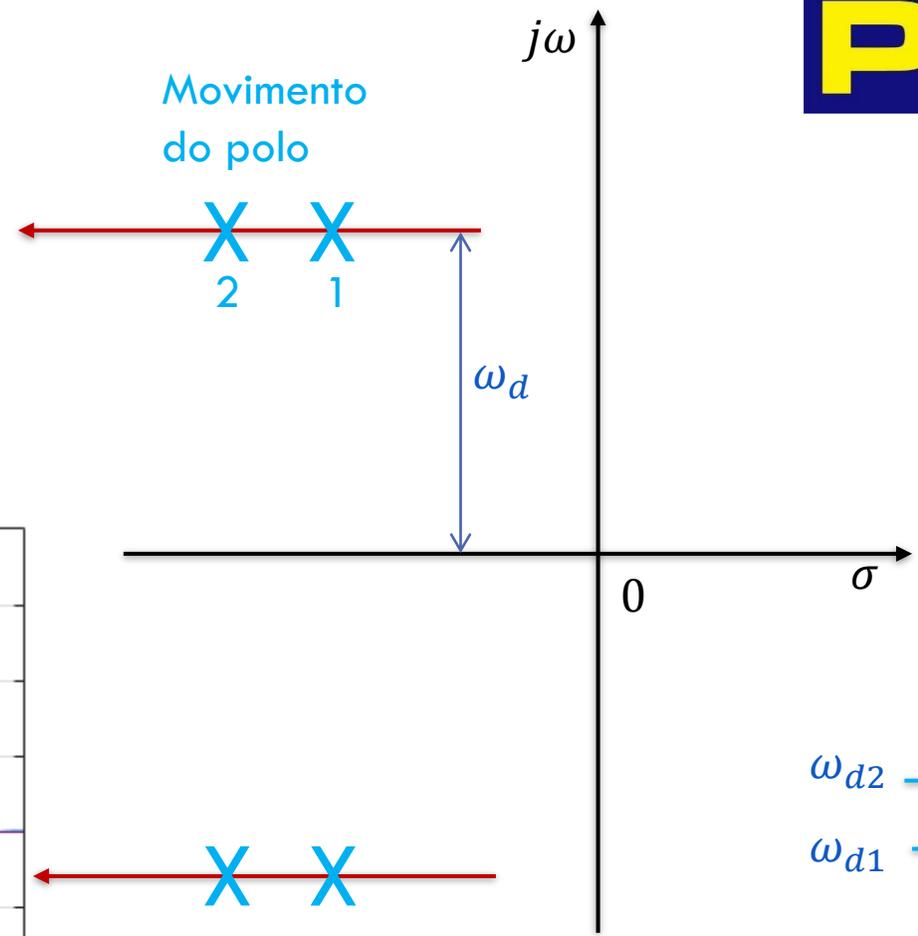
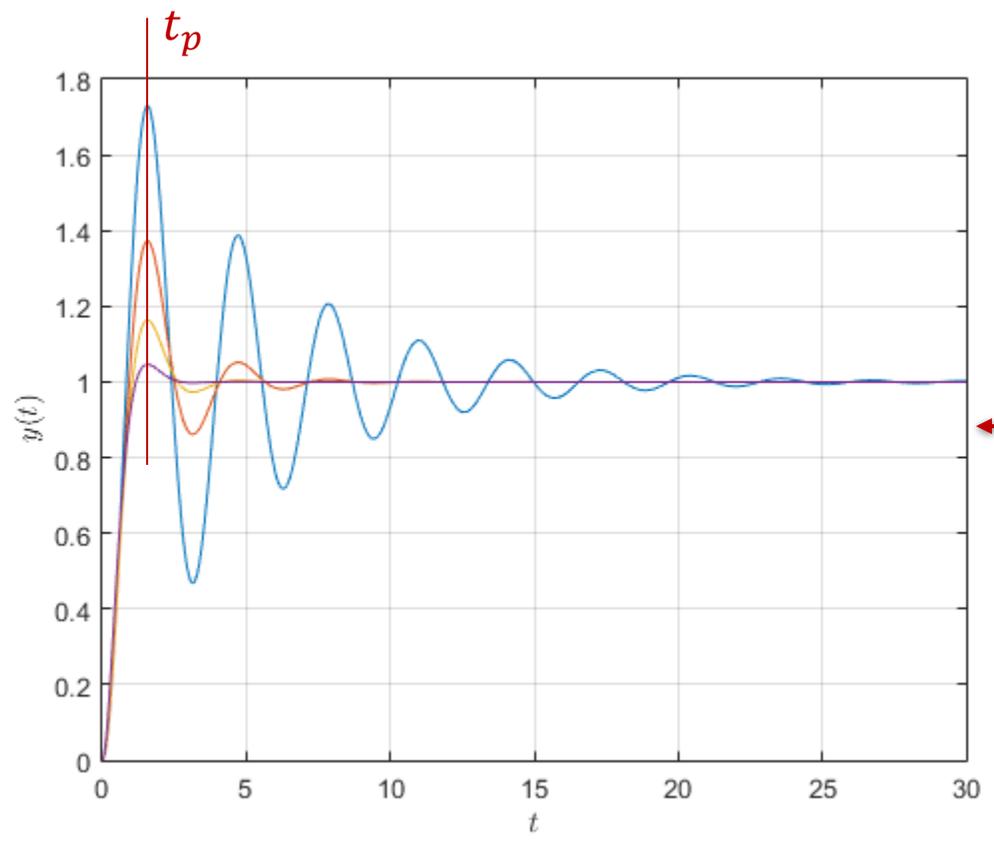
$$\omega_d t = 0, \pi, 2\pi, \dots = n\pi$$

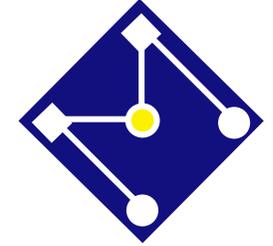
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$





Quando os polos são movidos para a esquerda, a resposta amortece mais rapidamente, para uma frequência  $\omega_d$  constante, e o tempo de pico  $t_p$  é constante.



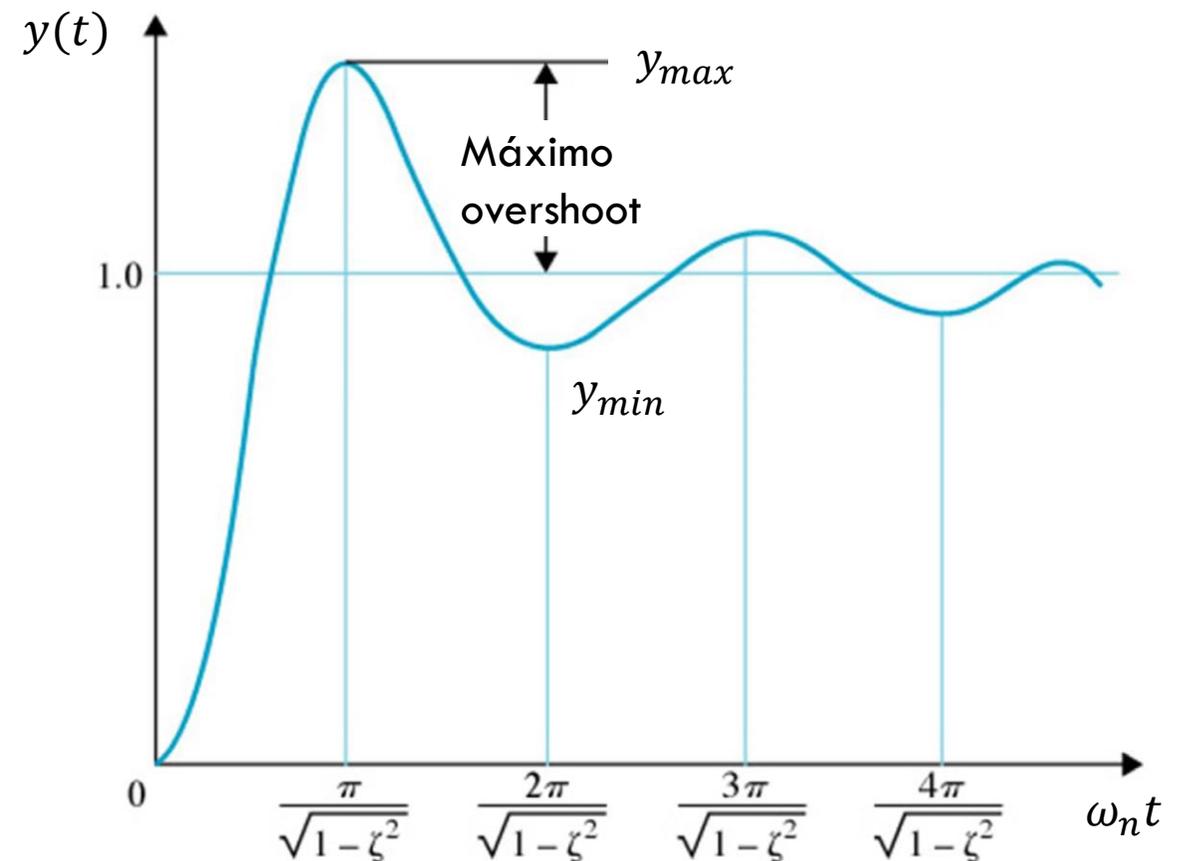


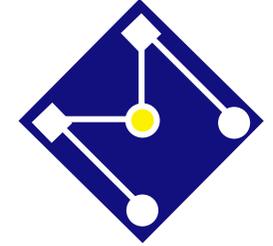
# SOBRESSINAL

$$\omega_d t = \pi, 2\pi, \dots$$

$$t = n \frac{\pi}{\omega_d} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Os sobressinais da resposta ocorrem em intervalos periódicos e valores ímpares de  $n$ , isto é,  $n = 1, 3, 5$ .



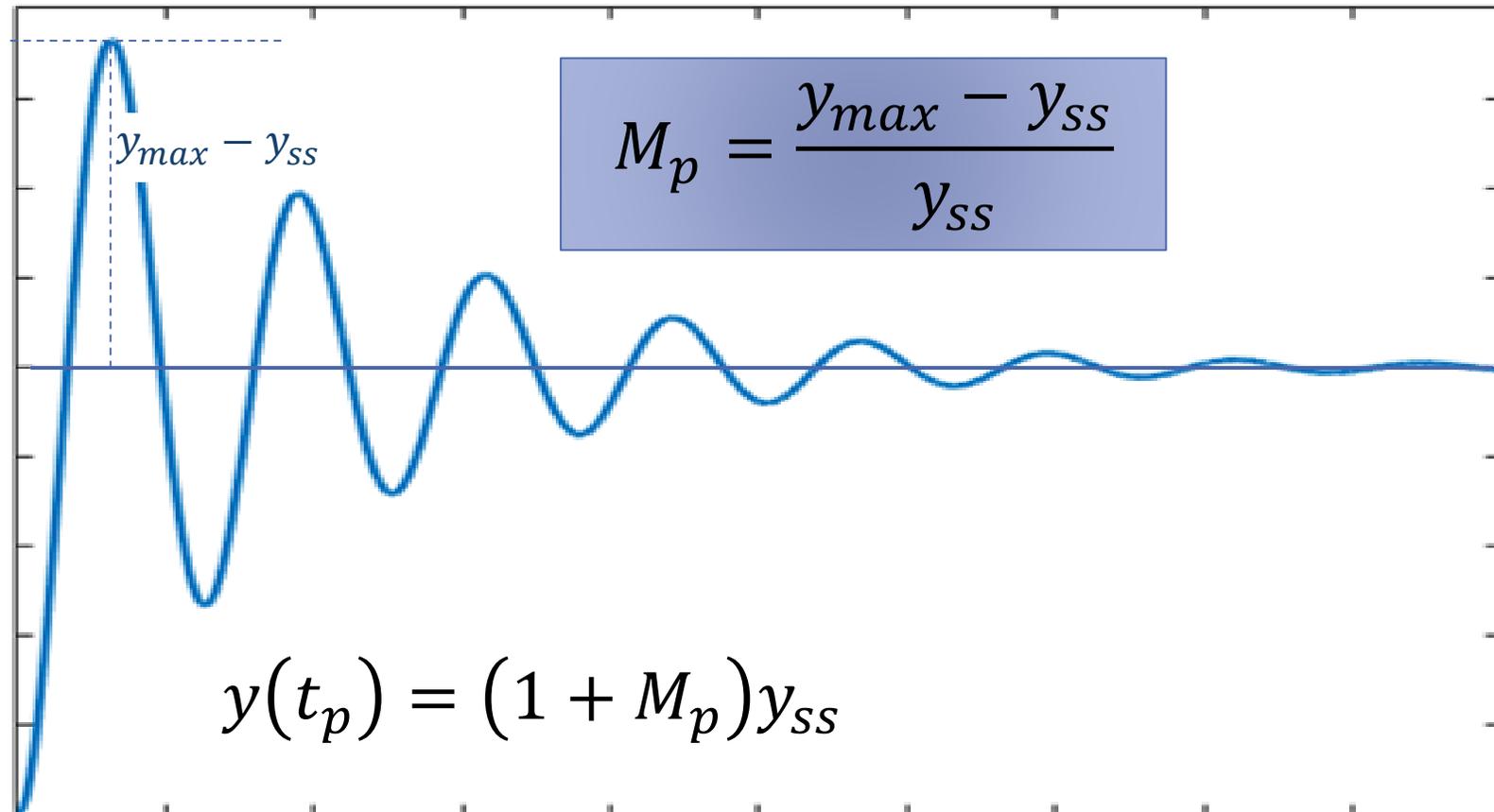


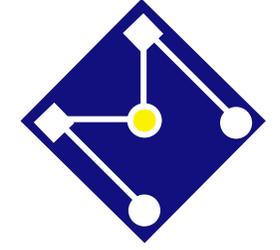
# SOBRESSINAL MÁXIMO (OVERSHOOT)

$M_p$  é a diferença entre o valor de pico e o valor final  $y_{ss}$ . É usual a indicação em termos percentuais.

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$y(t_p) = y_{max}$$





# PARA QUEM QUISER DEDUZIR A FÓRMULA...

$$y(t) = KA \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left[ \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right\}$$

$$y(t_p) = KA \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n \frac{n\pi}{\omega_d}} \left[ \cos\left(\omega_d \frac{n\pi}{\omega_d}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d \frac{n\pi}{\omega_d}\right) \right] \right\}, n = 1, 3, 5 \dots$$

$$y(t_p) = KA \left\{ 1 - e^{-\zeta \omega_n \frac{n\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n}} \left[ \cos(n\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(n\pi) \right] \right\} \quad \cos(n\pi) = -1, \sin(n\pi) = 0$$

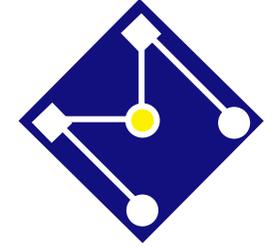
$$y(t_p) = KA \left[ 1 + e^{-n\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right]$$

$$y(t_p) = KA [1 + M_p]$$

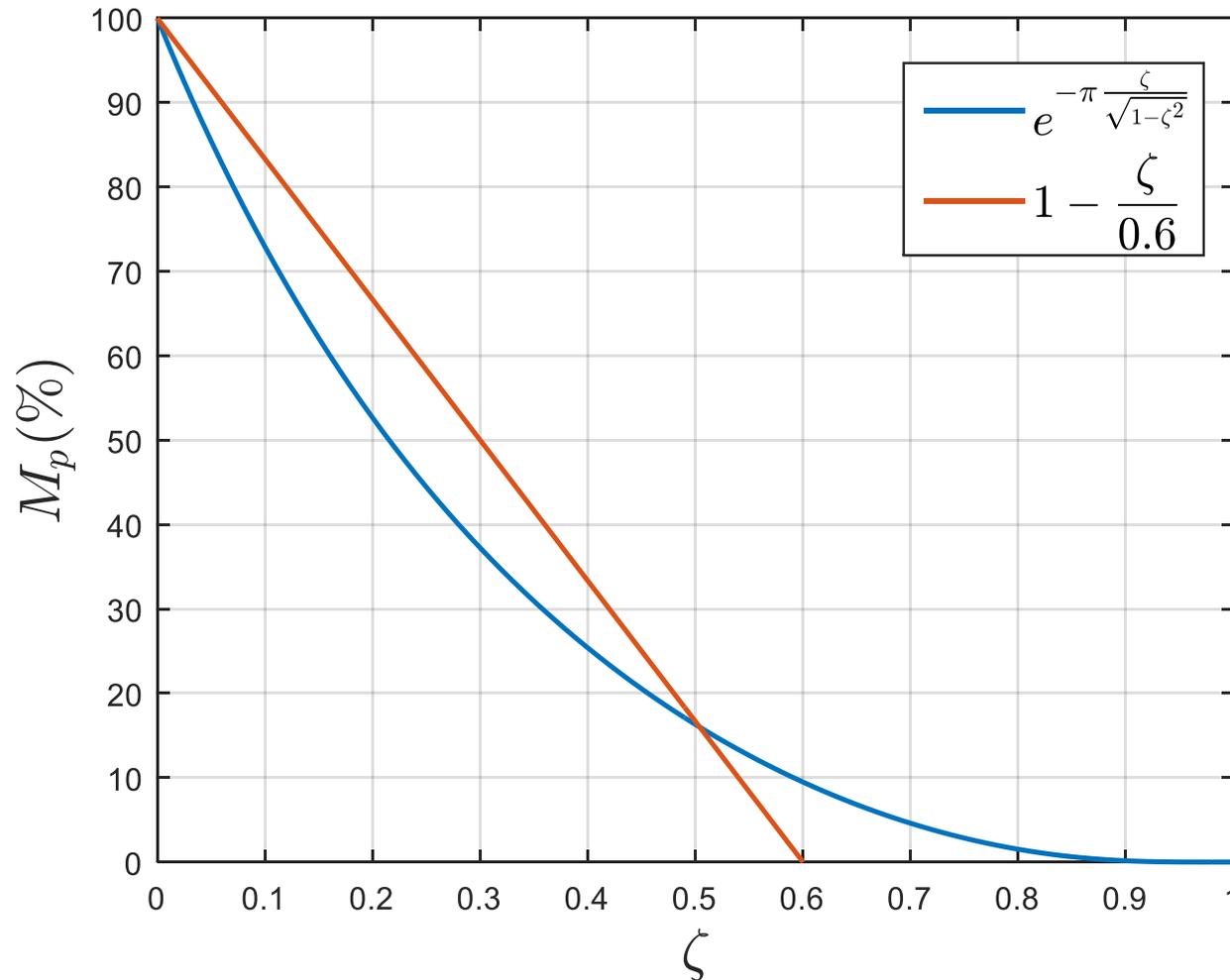
Ou

$$y(t_p) = y_{max} = y_{ss} [1 + M_p]$$

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}}$$

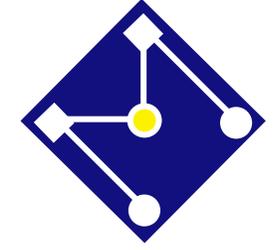


# RELAÇÃO ENTRE O MÁXIMO SOBRESSINAL PERCENTUAL E A TAXA DE AMORTECIMENTO

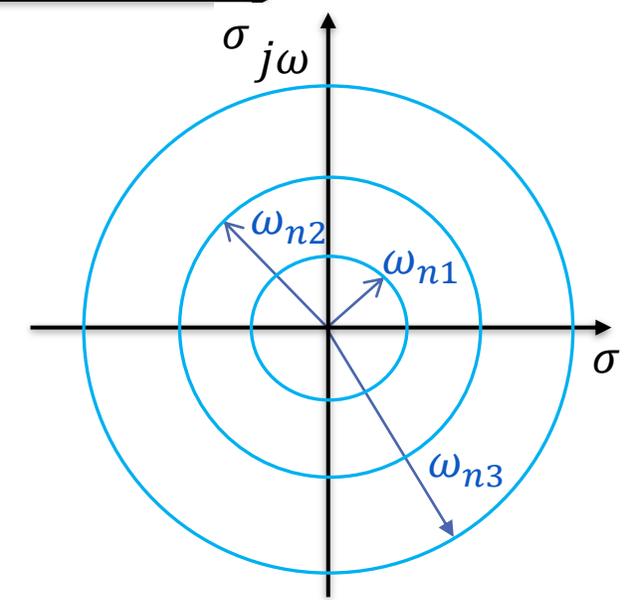
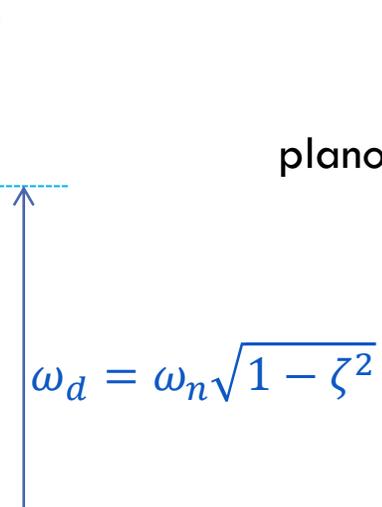
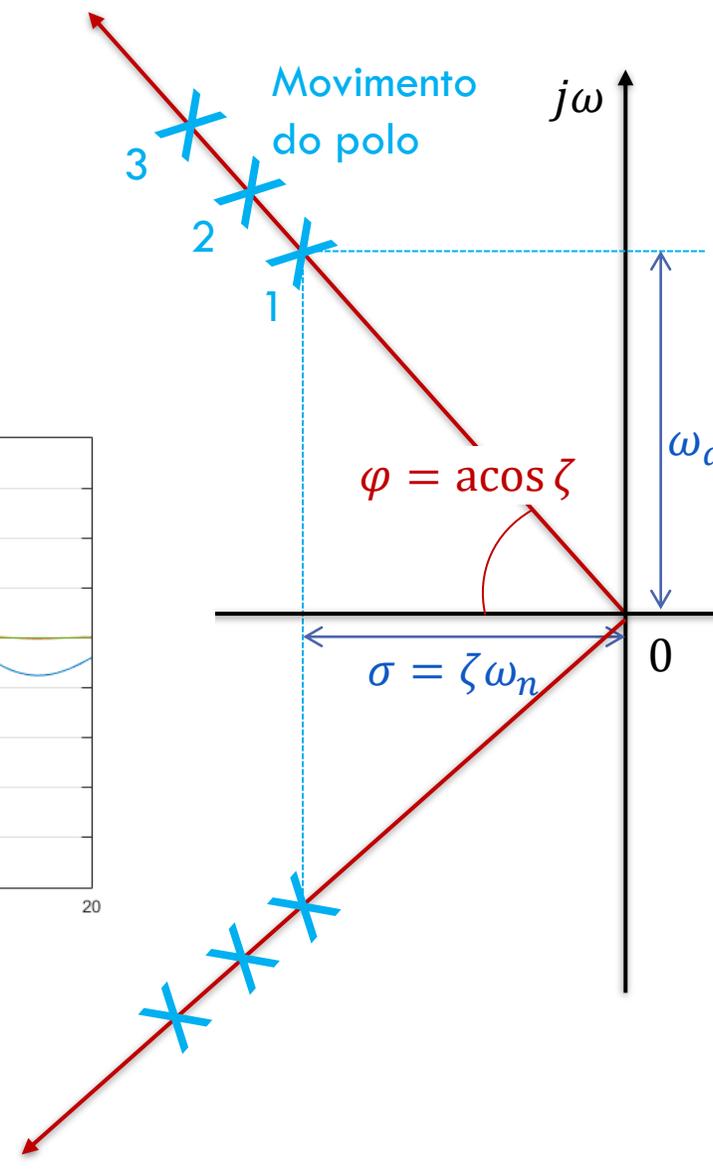
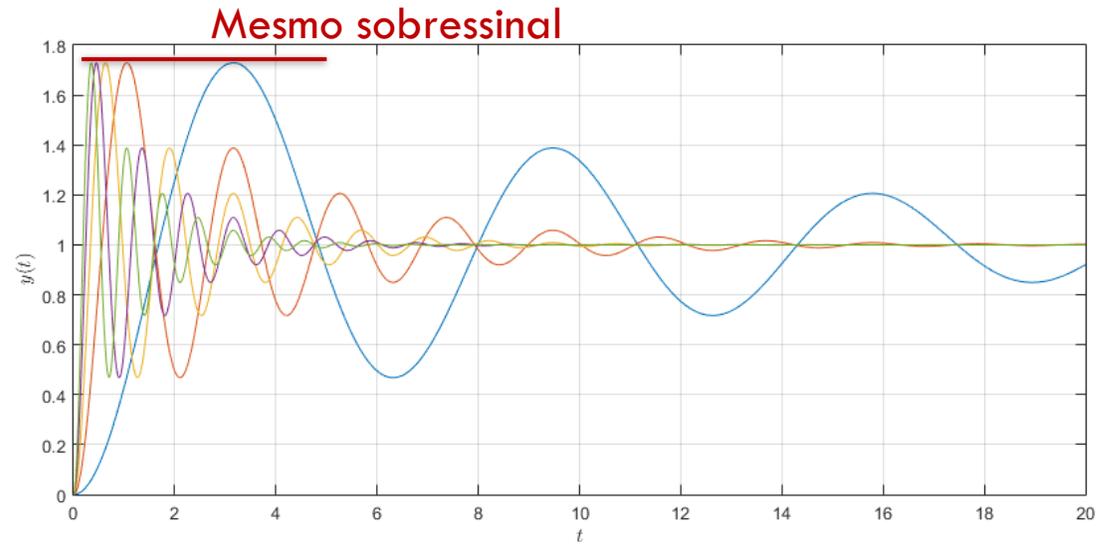


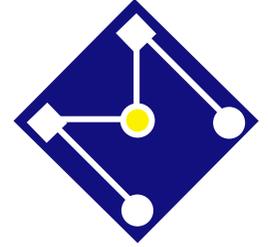
$$M_p \approx 1 - \frac{\zeta}{0,6}, 0 \leq \zeta \leq 0,5$$

Overshoot diminui com o aumento  $\zeta$  (diminuição quase linear para intervalos menores de  $\zeta$ ). Então, para diminuir  $M_p \rightarrow$  Aumentar  $\zeta$ .



O movimento dos polos ao longo de uma linha radial constante implica em um mesmo valor de sobressinal (fator de amortecimento constante)





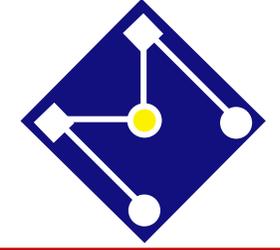
# TEMPO DE SUBIDA $t_r$ (*RISE TIME*)

$t_{r1}$

- Para sistemas superamortecidos ou com amortecimento crítico, é a mesma definição usada em sistemas de primeira ordem, i.é, o tempo necessário para que a resposta ao degrau,  $y(t)$ , vá de 0,1 a 0,9 do valor final  $y_{ss} = y(\infty)$ .

$t_{r2}$

- Definido para sistemas de segunda ordem subamortecidos, é o tempo necessário para que a resposta ao degrau,  $y(t)$ , atinja o valor final  $y_{ss} = K$  pela primeira vez.



# TEMPO DE SUBIDA $t_{r2}$

(RISE TIME)

$$y(t) = K = K \left\{ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0, \quad \therefore \sin(\omega_d t + \varphi) = 0$$

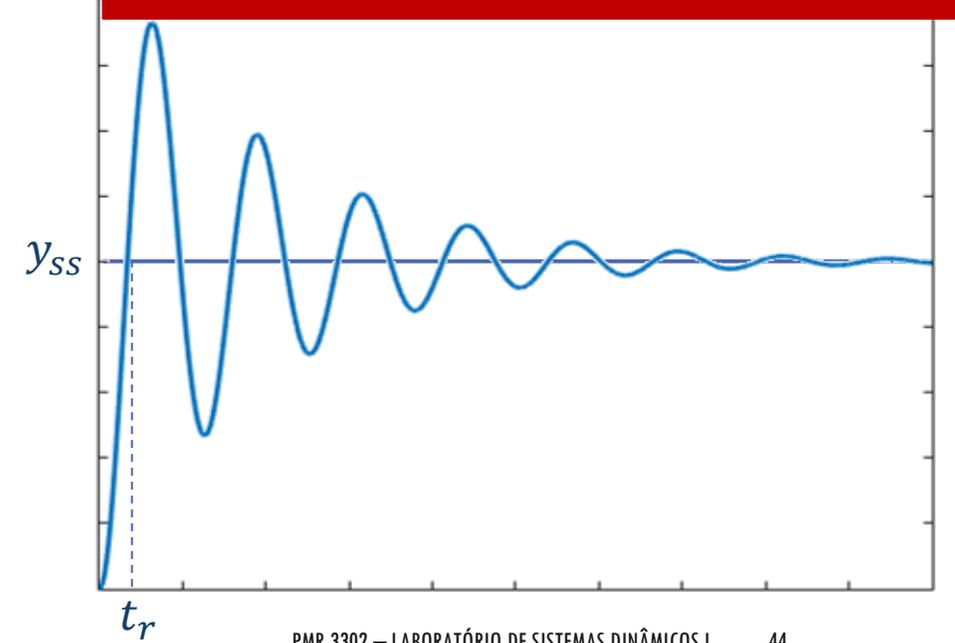
$$\omega_d t + \varphi = \pi$$

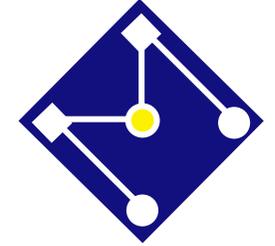
$$t_{r2} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi/2 - \sin^{-1} \zeta}{\omega_d}$$

Alguns autores vinculam o tempo de subida à frequência natural:

$$\approx \frac{\pi - 2\zeta}{2\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \approx \frac{\pi}{2\omega_n} \text{ para respostas com valores pequenos de } \zeta$$

Diminuir  $t_r \rightarrow$  Aumentar  $\omega_n$ .  
 Na verdade,  $t_r$  também pode ser diminuído diminuindo  $\zeta$ , mas isso causa um overshoot maior.

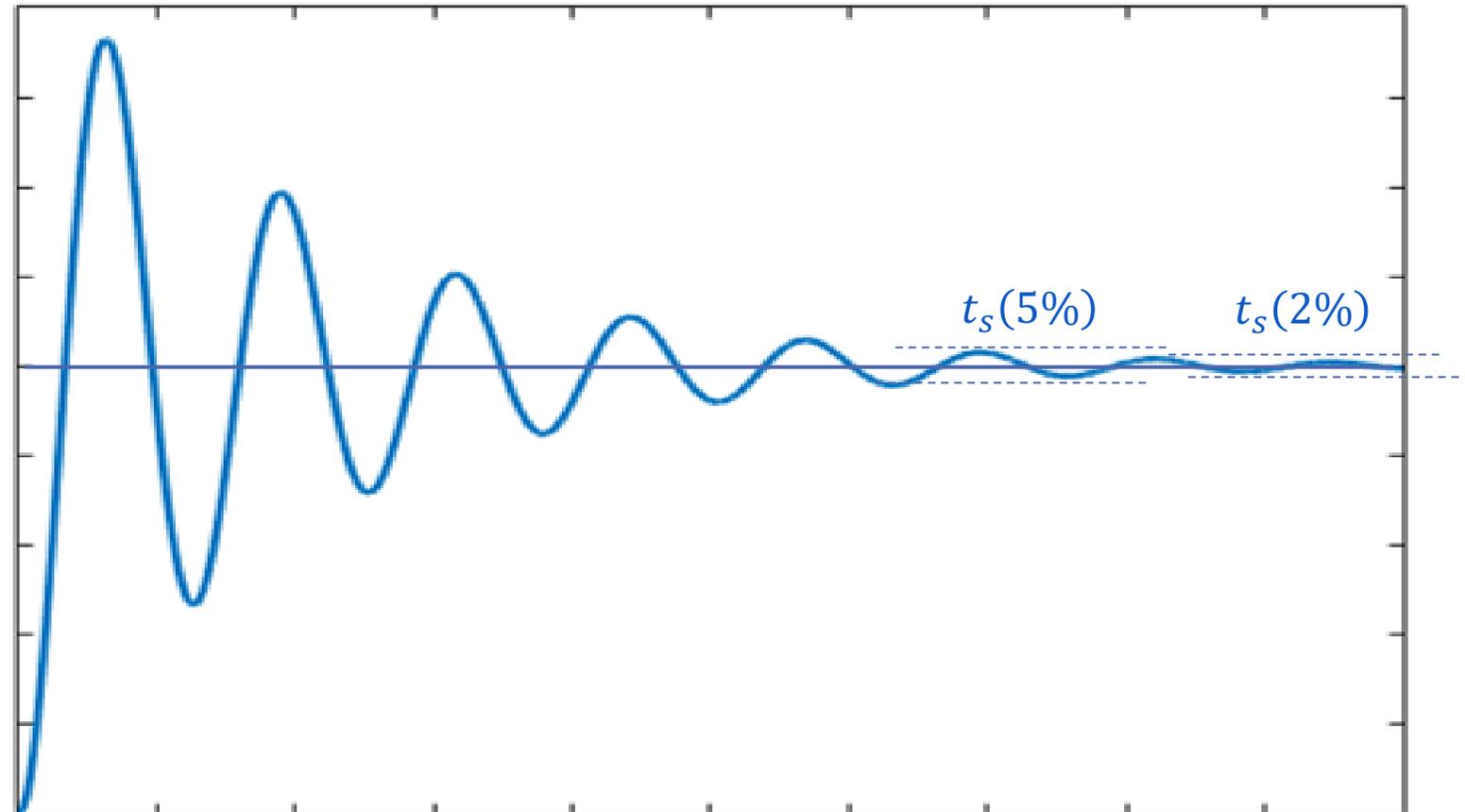


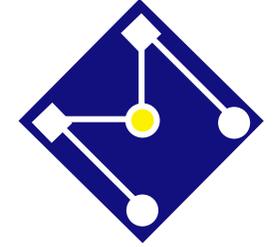


# TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO $t_s$

(SETTLING TIME)

$t_s$  é tempo necessário para a resposta ficar dentro de uma faixa do valor final, em geral de  $\pm 2\%$  a  $\pm 5\%$ ;





$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \varphi) \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t}$$

Para diminuir  $t_s$   
 → Aumentar  $\zeta \omega_n$   
 → diminuir  $\tau$

Para  $t_s$  com  $\pm 2\%$  de tolerância,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t_s} = 0,02$$

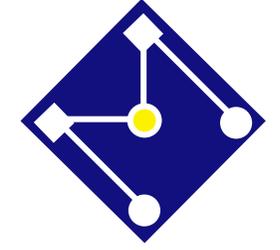
$$t_s \cong \frac{4}{\sigma} \cong 4\tau, \quad \tau = \frac{1}{\zeta \omega_n}$$

Para  $t_s$  com  $\pm 5\%$  de tolerância,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t_s} = 0,05$$

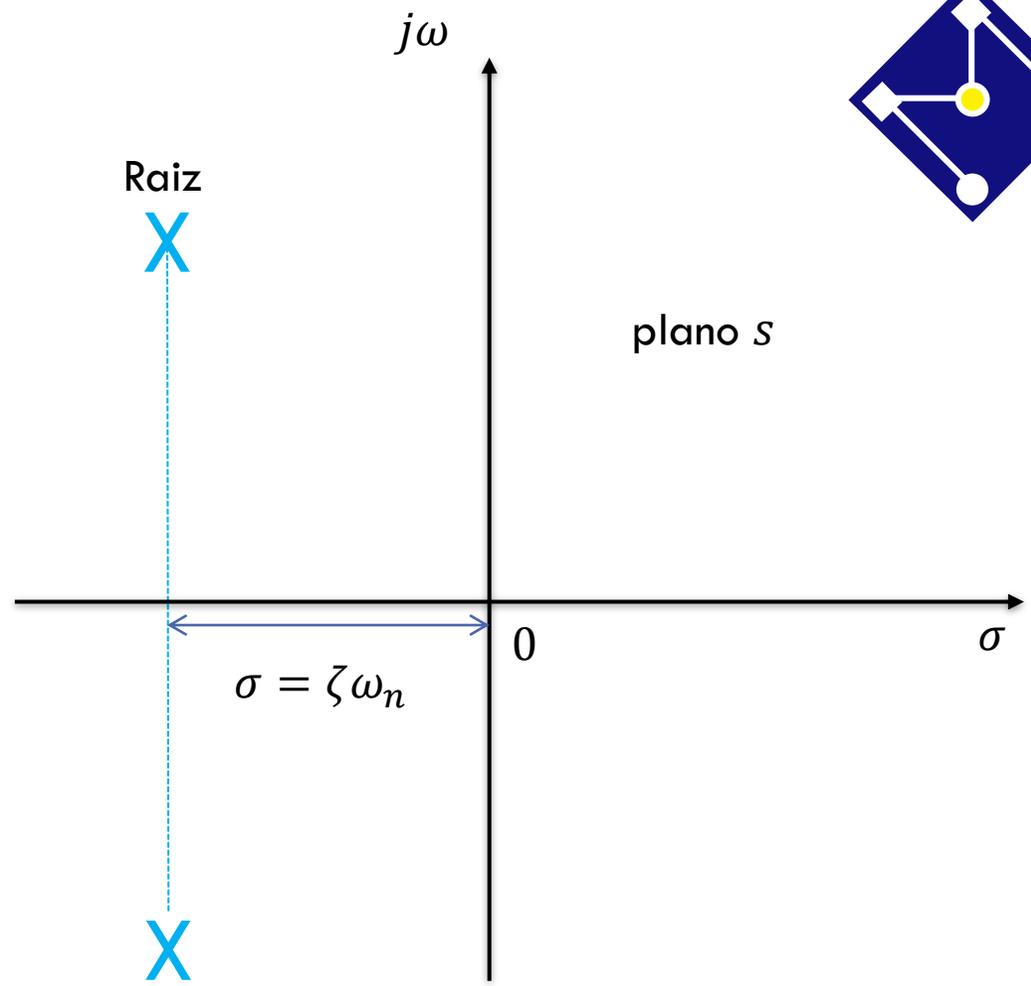
$$t_s = \frac{3}{\sigma}$$

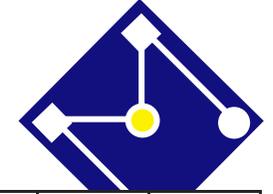
Verifica-se que o numerador da equação anterior varia de 3,91 – 4,74 para  $\zeta$  variando de 0 a 0,9.



O tempo de estabilização  $t_s$  é inversamente proporcional a  $\sigma = \zeta\omega_n$ , que é a distância da parte real dos polos à origem.

Isto é, quanto mais longe estiver o polo da origem, mais breve a oscilação.



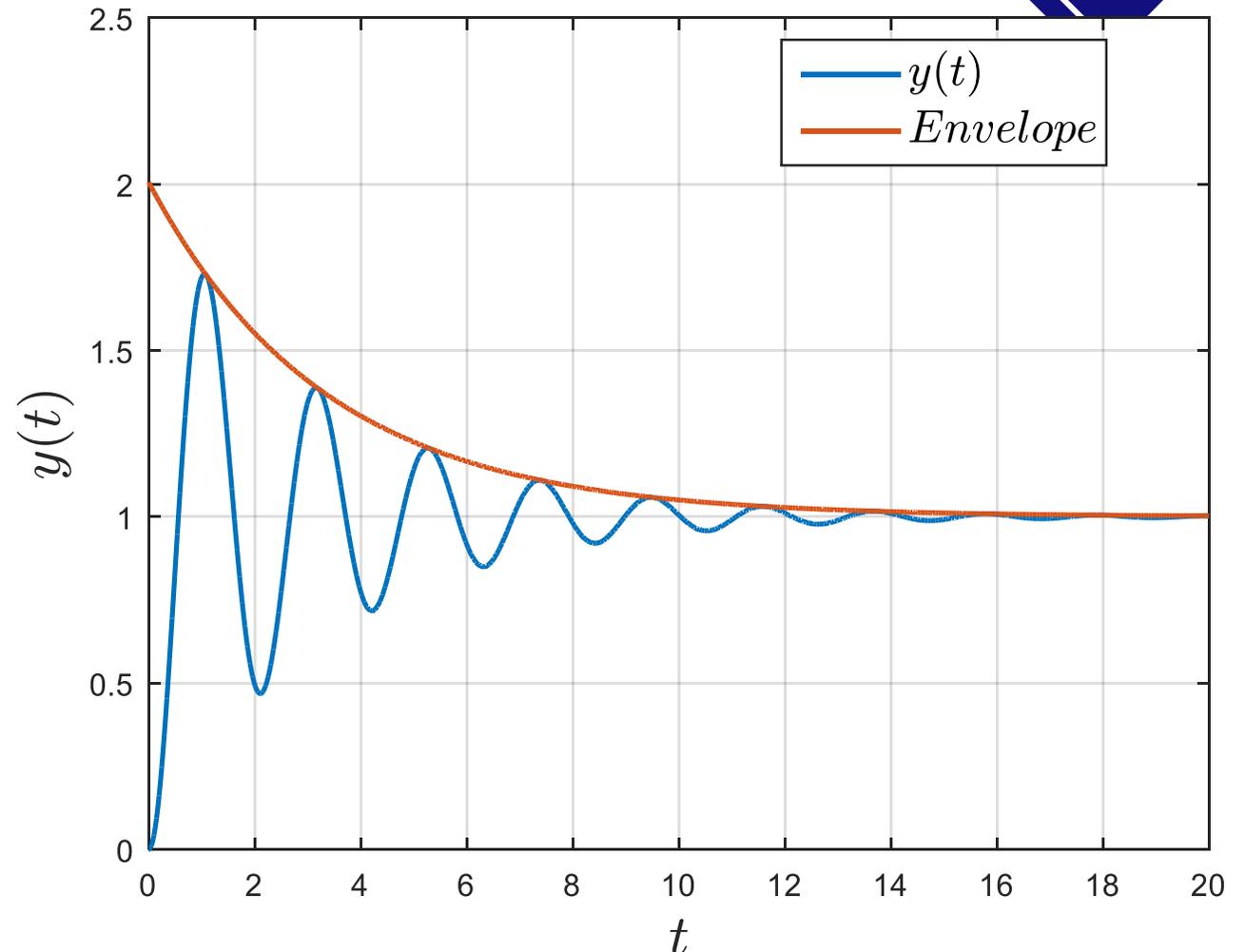


# ENVELOPE DE DECAIMENTO

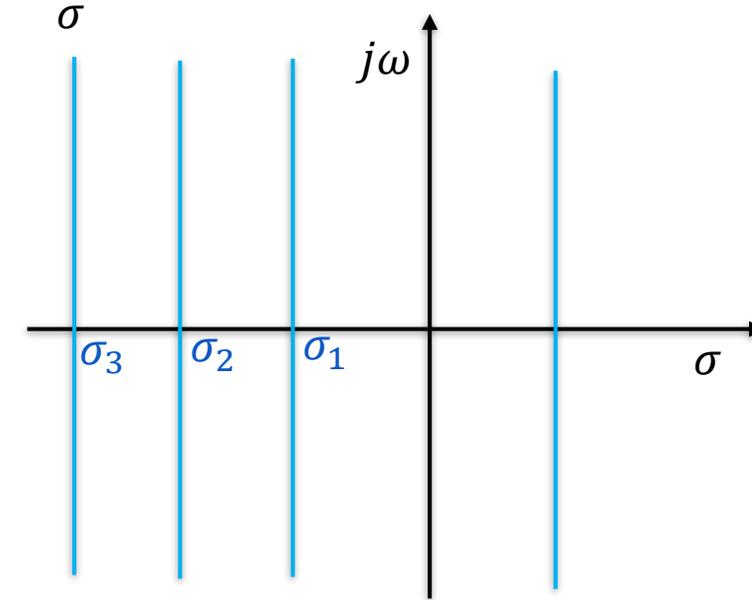
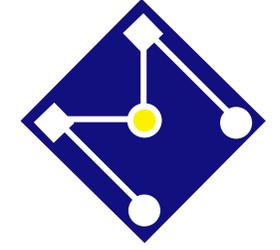
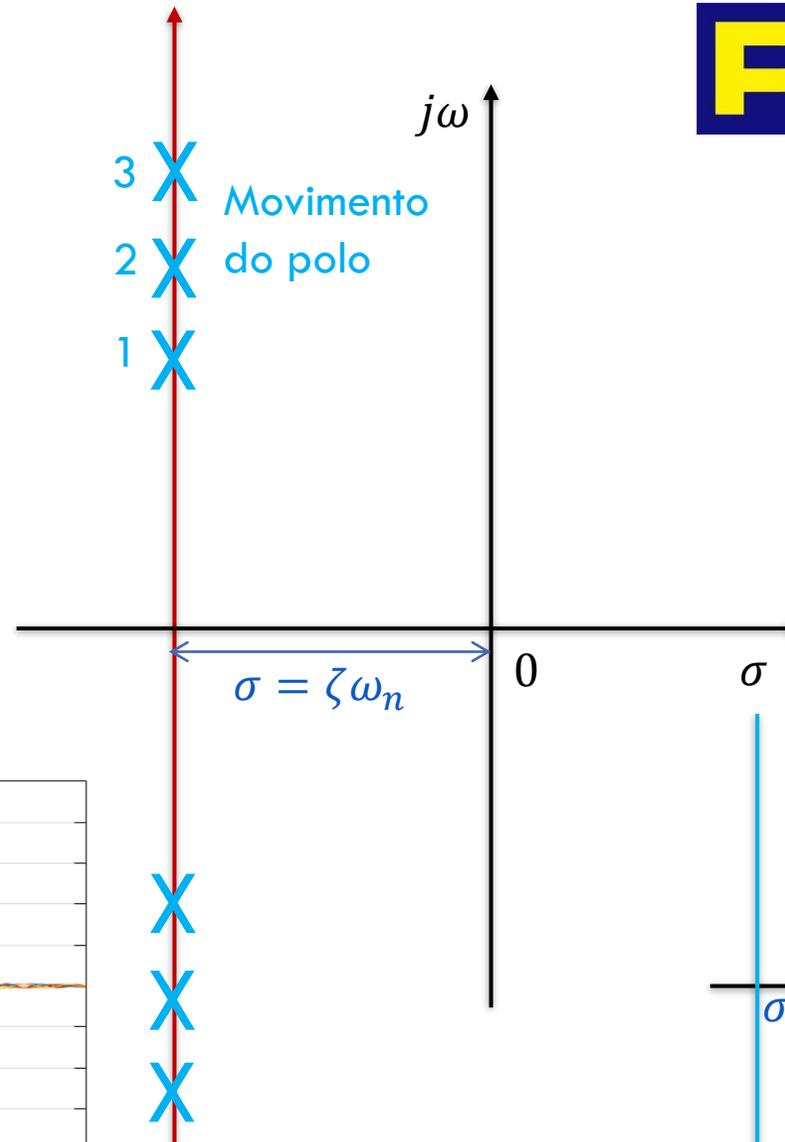
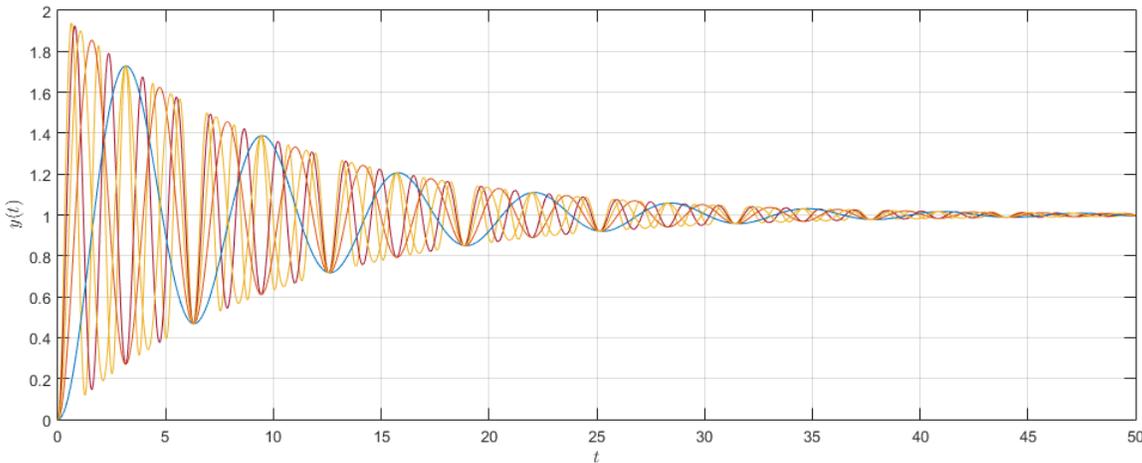
$$E = K \left[ 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \right]$$

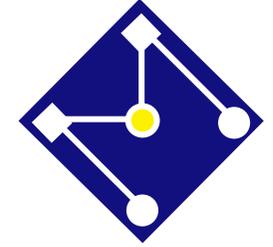
A velocidade de decaimento da resposta transitória depende do valor da constante de tempo

$$\tau = 1/\sigma$$



O movimento dos polos ao longo de uma linha vertical constante implica no aumento da frequência, embora a envoltória do decaimento permaneça a mesma





# RELAÇÃO DE DECAIMENTO $\xi$

(DECAY RATIO)

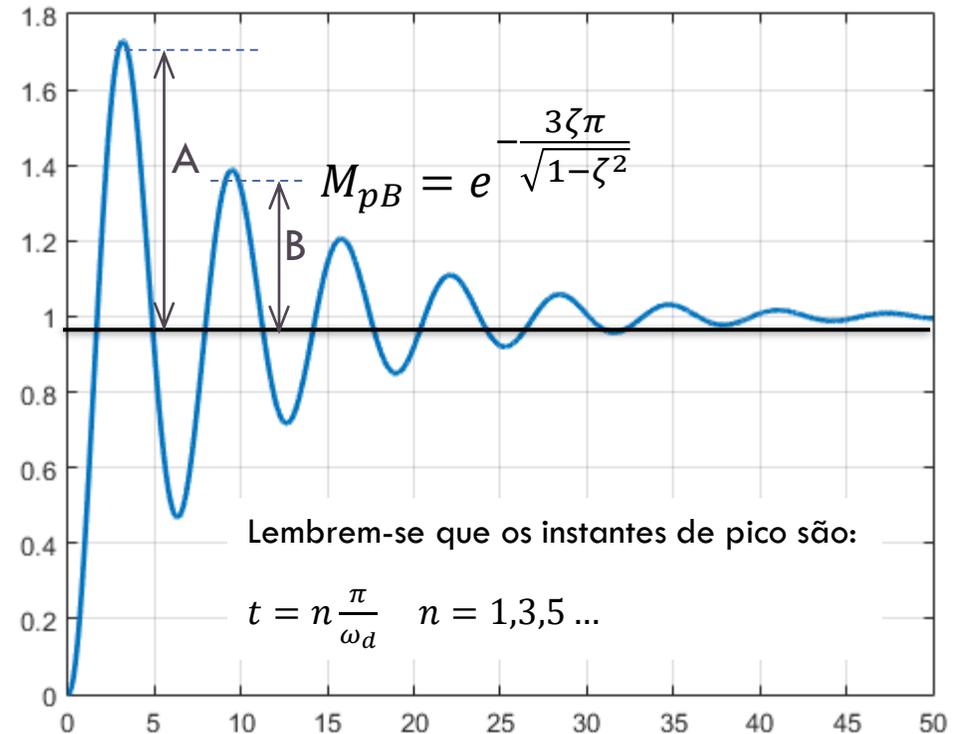
- É a razão entre as alturas de dois picos sucessivos. Em sistemas de segunda ordem,  $\xi$  é constante para par sucessivo de picos.

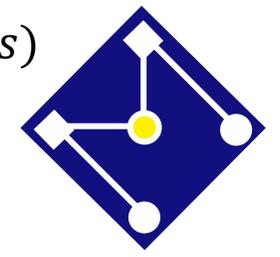
$$A = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$B = e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\xi = \frac{B}{A} = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

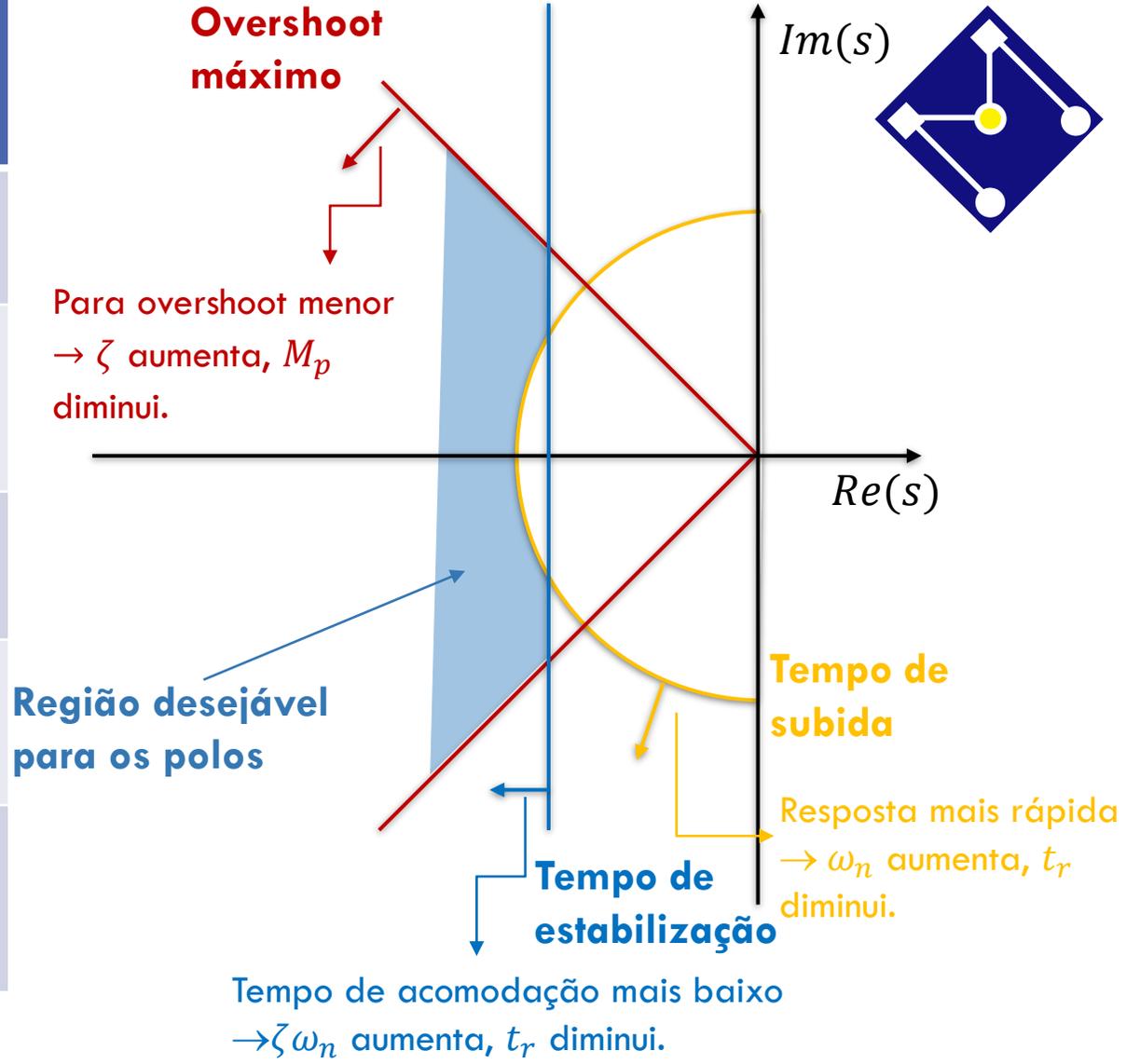
$$M_{pA} = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

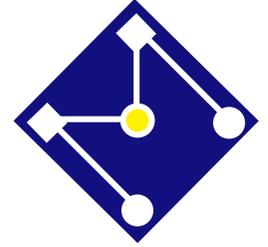




$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

<b>Instante de pico</b>	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$
<b>Sobressinal</b>	$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$
<b>Tempo de estabilização</b>	$t_{s,2\%} = \frac{-\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \cong \frac{4}{\sigma} = 4\tau$
<b>Tempo de subida</b>	$t_r = \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\zeta}{\omega_d} \cong \frac{\pi}{2\omega_n}$
<b>Resposta em estado estacionário</b>	$y_{ss} = K$





# EXEMPLO 01

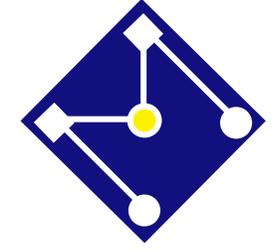
- Para cada sistema de segunda ordem abaixo, encontre  $\zeta, \omega_n, t_s, t_p, t_r$

$$G_1(s) = \frac{16}{s^2 + 3s + 16}$$

$$G_2(s) = \frac{0.04}{s^2 + 0.02s + 0.04}$$

$$G_3(s) = \frac{1.05 \times 10^7}{s^2 + 1.6 \times 10^3 s + 1.05 \times 10^7}$$

$$Y(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$



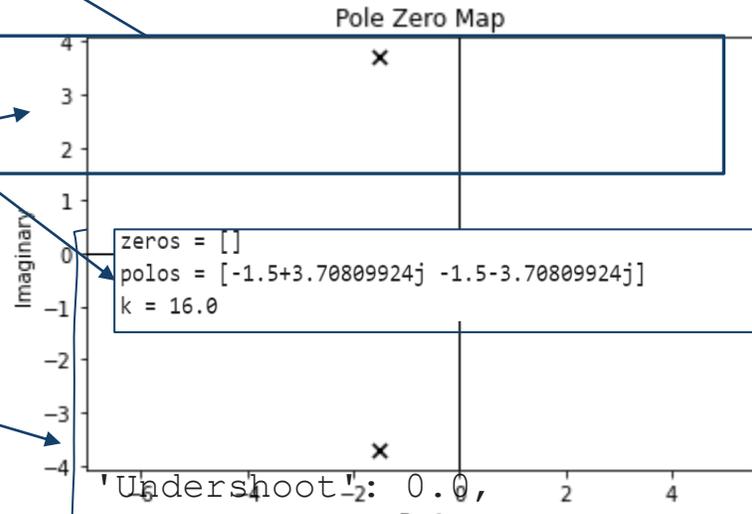
```
num=np.array([16])
den=np.array([1, 3, 16])
G_1 = control.tf(num, den)
```

```
#Função de transferência
print('Função de transferência:')
print(G_1)
```

$$\frac{16}{s^2 + 3s + 16}$$

```
#Parâmetros básicos do sistema de segunda ordem
print('Parâmetros básicos do sistema de segunda ordem:')
omega_n=np.sqrt(den[2]/den[0])
K=(num[0]/omega_n**2)/den[0]
zeta = (den[1]/(2*omega_n))/den[0]
print('Fator de amplificação: {:.6.3f}, Fator de amortecimento: {:.6.3f}, Frequência natural: {:.6.3f}'.format(K,zeta,omega_n))
```

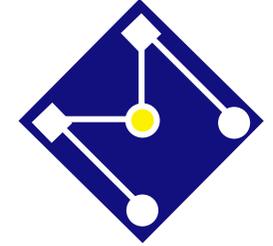
```
[z,p,k]=control.tf2zpk(num1,den1)
print('zeros =',z)
print('polos =',p)
print('k =',k)
control.pzmap(G_1);
G_1_data = control.stepinfo(G_1)
print(G_1_data)
```



segunda ordem:  
Fator de amortecimento: 0.375, Frequência natural: 4.000

zeros = []  
polos = [-1.5+3.70809924j -1.5-3.70809924j]  
k = 16.0

'Undershoot': 0.0,  
'Peak': 1.2805901266033757,  
'PeakTime': 0.8455121788455121,  
'SteadyStateValue': 1.0003453165562077}



```

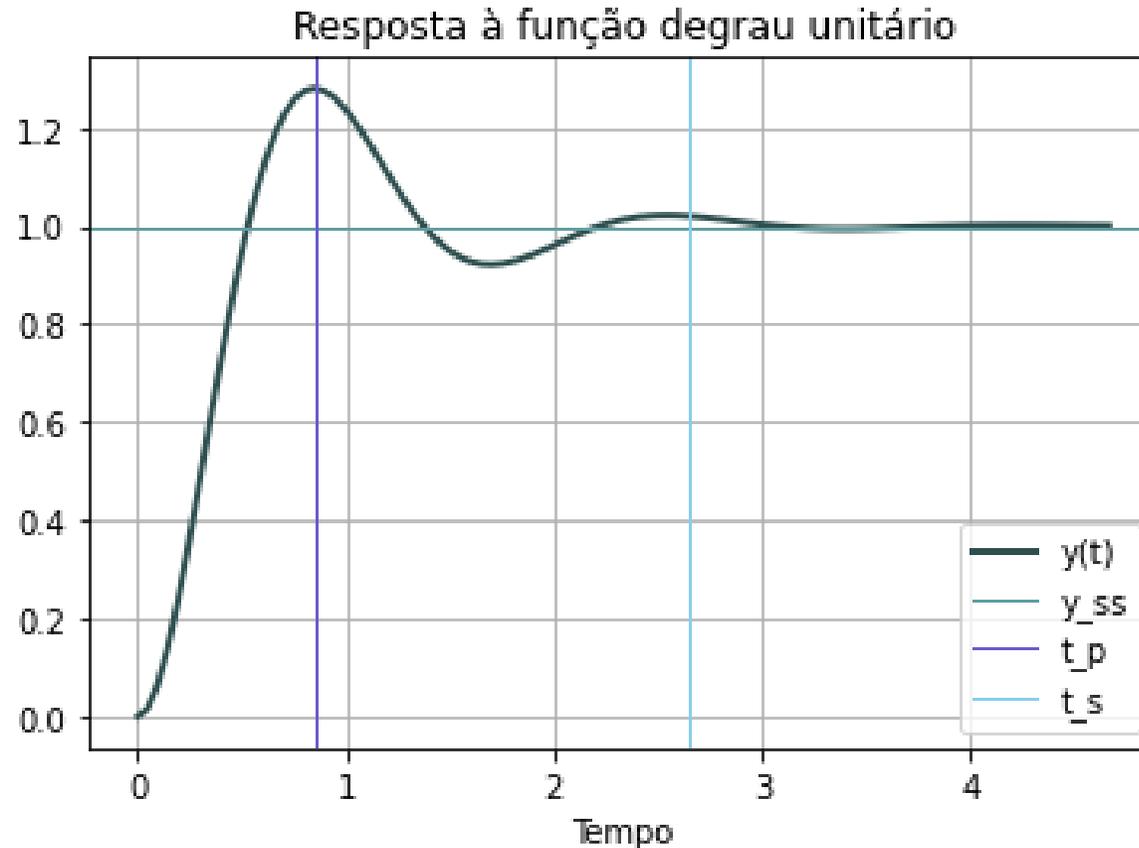
y,t = control.step(G_1)
plt.plot(t,y, color = 'darkslategray', linewidth=2., label = 'y(t)')
plt.xlabel('Tempo')
plt.title('Resposta à função degrau unitário')

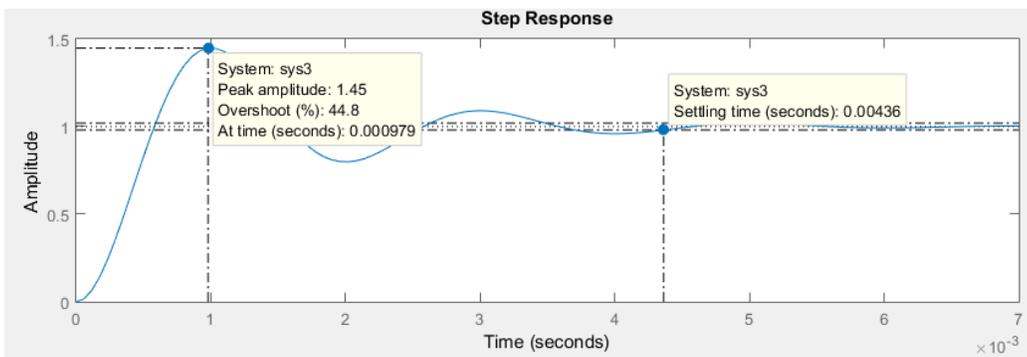
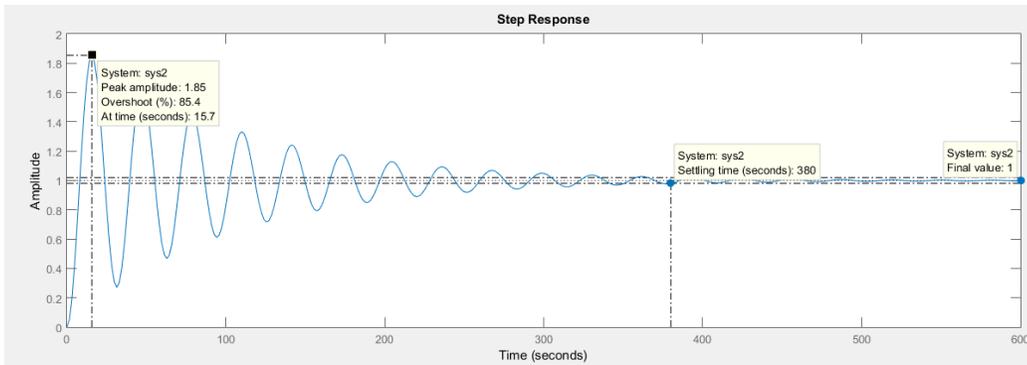
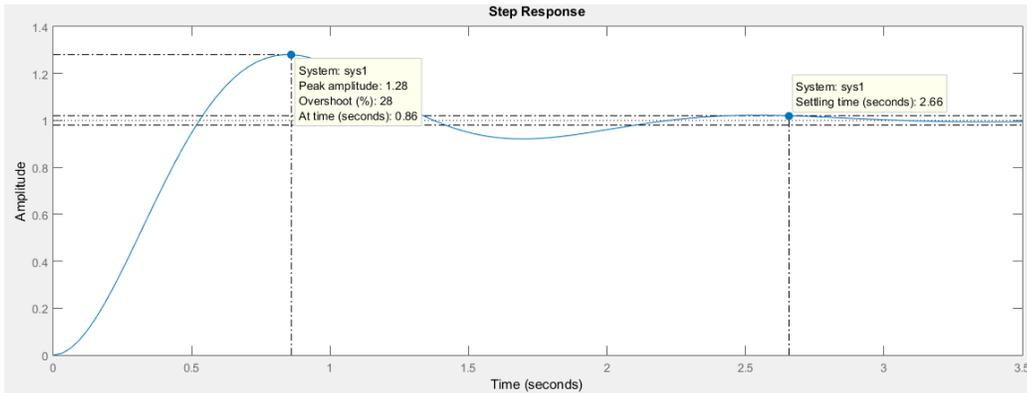
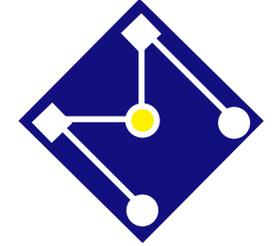
```

```

plt.axhline(y=G_1_data['SteadyStateValue'],linewidth=1, color='cadetblue',label = 'y_ss')
plt.axvline(x=G_1_data['PeakTime'],linewidth=1, color='slateblue',label = 't_p')
plt.axvline(x=G_1_data['SettlingTime'],linewidth=1, color='skyblue',label = 't_s')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

```

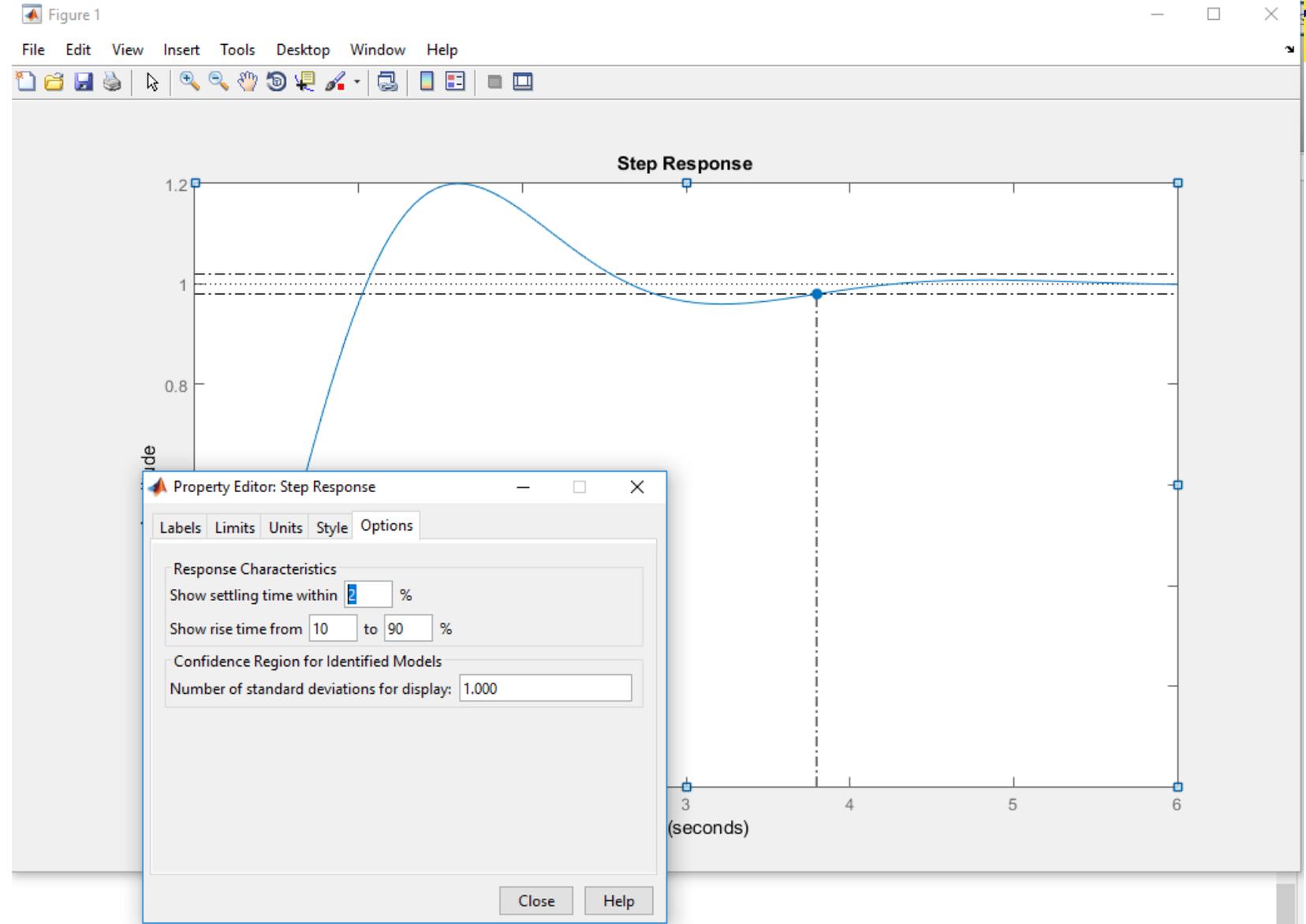




```
close all; clear all; clc
%zeta,wn,ts,tp,tr
num1=[16];
den1=[1 3 16];
sys1=tf(num1,den1)
[z,p,k]=tf2zp(num1,den1)
ltiview('pzmap',sys1);
%
num2=[0.04];
den2=[1 0.02 0.04];
sys2=tf(num2,den2)
[z,p,k]=tf2zp(num2,den2)
ltiview('pzmap',sys2);
%
num3=[1.05e7];
den3=[1 1.6e3 1.05e7];
sys3=tf(num3,den3)
[z,p,k]=tf2zp(num3,den3)
ltiview('pzmap',sys3);
```

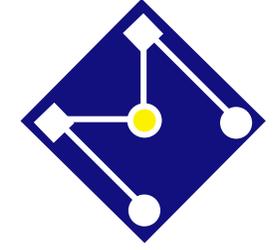
**MATLAB**

Veja que as propriedades podem ser modificadas no MatLab

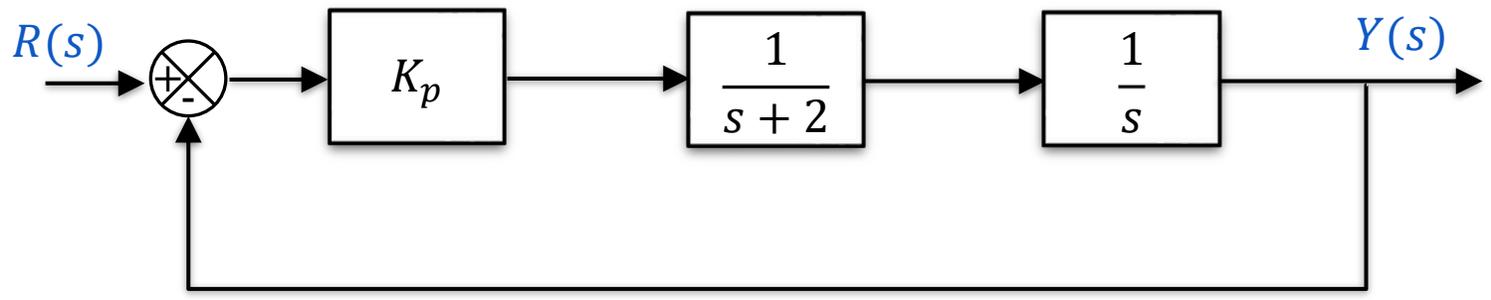




# ESTUDOS DE CASO

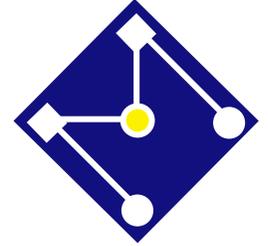


# EXERCÍCIO



1. O ganho estático do sistema em cadeia fechada depende de  $K_p$ ?
2. Determine  $K_p$  para que a resposta do sistema em cadeia fechada a uma entrada degrau de amplitude unitária e sobressinal de 20%.
3. Para o valor de  $K_p$  definido no item anterior, qual é o tempo de estabilização da resposta a 5%?

Confirme/compare os resultados usando MatLab.

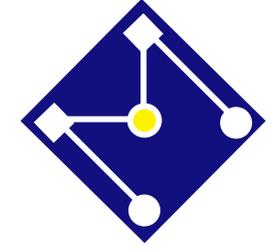


## EXEMPLO 02 – DESAFIO

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

- Dada a função de transferência de um sistema dinâmico, proponha uma **região de alocação para o par de polos** de modo a atender as seguintes especificações de desempenho para resposta ao degrau unitário:

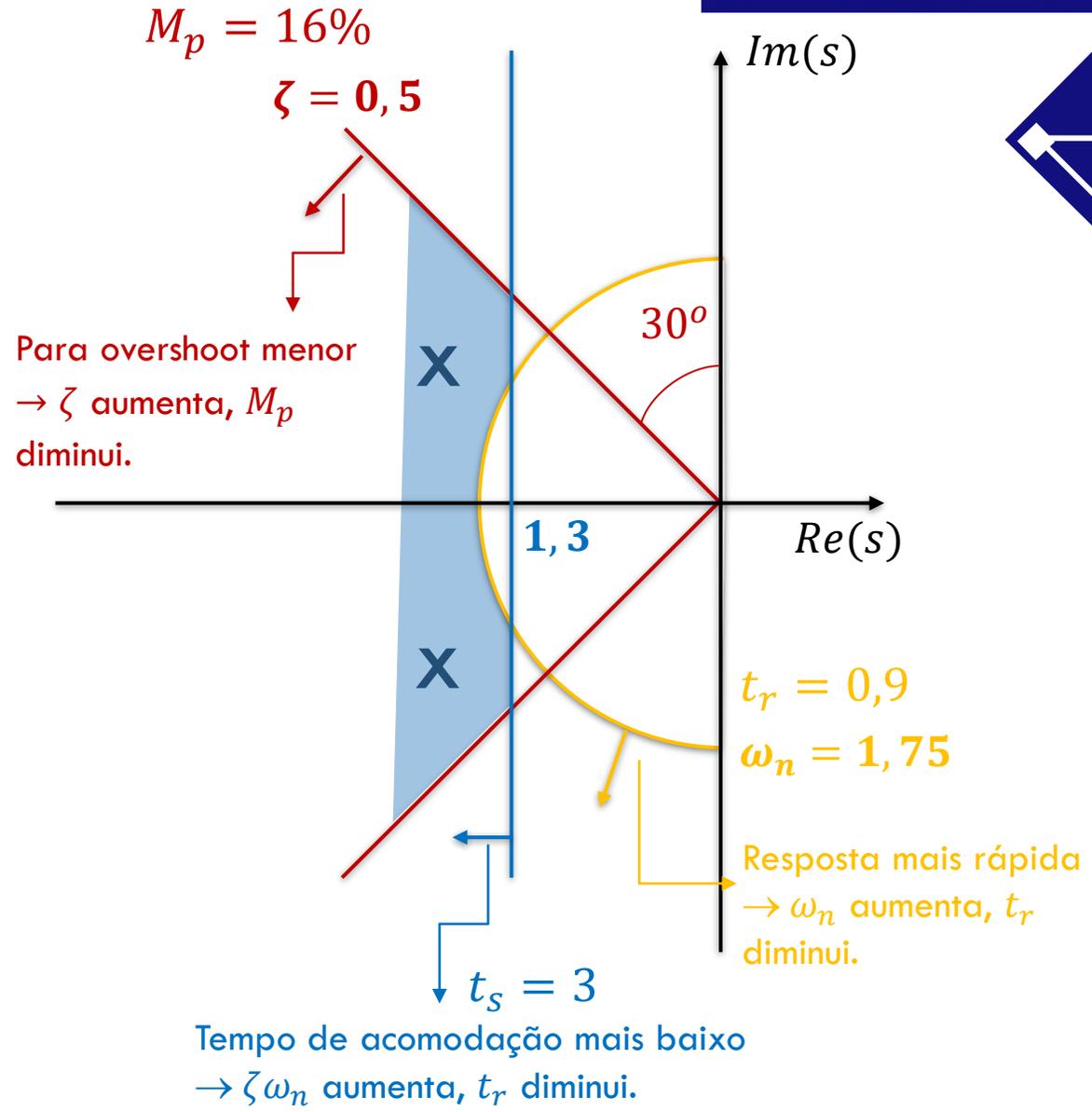
1.  $t_r \leq 0,9s$
2.  $M_p \leq 16\%$
3.  $t_{s,2\%} \leq 3s$

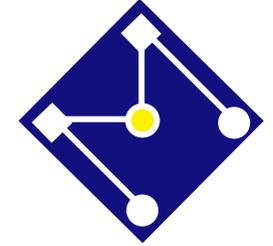


$$e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0,16 \rightarrow \zeta \geq 0,5$$

$$0,9 = \frac{\pi}{2\omega_n} \leq 0,9 \rightarrow \omega_n \geq 1,75$$

$$\frac{4}{\omega_n\zeta} \leq 3 \rightarrow \omega_n\zeta \geq 1,3$$





## FIM DO OITAVO MÓDULO

“Anyone alive today who survives until 2050 may never have to face death. In 2050, it will only really be for the rich and famous. Most people on middle-class incomes and reasonable working-class incomes can probably afford this in the 2060s.”

Dr. Ian Pearson, engenheiro, futurista, 2016.

intervenções neurológicas? Afinal, não seria a tristeza acumulada o que nos faz vergar sob o peso da velhice?

O paradoxo da imortalidade é que, sem a finitude, a vida perde seu significado. Atingir a imortalidade nunca poderia ser um fato, mas apenas um desejo. Embora a morte não faça parte da vida por estar além da experiência consciente, a finitude é um dos componentes essenciais da vida. Mais do que morrer, o importante é *saber* que morreremos. A brevidade da vida e a indefinição sobre quando ela terminará faz com que lutemos para torná-la o mais digna possível. Uma vida infinita ou extremamente longa é incompatível com a dignidade e com o desejo de aproveitá-la da melhor forma possível. O que é muito abundante acaba perdendo valor.

Trecho do livro “O cérebro e o robô: IA, biotecnologia e a nova ética”, João Fernandes Teixeira.