Lista de exercícios sobre integral de superfície de campo escalar

profa. Zara Abud

(I) Calcule as seguintes integrais de superfície:

(1) $\int\int_S x^2 dS$ sendo S a parte lateral do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com $0 \leq z \leq 2$.

(2) $\int\int_S x^2 dS$ sendo S a parte do plano $z = x + 3$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(3) $\int\int_S (x^2 + y^2 - 2z^2) dS$ sendo S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \geq \dfrac{x^2 + y^2}{3}$.

(4) $\int\int_S \sqrt{\dfrac{2x^2 + 2y^2 - 2}{2x^2 + 2y^2 - 1}}$ sendo S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ com $1 \leq z \leq 3$.

(Sugestão: para cada valor de z entre 1 e 3 (vamos chamar z de v), a interseção da superfície com o plano $z = v$ é dada por $x^2 + y^2 = v^2 + 1$, e portanto, é uma circunferência de centro no eixo z (centro nno ponto $(0, 0, v)$) e raio $\sqrt{v^2 + 1}$. Então podemos considerar a seguinte parametrização para S:

$$\sigma: \begin{cases} x = \sqrt{v^2 + 1}\, cosu \\ y = \sqrt{v^2 + 1}\, senu \\ z = v \end{cases}$$

com $1 \leq v \leq 3$ e $0 \leq u \leq 2\pi$)

(II) Calcule a área das seguintes superfícies S:

(1) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(2) S é a parte do plano $z = 2x + 3y$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

(3) S é o toro (pneu) obtido por rotação da circunferência, no plano xz, com centro no ponto $(b, 0, 0)$ e raio $a > 0$, com $a < b$, em torno do deixo z.

(III) Determine a massa da superfície S, com densidade δ, em cada um dos casos:

(1) S é a esfera de centro na origem e raio $a > 0$, e $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(2) S é a parte do plano $z = x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $\delta(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$.

(3) S é a parte do gráfico da função $z = ln(x^2 + y^2)$, limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = e^2$, com $\delta(x, y, z_) = \sqrt{x^2 + y^2}$.