Ondas Electromagnéticas III

[J.D. Jackson; Classical Electrodynamics, Cap. 7]

[R.H. Good Jr. And T.J. Nelson; Classical Theory of Electric and Magnetic Fields, p. 368]

Causalidade e transformada de Fourier

Condição de que o efeito de uma ação física, $\boldsymbol{E(t)}$, só pode ocorrer após causa, $\boldsymbol{C(t)}$

$$C(t) \implies E(t)$$

Como ambas grandezas variam com o tempo, podemos representa-las pela transformada de Fourier

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \;\; c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) e^{i\omega t} dt$$

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \;\; e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt$$

Como essas duas grandezas são reais, suas transformadas devem satisfazer a condição

$$C(t) = C^*(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} c^*(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Fazendo a troca $\omega \rightarrow (-\omega)$ na segunda integral, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} c^*(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega \rightarrow c(\omega) = c^*(-\omega)$$

- Esta relação, denominada *Relação de Cruzamento*, tem que ser satisfeita pela transformada de Fourier de qualquer grandeza real
- Para grandezas reais, frequências negativas são ilusórias, no sentido que a grandeza só possui frequências positivas

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{o} c(\omega)e^{-i\omega t}d\omega + \int_{0}^{\infty} c(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\right]$$

Fazendo a troca $\omega \rightarrow (-\omega)$ na primeira integral, temos

$$\int_{-\infty}^{0} c(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{0}^{\infty} c(-\omega)e^{i\omega t}d\omega = \int_{0}^{\infty} c^{*}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Portanto

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left[c(\omega)e^{-i\omega t} + c^{*}(\omega)e^{i\omega t}\right]d\omega$$

Se a forma polar for utilizada, $c(\omega) = \frac{1}{2}r(\omega)e^{i\theta(\omega)}$, teremos

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}r(\omega)\left[e^{-i(\omega t-\theta)} + e^{i(\omega t-\theta)}\right]d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} r(\omega)\cos[\omega t - \theta(\omega)]d\omega$$

<u>Linearidade e Teorema da Convolução</u>

Se a relação entre causa e efeito for linear, isto é,

$$C_1 \to E_1;\ C_2 \to E_2 \implies \alpha C_1 + \beta C_2 \to \alpha E_1 + \beta E_2$$

então a relação temporal entre causa e efeito pode representada da forma

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')C(t')dt'$$

$G(t-t') \rightarrow$ função que pondera a contribuição da causa no instante t'para o efeito no instante t (função de Green temporal). Seja esta função representada pela transformada de Fourier

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega; \; g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt$$

Calculando a transformada de Fourier da função efeito, temos

$$e(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') C(t') dt'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} C(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega') e^{-i\omega'(t-t')} d\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega') e^{i\omega' t'} d\omega' \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega'-\omega)t} dt \right]$$

Como já vimos anteriormente, o termo entre colchetes é igual a $\delta(\omega' - \omega)$; portanto

$$e(\omega) = \sqrt{2\pi} g(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(t') e^{i\omega t'} dt' = \sqrt{2\pi} g(\omega) c(\omega)$$

Este resultado é o famoso *Teorema da Convolução*

Formalmente, a convolução entre duas funções é definida como

$$\mathbb{C}(u) \equiv f(x) \otimes g(x) = \int f(x) g(u - x) dx$$

$$f(x) \otimes g(x) = g(x) \otimes f(x)$$

Se representarmos pelo símbolo $\mathcal{F}(\,)$ a operação "*Transformada de Fourier*", o Teorema da Convolução pode ser representado por

$$\mathcal{F}[f(x) \otimes g(x)] = [\mathcal{F}(f)] \cdot [\mathcal{F}(g)]$$

O reverso também é verdade

$$\mathcal{F}[f(x) \cdot g(x)] = [\mathcal{F}(f)] \otimes [\mathcal{F}(g)]$$

<u>Nota</u>: àqueles que não viram convolução no curso de graduação, se tiverem dúvidas, recomendo

- B.P. Lathi; Linear Systems and Signals; 2nd Edition, Section 2.4.1
- https://www-structmed.cimr.cam.ac.uk/Course/Convolution/convolution.html#whatis

Aplicação à descrição da polarização em meios materiais

Modelo de Drude-Lorentz

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Causa: $\vec{E}(\vec{r},t)$ Efeito: $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} \implies \vec{D}(\vec{r},\omega) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{r},\omega) + \epsilon_0\epsilon_r(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$

A segunda parcela é um produto de transformadas de Fourier; portanto

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \epsilon_r(\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau)d\tau$$

A transformada inversa da constante dielétrica relativa é dada por

$$\epsilon_r(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_p^2}{\overline{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega\tau} d\omega$$

Para fazer esta integral, podemos utilizar o método de separação de frações.

$$\overline{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega = \overline{\omega}_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} - \left(\omega + i\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \nu^2 - \left(\omega + i\frac{\gamma}{2}\right)^2; \;\; \nu^2 = \overline{\omega}_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$$

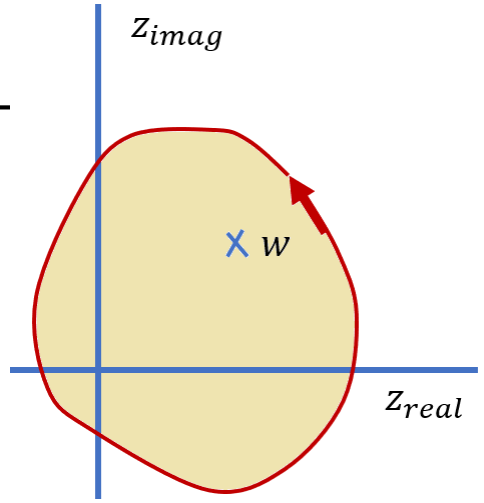
$$\therefore \frac{1}{\overline{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{1}{2\nu}\left[\frac{1}{\omega + \nu + i\frac{\gamma}{2}} - \frac{1}{\omega - \nu + i\frac{\gamma}{2}}\right]$$

e

$$\epsilon_r = \frac{\omega_p^2}{2\nu\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_1}d\omega - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_2}d\omega\right];\ \ \omega_1 = -\nu - i\frac{\gamma}{2};\ \omega_2 = \nu - i\frac{\gamma}{2}$$

<u>Teorema de Cauchy</u> [Arfken; Sixth Edition, Chapter 6]

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z - w}dz$$

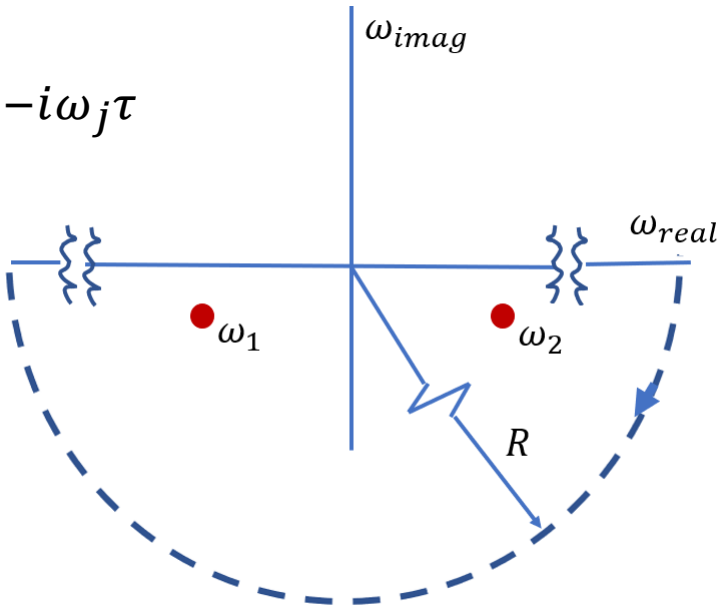


Para empregar este resultado, consideramos a integral no plano complexo $\omega = Re^{-i\theta}$, tomando a integral ao longo do eixo real e fechando-a ao longo de um arco de circulo no semiplano inferior.

Ao longo deste arco, $e^{-i\omega\tau} = e^{-iR\cos\theta\tau} \cdot e^{R\sin\theta\tau}$.

Como $\sin\theta$ é negativo no semiplano inferior, a integral ao longo do arco de circulo anula-se quando $R \to \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_j} d\omega = \lim_{R\to\infty} \oint \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - \omega_j} d\omega = -2\pi i e^{-i\omega_j\tau}$$



Portanto

$$\epsilon_r = \frac{\omega_p^2}{2\nu\sqrt{2\pi}}\left[-2\pi i\left(e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}\right)e^{\frac{-\gamma}{2}}\right]$$

$$\epsilon_r = \frac{\omega_p^2}{\nu}\sqrt{2\pi}\left[\sin(\nu\tau)\, e^{\frac{-\gamma\tau}{2}}\right]$$

Portanto

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon_0\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\omega_p^2}{\nu}\int_0^{\infty} \sin(\nu\tau)\, e^{\frac{-\gamma\tau}{2}}\vec{E}(\vec{r},t-\tau)d\tau\right]; \nu^2 = \bar{\omega}_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$