

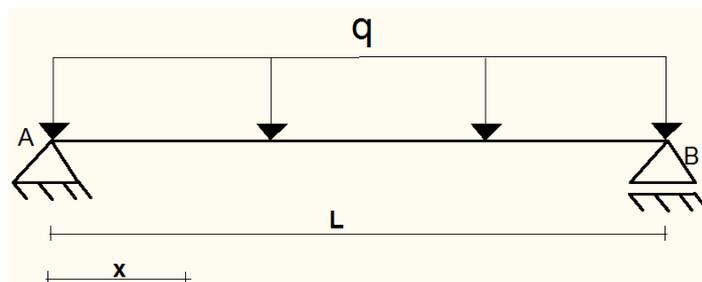
Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

São Paulo, junho de 2020.

“Exercícios complementares de apoio aos alunos que cursam as disciplinas de “Resistência dos Materiais” para demais cursos de engenharia. Dizem respeito ao conteúdo de cálculo de deslocamentos transversais de estruturas sujeitas a flexão, e também a resolução de estruturas hiperestáticas com o uso das equações de equilíbrio e compatibilidade, mediante o uso da integração direta ou das funções descontínuas ou singulares.

Foram desenvolvidos pelo prof. Valério S. Almeida, quando não indicado o autor no início do exercício. Alguns exercícios não apresentam respostas, mas pretende-se incluí-las ao longo das demais versões.

1. Para a viga bi-apoiada a seguir, considere que o material e sua seção transversal sejam os mesmos, ou seja, adote $E \cdot I = \text{constante}$. Determine o deslocamento vertical (v) da seção central, a rotação nas seções dos apoios e do centro em termos de q , L , EI .



Resposta:

a) Equação de momento:

Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho único: $0 \leq x \leq L$

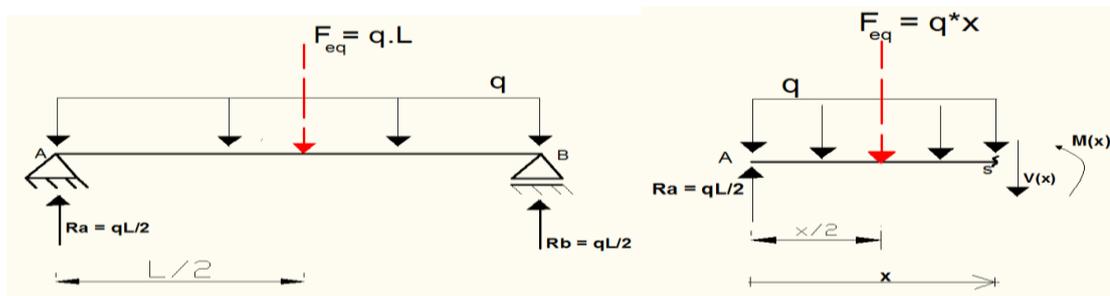
$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_a - q \cdot x - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - q \cdot x$$

$$V(x) = q \cdot L / 2 - q \cdot x \text{ (linear)}$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M(x) + (q \cdot x) \cdot x / 2 - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x - q \cdot x^2 / 2$$

$$M(x) = (q \cdot L / 2) \cdot x - q \cdot x^2 / 2 \text{ (parábola)}$$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



b) Calcular $v(x)$:

$$v''(x).EI = -M(x) = \frac{q}{2} [x^2 - L.x]$$

$$v(x).EI = -M(x) = \frac{q}{2} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{L.x^3}{6} \right] + C_1x + C_2$$

Condições de contorno:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (\text{apoio}) \rightarrow C_1 = \frac{q.L^3}{24}; \quad C_2 = 0$$

$$v(x) = \frac{q}{12EI} \left[\frac{x^4}{2} - L.x^3 + \frac{L^3}{12} \right]$$

$$v(L/2) = \frac{5qL^4}{384.EI}$$

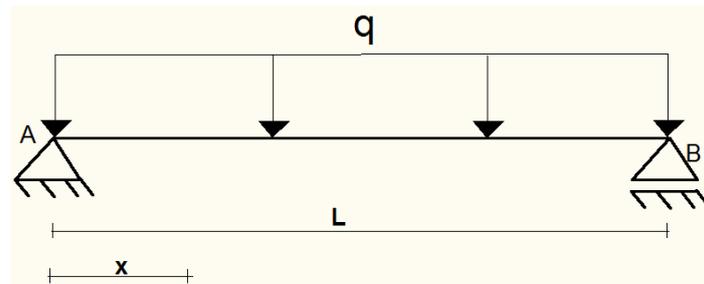
$$v'(x) = \frac{q}{2EI} \left[\frac{L.x^3}{3} - \frac{L.x^2}{2} + \frac{L^3}{12} \right]$$

$$v'(0) = \theta(0) = \frac{q.L^3}{24EI} \quad v'(L) = \theta(L) = \frac{-q.L^3}{24EI}$$

$$v'(L/2) = \theta(L/2) = 0$$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

2. Para a viga bi-apoiada a seguir, há um limite de projeto estabelecido em norma para o deslocamento vertical, de modo que o máximo valor que esse possa assumir é de 5 cm. Sabe-se que a carga distribuída é de $q = 15 \text{ kN/m}$, o material é uma madeira Ipê-roxo com $E = 16.500 \text{ MPa}$, e sua seção transversal é um pranchão de seção retangular de base e altura, respectivamente, de 15 e 23 cm. Determine o maior valor do vão (L) de modo a atender a norma.



Resposta: Do exercício anterior, a equação da elástica da viga é dada por:

$$v(x) = \frac{q}{12EI} \left[\frac{x^4}{2} - L \cdot x^3 + \frac{L^3}{12} \right]$$

E seu maior valor ocorre em $x = L/2$, de valor:

$$v(L/2) = \frac{5qL^4}{384 \cdot EI}$$

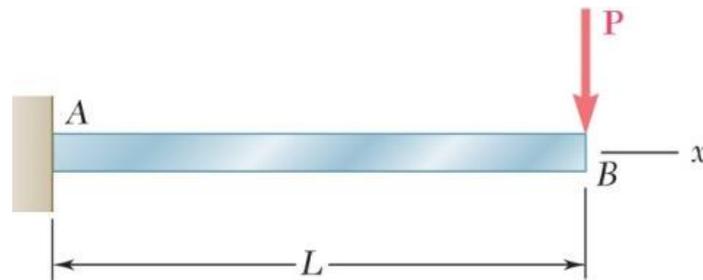
Assim:

$$v(L/2) = \frac{5qL^4}{384 \cdot EI} \leq v_{\max} = 5 \text{ cm} \rightarrow \frac{5 \cdot 15 \cdot L^4}{384 \cdot (16.500 \cdot 10^3) \cdot \frac{0,15 \cdot 0,23^3}{12}} \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

$$L \leq 5,03 \text{ m} \quad \therefore L_{\max} = 5,03 \text{ m}$$

3. Obtenha a linha elástica da viga em balanço da figura. Admita que $E = 200 \text{ GPa}$, $P = 50 \text{ kN}$ e que a seção transversal seja um quadrado de lado 12 cm. Para uma certa funcionalidade da viga, restringe-se o seu deslocamento vertical máximo em 5 cm. Determine o comprimento máximo que essa viga em balanço pode assumir

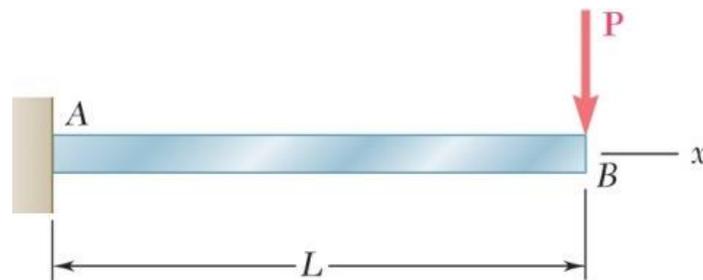
Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta: A equação da linha elástica é dada por $v(x) = \frac{-P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$, o deslocamento máximo, por inspeção, ocorre em $x = L$:

$$v(L) = \frac{-50}{6.200.10^6 \cdot 1,728.10^{-5}}(L^3 - 3L^3) \leq 0,05 \rightarrow L \leq 2,2 \text{ m}$$

4. Sabendo que para a viga em balanço na figura, a equação de seu deslocamento vertical é dado por: $v(x) = \frac{-P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$, onde P é sua força aplicada em B, E seu módulo de elasticidade longitudinal, I seu momento de inércia e L seu comprimento. Admita que $E = 200 \text{ GPa}$, $P = 50 \text{ kN}$ e que a seção transversal seja um quadrado de lado 12 cm. Para uma certa funcionalidade da viga, restringe-se a sua rotação máximo em 2° . Obtenha o comprimento máximo que essa viga em balanço pode assumir.



Resposta: Sabendo que a eq. é dada por $v(x) = \frac{-P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$, a eq. da rotação é:

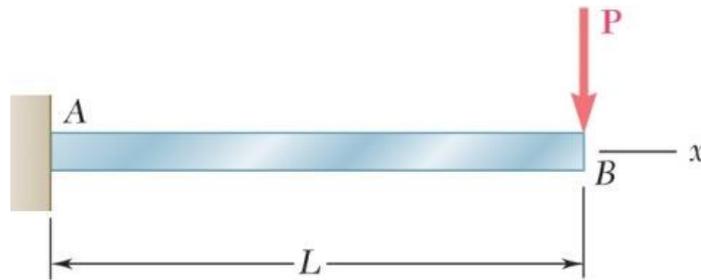
$$v'(x) = \frac{-P}{6EI}(3x^2 - 6Lx)$$

Por inspeção, a rotação máxima ocorre em $x = L$:

$$v'(L) = \frac{-50}{6.200.10^6 \cdot 1,728.10^{-5}}(3L^2 - 6L^2) \leq \frac{2 \cdot \pi}{180} \rightarrow L \leq 2,2 \text{ m}$$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

5. Sabendo que para a viga em balanço na figura, a equação de seu deslocamento vertical é dado por: $v(x) = \frac{-P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$, onde P é sua força aplicada em B, E seu módulo de elasticidade longitudinal, I seu momento de inércia e L seu comprimento. Admita que $E = 200 \text{ GPa}$, $L = 5 \text{ m}$ e que a seção transversal seja um quadrado de lado 12 cm. Para uma certa funcionalidade da viga, restringe-se a sua rotação em B máximo em 1° . Otenha o valor máximo de P que essa viga em balanço pode assumir.



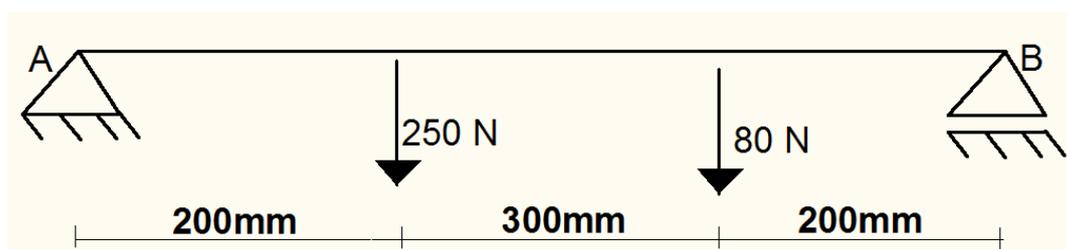
Resposta: Sabendo que a eq. é dada por $v(x) = \frac{-P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$, a eq. da rotação é:

$$v'(x) = \frac{-P}{6EI}(3x^2 - 6Lx)$$

A rotação máxima em B, $x = L = 5 \text{ m}$

$$v'(L = 5) = \frac{-P}{6 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1,728 \cdot 10^{-5}}(3 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5^2) \leq \frac{1 \cdot \pi}{180} \rightarrow P \leq 4,8 \text{ kN}$$

6. O eixo de aço tem diâmetro de 15mm e suas extremidades A e B são fixas. Determine a equação da linha elástica, o máximo deslocamento vertical e sua localização. Adote: $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$.

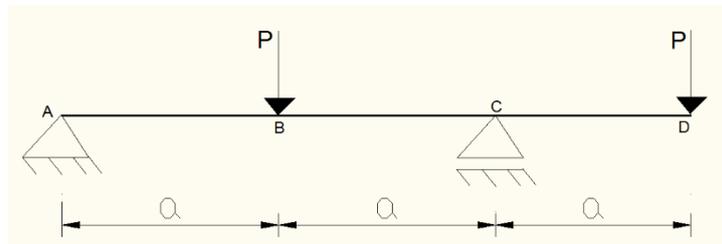


Resposta:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

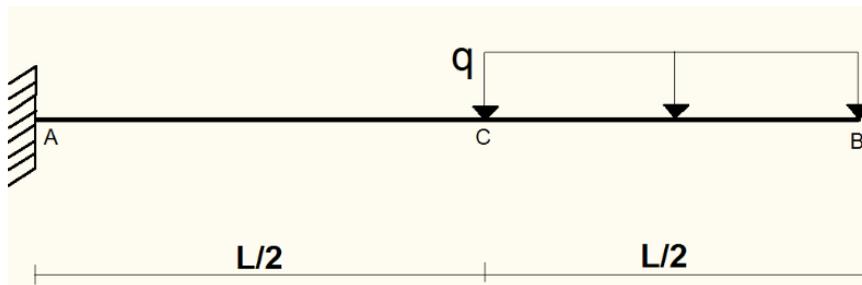
7. Para a viga:

- a) Determine a equação da linha elástica para a sua parte AB ;
- b) Sabendo-se que $P = 2,5 \text{ kN}$, $a = 0,7\text{m}$, $E = 200 \text{ GPa}$ e que sua seção transversal é circular de diâmetro de 40mm ; determinar o deslocamento vertical no ponto B .



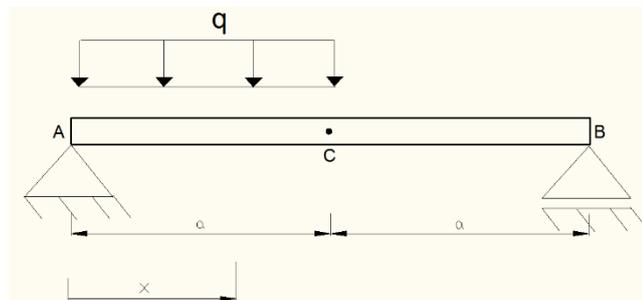
Resposta:

8. Determinar, para viga e o carregamento indicados, a rotação e o deslocamento vertical do ponto B. $EI = \text{cte}$.



Resposta: $w_B = 41 \cdot q \cdot L^4 / (384 \cdot EI)$; $\theta_B = 7 \cdot q \cdot L^3 / (48 \cdot EI)$

9. Determine a equação da linha elástica. Especifique a inclinação em A e o deslocamento em C. EI é constante.



Resposta:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

Resolução:

$$w(x) = \frac{q}{48EI} [-6a \langle x \rangle^3 - 2 \langle x-a \rangle^4 + 2 \langle x \rangle^4 + 9a^3 \langle x \rangle]$$

$$w(x=a) = \frac{5q a^4}{48EI}$$

$$\theta(x=0) = \frac{9q a^3}{48EI} = \frac{3}{16} a^3 q$$

a)

$\varepsilon_{MB} = 0: A = \frac{3qa}{4}$

Eq Momento: $M(x) = \frac{q}{2} \langle x \rangle^2 - \frac{3}{2} qa \langle x \rangle - \frac{q}{2} \langle x-a \rangle^2 = 0$

$$EIW''(x) = -\frac{3}{4} qa \langle x \rangle - \frac{q}{2} \langle x-a \rangle^2 + \frac{q}{2} \langle x \rangle^2$$

$$\frac{EIW'(x)}{q} = -\frac{3}{8} a \langle x \rangle^2 - \frac{\langle x-a \rangle^3}{6} + \frac{\langle x \rangle^3}{6} + C_1$$

$$\frac{EIW(x)}{q} = -\frac{a}{8} \langle x \rangle^3 - \frac{\langle x-a \rangle^4}{24} + \frac{\langle x \rangle^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Condições de contorno: $w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$; $w(2a) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{9}{48} a^3 = \frac{3}{16} a^3$

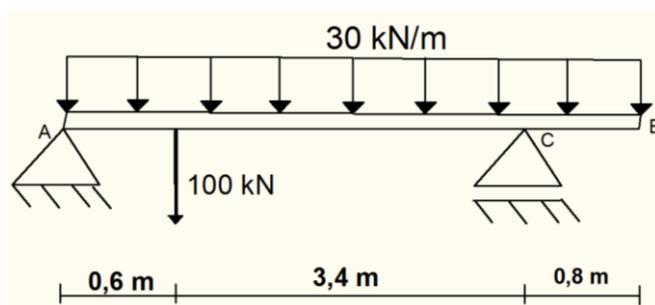
$$w(x) = \frac{q}{48EI} [-6a \langle x \rangle^3 - 2 \langle x-a \rangle^4 + 2 \langle x \rangle^4 + 9a^3 \langle x \rangle]$$

$$w'(x=0) = \theta_A = \frac{9q a^3}{48EI} = \frac{3}{16} a^3 q$$

$$w(x=a) = \frac{5q a^4}{48EI}$$

a) $w'(a) \rightarrow 0,5$
 $w(a) \rightarrow 1,5$
 $w''(a) \rightarrow 0,75$
 $wE(x) \rightarrow 0,75$

10. Determinar, para a viga e o carregamento indicados, a equação da linha elástica, a localização e o máximo deslocamento vertical. Adote: $E_{aço} = 200 \text{ GPa}$. $I = 164 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

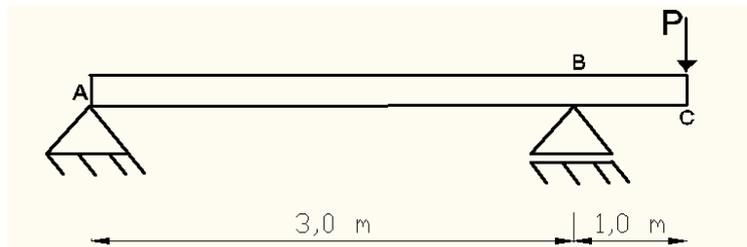


Resposta:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

14. Determinar os deslocamentos verticais máximos nos trechos AB e BC.

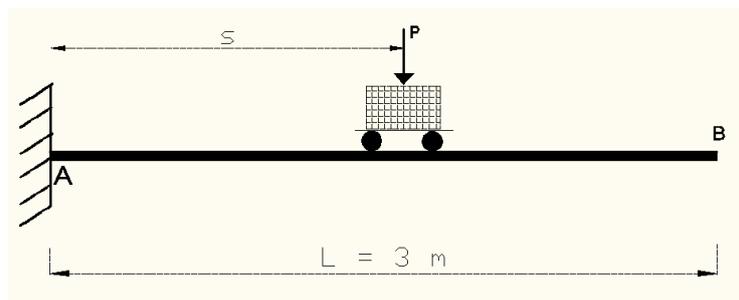
Dados: $EI = 210 \text{ kN.m}^2$, $P = 5 \text{ kN}$.



Respostas: trecho AB: $v_{\max} =$

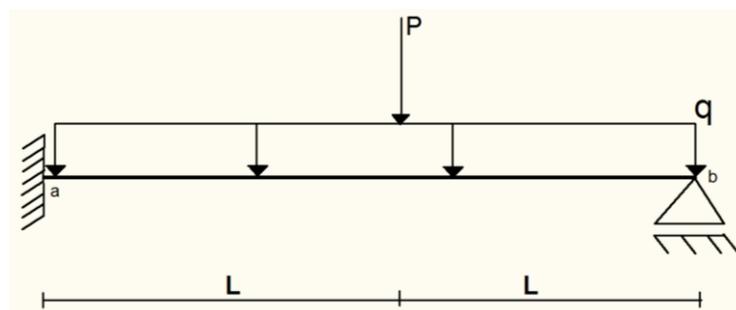
trecho BC: $v_{\max} =$

15. Um pequeno veículo de peso P se move ao longo de uma viga de seção retangular de largura e altura de, respectivamente, 2 e 12 cm. Determinar a máxima distância " s ", conforme desenho, de modo que o deslocamento vertical de B não seja superior a 15 cm. Dados: $E = 200 \text{ GPa}$; $P = 50 \text{ kN}$. Admita que $0 < s < 3 \text{ m}$.



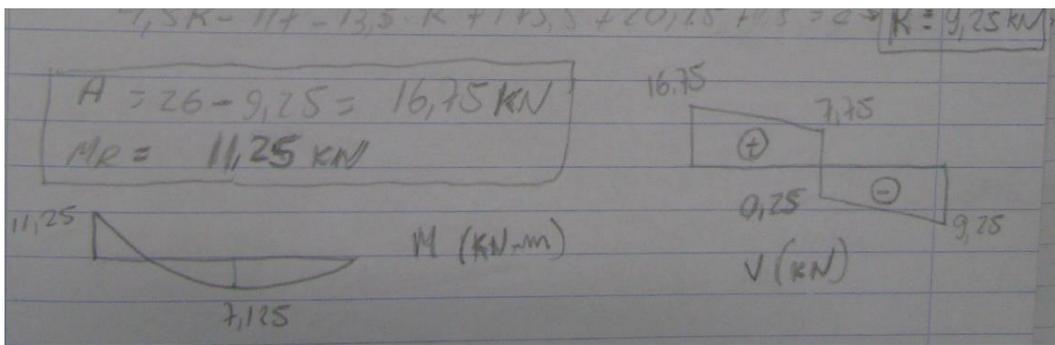
Resolução: $s =$ m

16. Determine as reações e os diagramas de momento fletor e esforço cortante para a estrutura a seguir. Adote, $q = 6 \text{ kN/m}$. $P = 8 \text{ kN}$, $L = 1,5 \text{ m}$. $EI = \text{cte}$.

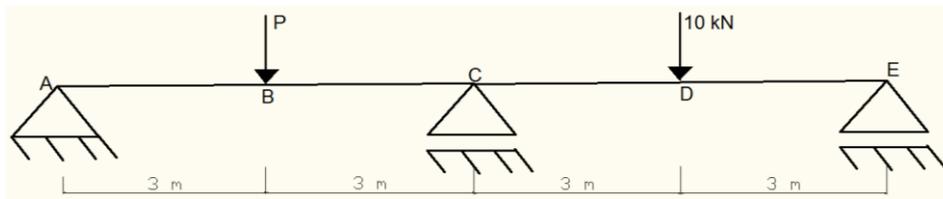


Resposta:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

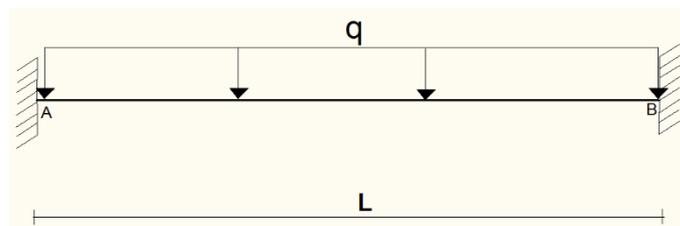


17. Para a estrutura a seguir, determine as reações, o diagrama de momento fletor, esboce o gráfico do deslocamento vertical e calcule esses deslocamentos nos pontos B e D. A estrutura possui uma seção transversal quadrada de lado 15 cm e $E = 200 \text{ GPa}$. Adote $P = 82,174 \text{ kN}$.



Resposta:

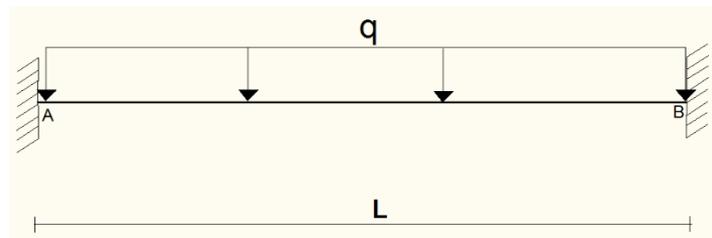
18. Determine o diagrama de momento fletor e o deslocamento vertical central da estrutura a seguir. Dados: $q = 1 \text{ kN/m}$. $L = 6 \text{ m}$. Indique todos os valores relevantes e esboce o diagrama na figura indicada na resolução.



Resposta:

19. Determine o diagrama de momento fletor e o deslocamento vertical central da estrutura a seguir. Dados: $q = 12 \text{ kN/m}$. $L = 12 \text{ m}$. $EI = \text{cte}$. Indique todos os valores relevantes e esboce o diagrama na figura indicada na resolução.

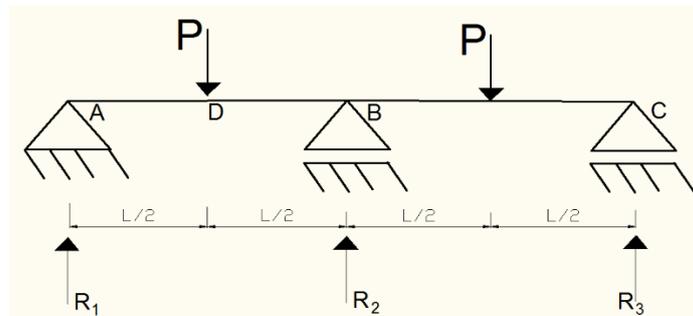
Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta:

20. Determinar para a viga hiperestática a seguir:

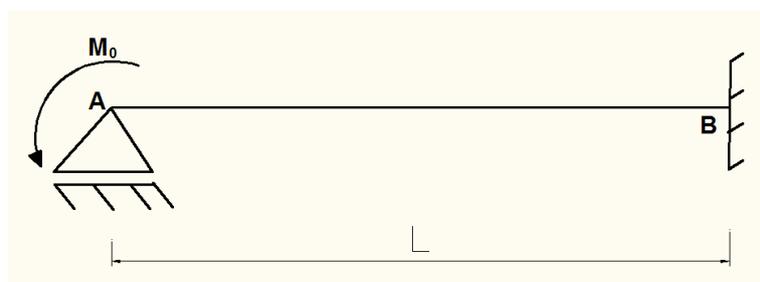
- a) reações de apoio;
- b) deslocamento vertical do ponto D. Adote $EI = \text{cte.}$



Resposta:

- a) $R_1 =$ $R_2 =$ $R_3 =$
- b) $W_D =$

21. Determinar as reações verticais em A e B e da reação de momento em B. Há uma ação de momento (M_0) aplicado em A, conforme indicado na figura. Considere $EI = \text{cte.}$

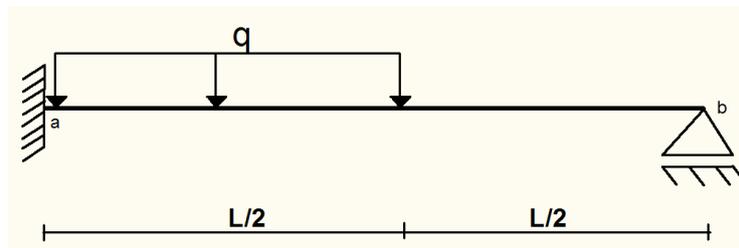


Resposta:

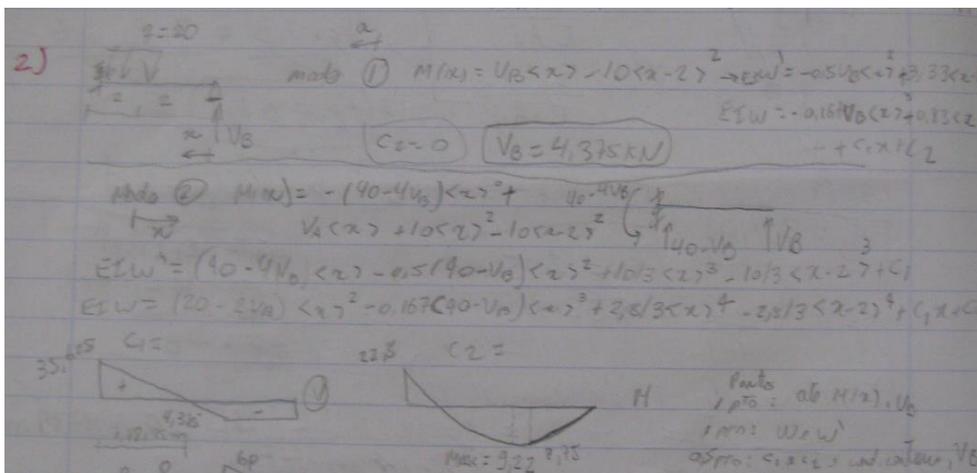
- $R_{ya} =$ $R_{yb} =$ $R_{Mb} =$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

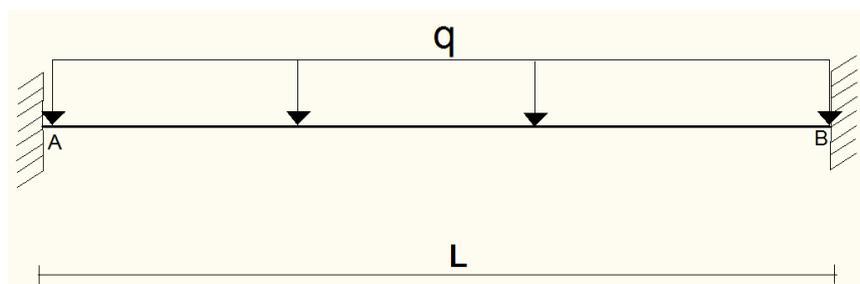
24. Determine as reações e os diagramas de momento fletor e esforço cortante para a estrutura a seguir. Adote, $q = 20 \text{ kN/m}$, $L = 4\text{m}$. $EI = \text{cte}$.



Resposta:

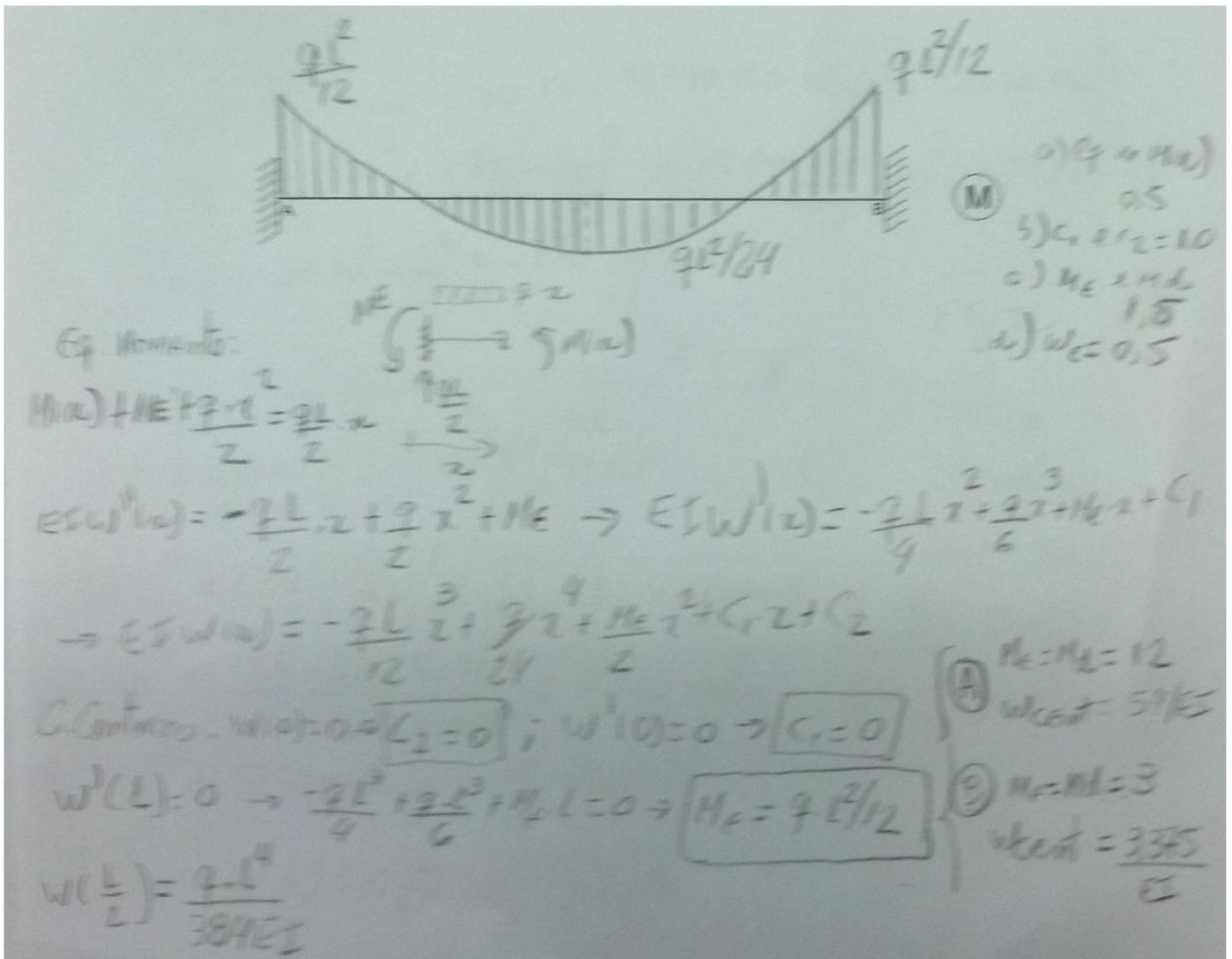


25. Determine o diagrama de momento fletor e o deslocamento vertical central da estrutura a seguir. Dados: $q = 1 \text{ kN/m}$. $L = 12\text{m}$. Indique todos os valores relevantes e esboce o diagrama na figura indicada na resolução.



Resposta:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



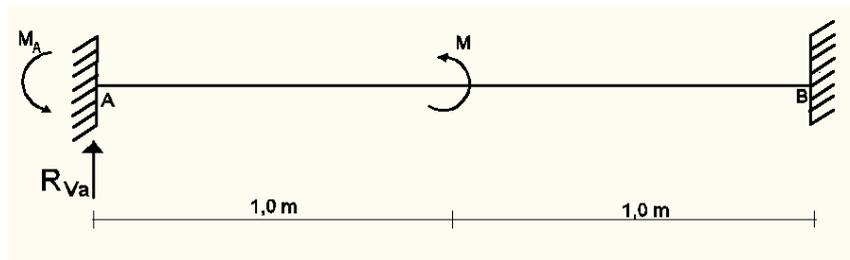
26. Determine as reações e seus sentidos R_A e M_A da viga abaixo sujeita a um deslocamento vertical para baixo em A de 1 unidade de comprimento. Adote o comprimento da viga de valor L e $EI = \text{constante}$.



Resolução: $R_A =$; $M_A =$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

27. Obter as reações de força vertical (R_{Va}) e de momento em A (M_A) em função do momento atuante M. Use os sentidos indicados na figura. Adote $EI = cte$.

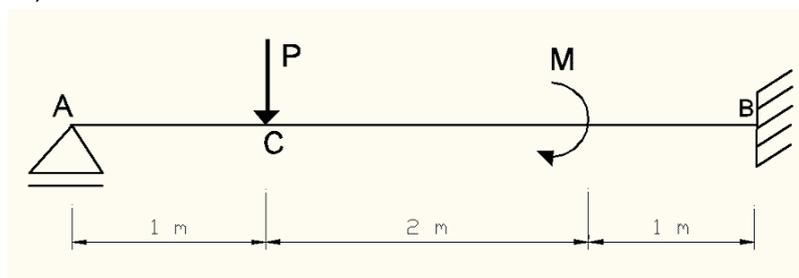


Respostas: $M_A =$

$R_{Va} =$

28. Para a viga:

- Determinar as quatro (4) reações da viga a seguir;
 - Obtenha o deslocamento vertical da seção C.
- Adote $P = 20 \text{ kN}$; $M = 30 \text{ kN.m}$ e $EI = cte$.



Respostas: $R_A =$

$R_{Vb} =$

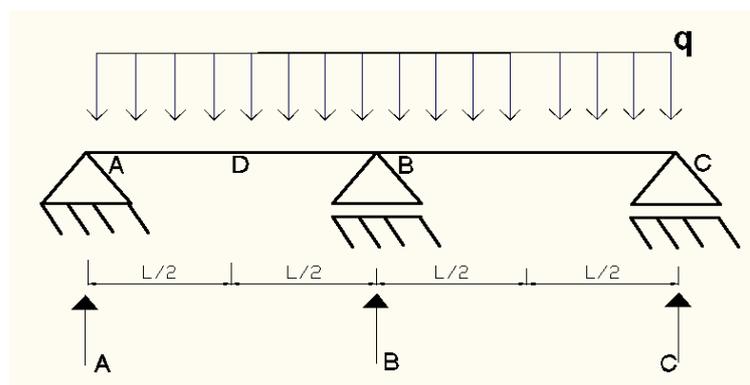
$M_b =$

$R_{hb} = 0$

29. Para a viga hiperestática abaixo, obter:

- As reações verticais A, B e C;
 - Sabendo-se que o máximo valor admissível para o deslocamento do ponto D seja de 1 cm em módulo, e que a seção transversal da viga é quadrada de lado " h ", obter o menor valor de " h ".
- Dados: $q = 8 \text{ kN/m}$; $L = 4 \text{ m}$; $E = 200 \text{ GPa}$.

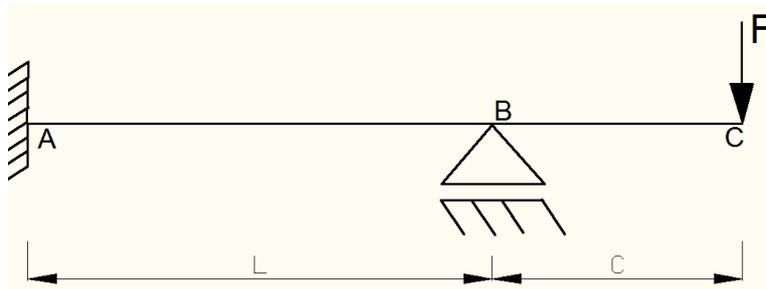
Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta: a) $A = \quad$ kN; $B = \quad$ kN; $C = \quad$ kN b) $h =$

30. Para a estrutura abaixo, sabendo que $F = 50$ kN, $L = 3$ m e $C = 2$ m, seção transversal quadrada de lado 12 cm e que o material seja o mesmo do exercício anterior. Calcule:

- Posição e valor do deslocamento máximo vertical da viga;
- Plote a curva deslocamento vertical da estrutura, indicando os pontos mais relevantes;



Respostas: a) $v_{\max}(x = \quad) = \quad$ (mm)

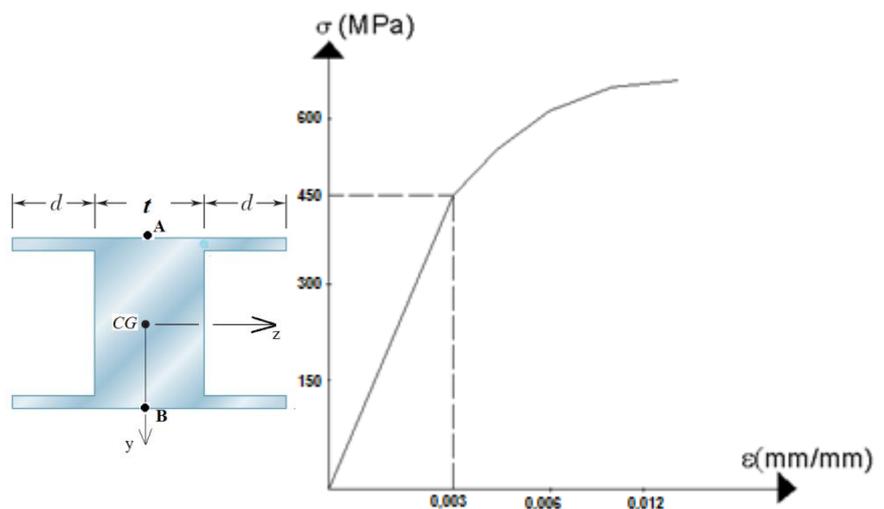
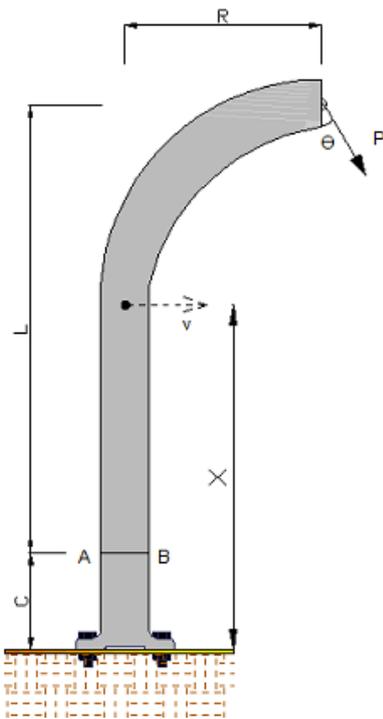


31. O poste é engastado no solo e tem uma força concentrada aplicada no ponto indicado na figura. Seu valor é devido ao peso dos cabos de energia elétrica de $P = 5$ kN, de modo a estar atuando no seu plano médio, inclinado com a vertical em um ângulo de $\theta = 30^\circ$. A seção transversal (ST) de todo o poste é indicada. A força P e as cotas das distâncias R e L estão com referência ao CG da

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

ST. Adote $C = 1,0\text{m}$, $R = 1,5\text{m}$, $L = 2,5\text{m}$, $e = 12\text{ mm}$, $d = 50\text{mm}$, $t = 100\text{mm}$, $h = 150\text{mm}$. O seu material possui a curva tensão-deformação conforme indicado abaixo. Obtenha:

- As tensões normais e cisalhantes extremas da ST na cota a C metros do engaste;
- Deslocamento horizontal (v) de um ponto a 2 m do engaste ($x = 2\text{m}$) que está no trecho retilíneo do poste.



Resposta: a) $\sigma_{tração} =$

$\sigma_{compressão} =$

$\tau_{máxima} =$

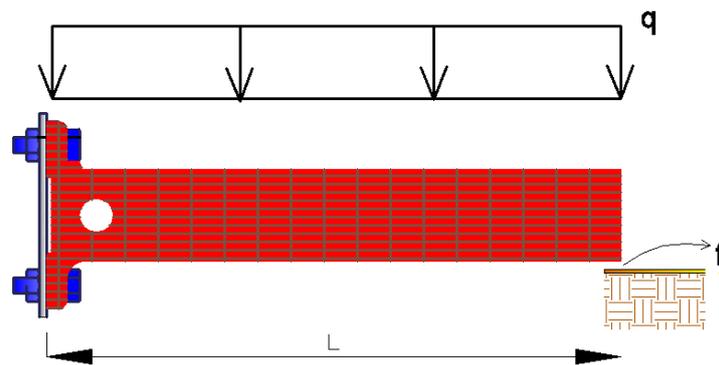
b) $v =$

32. Sabe-se a viga a seguir está engastada a esquerda e a direita existe um apoio infinitamente rígido que está a uma distância na vertical de " f " da viga. Atua-se um carregamento distribuído, conforme indicado. Obtenha:

- a reação do apoio a direita e o diagrama de momento fletor da viga, indicando pontos máximos e seus valores.
- Deslocamento vertical máximo e sua posição bem como o diagrama da linha elástica do deslocamento vertical da viga, indicando pontos relevantes.

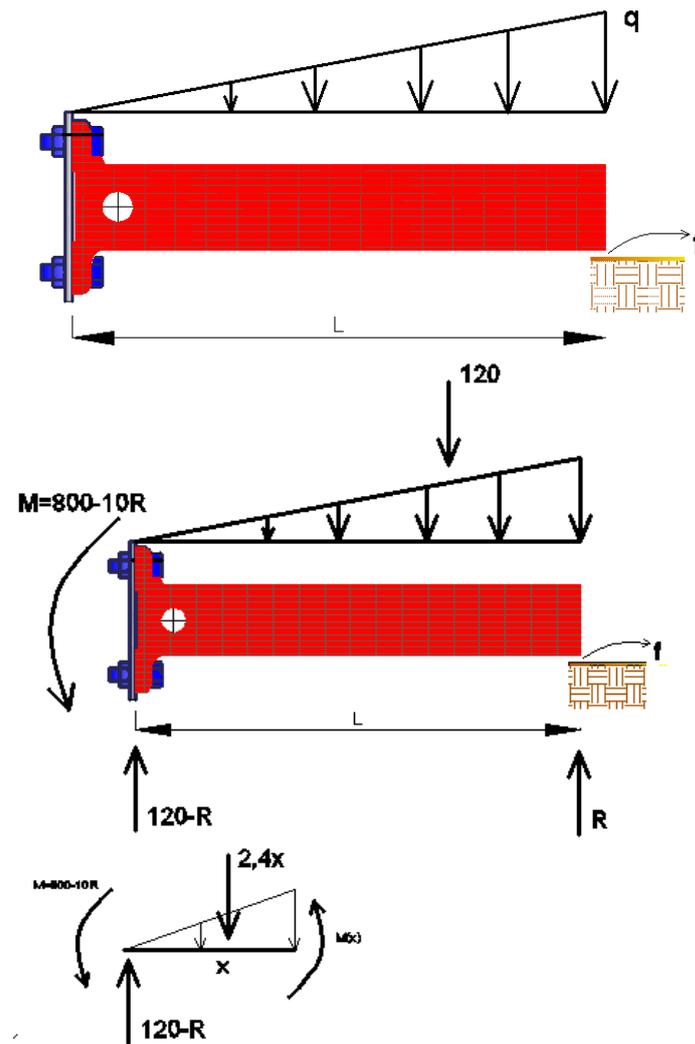
Adote: $EI = \text{cte} = 10^5\text{ kN.m}^2$; $q = 24\text{ kN/m}$; $L = 10\text{ m}$, $f = 10\text{ cm}$.

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Respostas:

33. Sabe-se a viga a seguir está engastada a esquerda e a direita existe um apoio infinitamente rígido que está a uma distância na vertical de "f" da viga. Atua-se um carregamento linearmente distribuído, conforme indicado. Obtenha a reação do apoio a direita e o diagrama de momento fletor da viga. Adote: $EI = \text{cte} = 10^5 \text{ kN.m}^2$; $q = 24 \text{ kN/m}$; $L = 10 \text{ m}$, $f = 0,1 \text{ m}$.



Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$M(x) = -0,4x^3 - (800 - 10R) - (R - 120)x;$$

$$v''(x).EI = -M(x) = 0,4x^3 + (800 - 10R) + (R - 120)x$$

$$v'(x).EI = 0,1x^4 + (800 - 10R)x + (R - 120)\frac{x}{2} + C_1$$

$$v(x).EI = 0,02x^5 + (800 - 10R)\frac{x^2}{2} + (R - 120)\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Condições de contorno: $v'(0).EI = 0 = C_1$; $v(0).EI = 0 = C_2$

Se $f = 0,0$:

$$v(x = 10).EI = 0,02(10)^5 + (800 - 10R)\frac{(10)^2}{2} + (R - 120)\frac{(10)^3}{6} = 0$$

$$R = 66 \text{ kN}$$

$$M(x) = 54x - 0,4x^3 - 140$$

$$M(0) = -140 \text{ kNm}$$

$$M'(x) = 54 - 1,2x^2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{54}{1,2}} = 45 = 6,71m$$

$$M(x = 6,71) = 54x - 0,4x^3 - 140 = 101,5 \text{ kNm}$$

Se $f = 0,1 \text{ m}$

$$v(x = 10).EI = 0,02(10)^5 + (800 - 10R)\frac{(10)^2}{2} + (R - 120)\frac{(10)^3}{6} = 0,1$$

$$R = 36 \text{ kN}$$

$$M(x) = -0,4x^3 - 440 + 84x$$

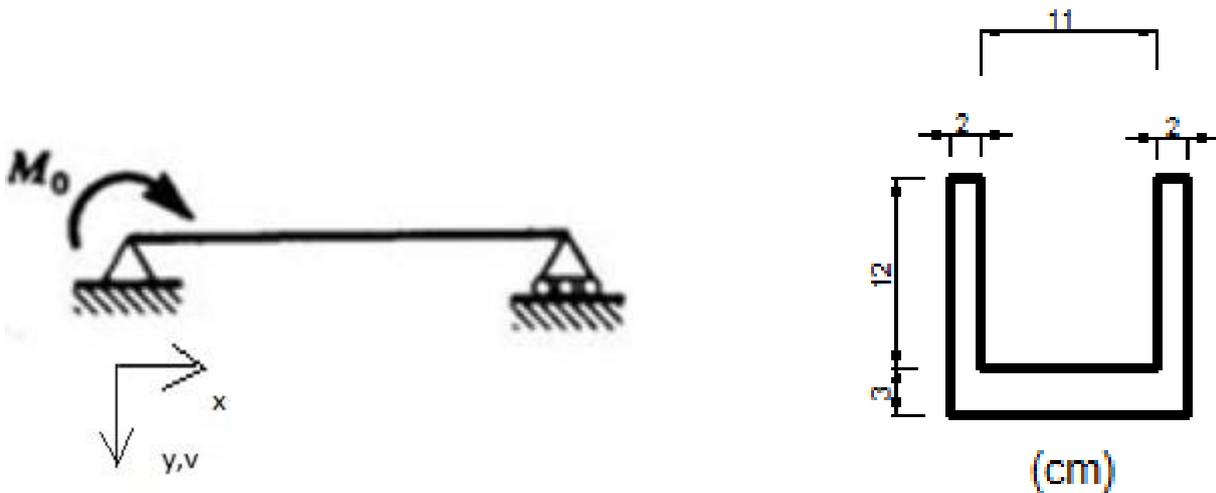
$$M'(x) = 84 - 1,2x^2 = 0 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{84}{1,2}} = 70 = 8,37m$$

$$M(x = 8,37) = 84x - 0,4x^3 - 440 = 28,81 \text{ kNm}$$

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

34. Para a viga a seguir, obtenha:

- Diagrama de momento fletor e esforço cortante em termos de seu comprimento L e do momento aplicado M_0 ;
- Considere a seção transversal a seguir para essa viga, **determine o maior valor de M_0 admissível**. Considere nesse item que $L = 4$ m, e tensões normais admissíveis de 150 MPa e 300 MPa, respectivamente, para tração e compressão, e tensão cisalhante admissível de 6 MPa;
- Obtenha o valor máximo do deslocamento vertical e sua posição em termos de L , M_0 e $EI = \text{cte}$.



Resposta: a) $M(x) = M_0 - (M_0/L) \cdot x$; $V(x) = - (M_0/L)$

$$M_0 = 49,5 \text{ kN.m}; \text{ c) } v(x) = \frac{M_0 \cdot x}{6EI} [2 \cdot L^2 - 3 \cdot L \cdot x + x^2]$$

Calcular a extremo de $v(x)$, derivando e igualando a zero: $v'(x) \cdot EI = \frac{M_0}{6} [2 \cdot L^2 - 6 \cdot L \cdot x + 3 \cdot x^2] = 0$

Obtendo as raízes do polinômio: $x_1 = L \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$ e $x_2 = L \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$; De modo que o valor possível é: x_1

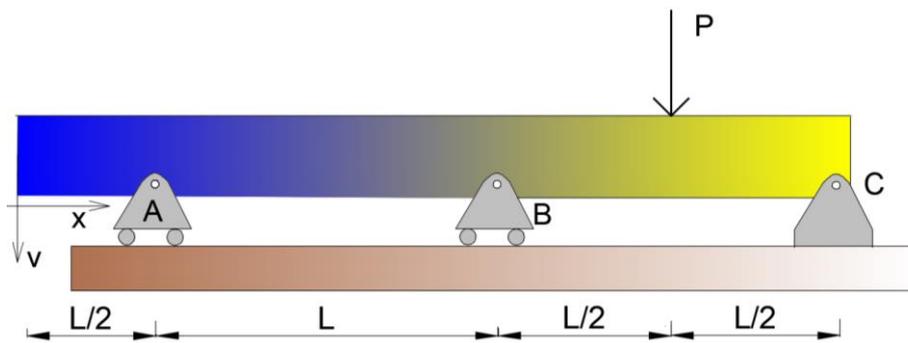
$$= L \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right]. \text{ Assim, o deslocamento máximo é: } v(x) = \frac{M_0 \cdot L^2}{9 \cdot \sqrt{3} \cdot EI}$$

35. Para viga a seguir, calcule:

- As reações verticais nos apoios A, B, C e indique os diagramas de esforço cortante e momento fletor;
- Obtenha os valores extremos dos deslocamentos verticais (v) e suas posições. Plote a curva do deslocamento vertical de todos os trechos, indicando valores extremos e posições.

Considere para os itens a) e b), os dados: $EI = \text{cte}$, $L = 4$ m. Obtenha os valores em termos de P e EI .

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta:

$$a) M(x) = A \langle x - 2 \rangle + B \langle x - 6 \rangle - P \langle x - 8 \rangle$$

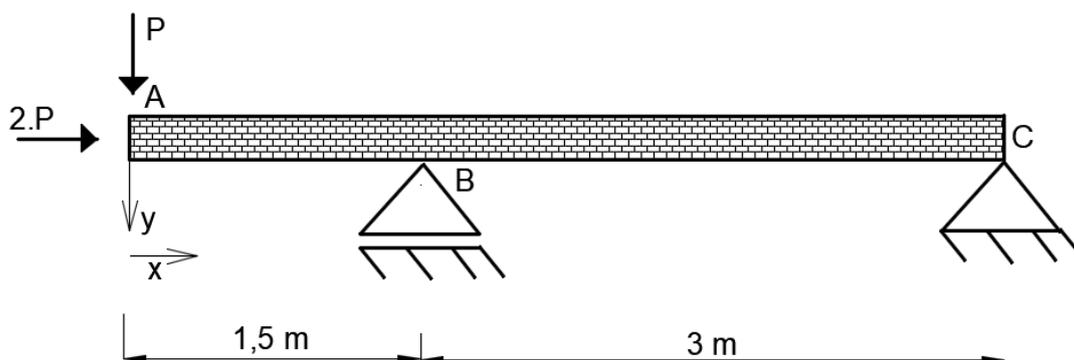
Resolvendo ...

$$A = \frac{-3}{32}P \quad B = \frac{11}{16}P \quad C = \frac{13}{32}P \quad C_1 = \frac{-1}{4}P \quad C_2 = \frac{1}{2}P$$

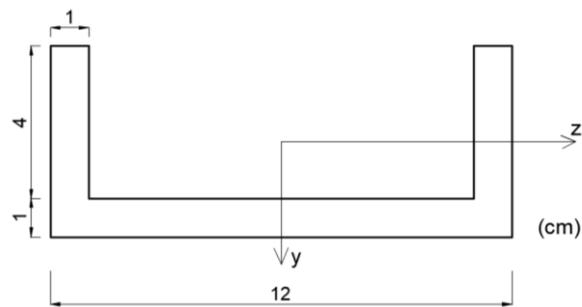
$$b) v(x).EI = \frac{1}{64}P \langle x - 2 \rangle^3 - \frac{11}{96}P \langle x - 6 \rangle^3 + \frac{1}{6}P \langle x - 8 \rangle^3 - \frac{1}{4}P.x + \frac{1}{2}P$$

$$v(x=0) = \frac{1}{2EI}P \quad v(x=4,31m) = \frac{-0,3849}{EI}P \quad v(x=8,08m) = \frac{0,9606}{EI}P$$

36. Para a barra AC, sabendo que $E = 200 \text{ GPa}$, $(\sigma_{adm})_t = 250 \text{ MPa}$, $(\sigma_{adm})_c = 150 \text{ MPa}$, $\tau_{adm} = 5 \text{ MPa}$. O máximo deslocamento vertical (v) da seção A deve ser de 10 cm para baixo. Considere a seção transversal indicada na figura, em cm. Considere a força axial atuando no CG da seção. Determine o máximo valor de P devido ao limite de deslocamento máximo vertical em A.

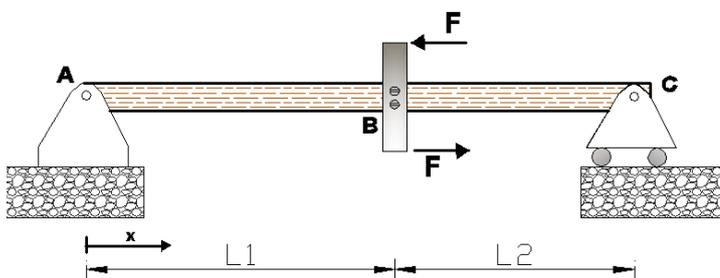


Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

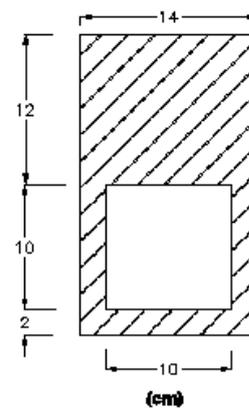


37. Para a viga da figura, com a seção transversal e seu material com o diagrama tensão-deformação indicado. Sabe-se que o binário de forças atua na barra rígida em B, que tem comprimento de 500 mm, com $F = 400 \text{ kN}$, $L1 = 3 \text{ m}$, $L2 = 1 \text{ m}$. Determinar:

- Diagramas de esforços;
- As tensões normais máximas de tração e compressão e o valor da tensão cisalhante máxima;
- Explicitar a equação de sua linha elástica;
- Obter a posição e o valor do deslocamento vertical máximo da viga.

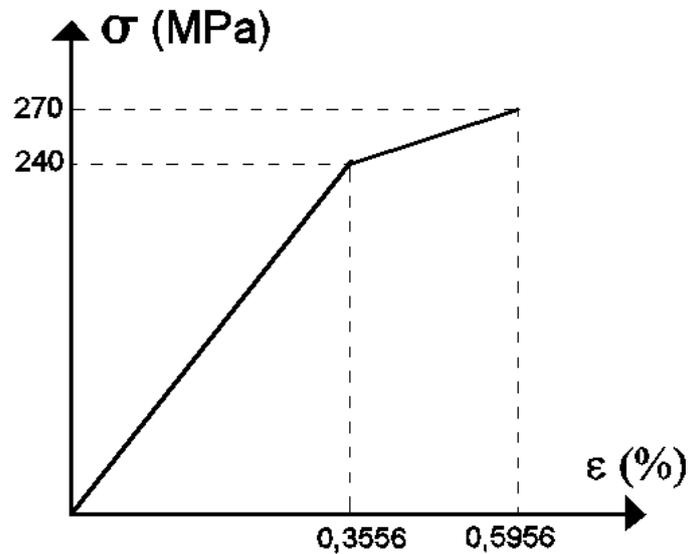


a) Viga sob ação de binário.



b) Seção transversal da viga.

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

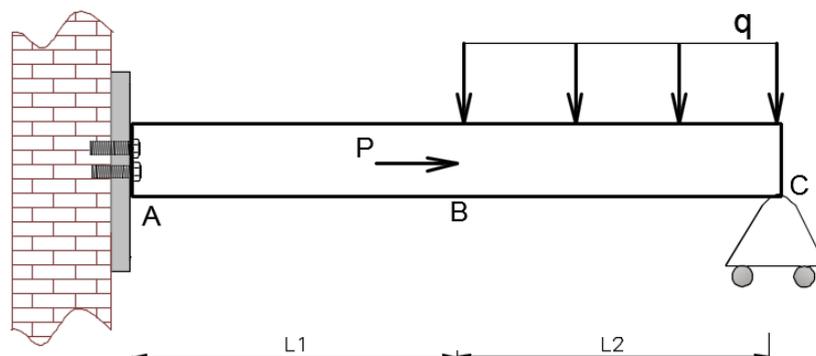


c) Diagrama tensão-deformação do material da viga.

Respostas:

38. Para a viga a seguir, a qual está engastada em A e com apoio móvel em C, sabendo que $L_1 = L_2 = 1$ m, $q = 10$ kN/m, $P = 20$ kN, seção transversal quadrada de lado 15 cm e módulo de elasticidade longitudinal igual a 100 GPa, obtenha:

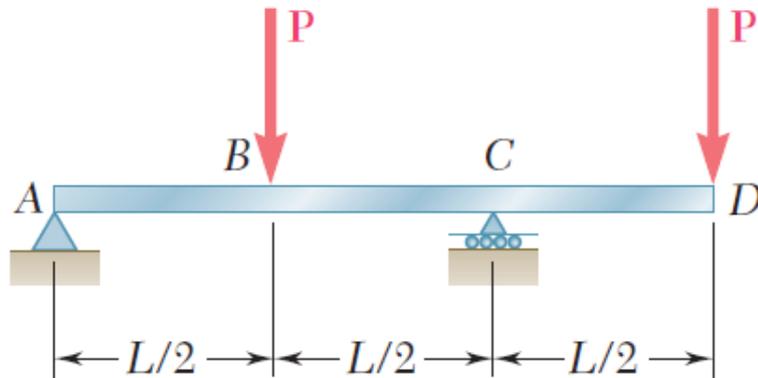
- Diagramas de esforços, sabendo que P atua no centroide da seção em B;
- A distribuição de tensões normais e a posição da LN na seção de maior momento;
- A distribuição de tensões cisalhante na seção de maior cortante;
- Explicitar a equação de sua linha elástica;
- Obter a posição e o valor do deslocamento vertical máximo da viga.



Respostas:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

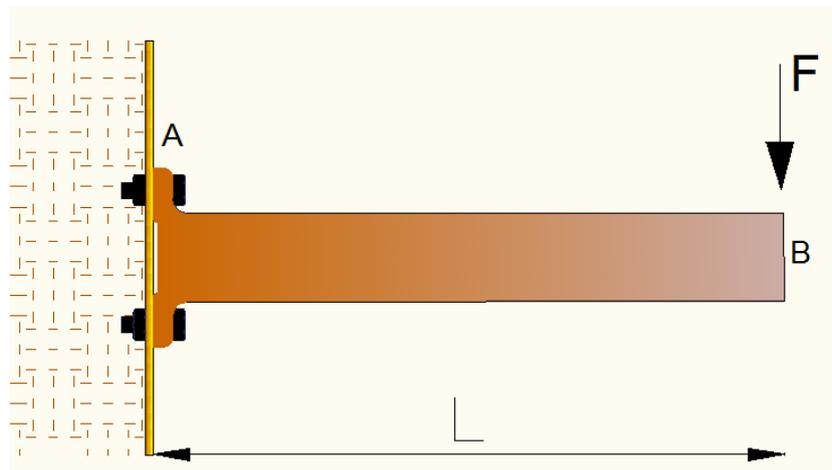
39. Para a viga a seguir, determine a rotação na seção em A, o deslocamento vertical da seção em D e o deslocamento vertical máximo e sua posição, tudo em função de P , L e EI .



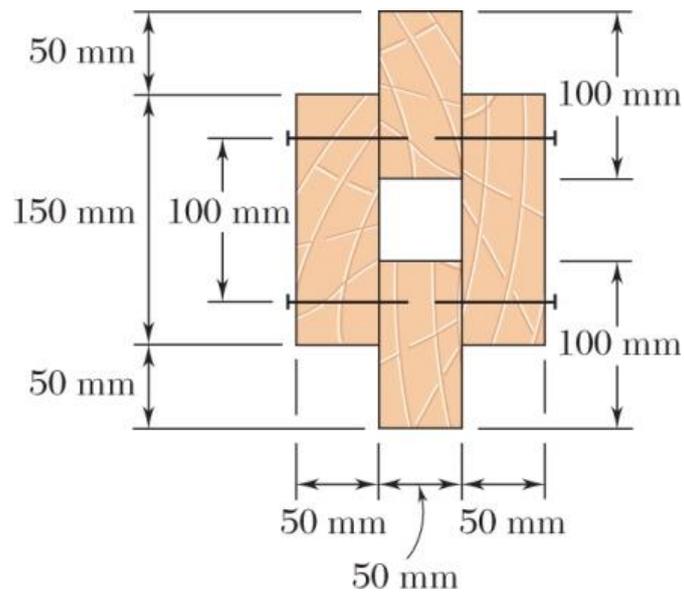
Respostas:

40. Para a viga de madeira do tipo Ipê-roxo que está em balanço, ver figura, admita que $E = 70$ GPa, $F = 50$ kN, $L = 3$ m e que a seção transversal seja a indicada na figura, determine:

- Tensão normal máxima de tração;
- Tensão cisalhante na linha do seu CG de uma seção junto ao engaste;
- Deslocamento vertical e rotação da seção em B.



Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta:

a) $\sigma_{\text{tração}} =$

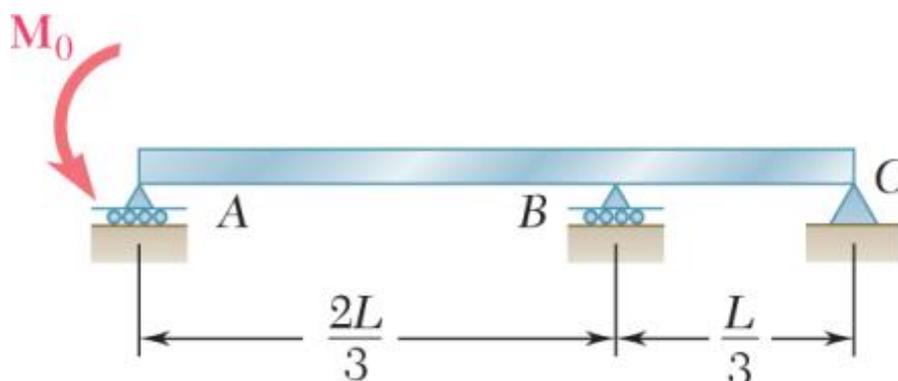
b) $\tau_{CG} =$

c) $v_B =$

$\theta_B =$

41. Para a viga abaixo, sabendo que seu material é homogêneo de módulo de elasticidade longitudinal constante (E) e seção transversal constante com momento de inércia de valor I . Na seção em A, junto ao apoio, age um momento de valor M_0 . Nessas condições, calcule:

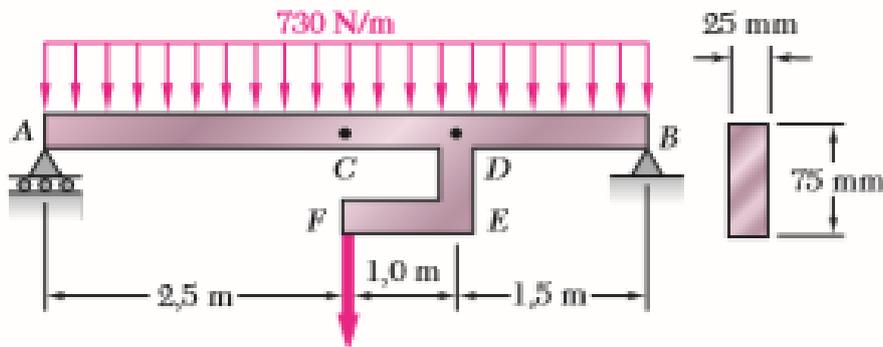
- As reações de apoio;
- Diagrama de momento fletor em toda a viga.



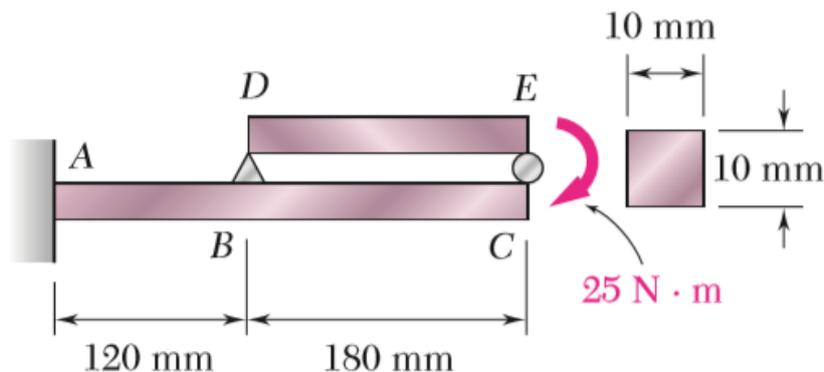
Respostas:

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

42. (Beer, J.) A barra rígida DEF é soldada no ponto D à viga de aço uniforme AB. Para o carregamento mostrado na figura, determine (a) a equação da linha elástica da viga e (b) a deflexão no ponto médio C da viga. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

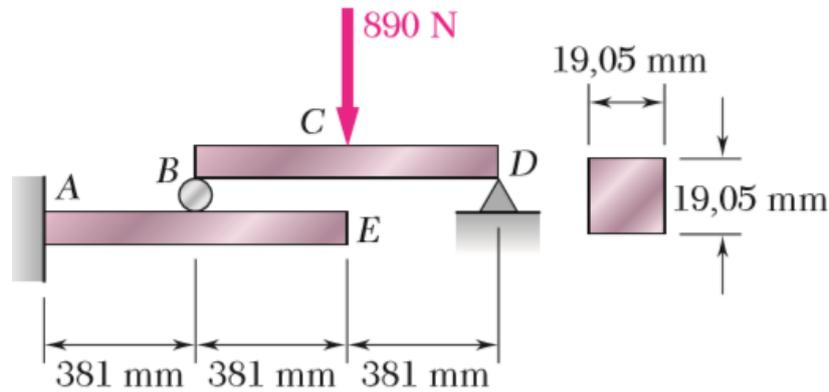


43. (Beer, J.) A viga DE está apoiada sobre a viga em balanço AC, conforme mostra a figura. Sabendo que é utilizada uma barra quadrada com 10 mm de lado para cada viga, determine a deflexão na extremidade C se lhe for aplicado um momento de $25 \text{ N} \cdot \text{m}$ (a) à extremidade E da viga DE, (b) à extremidade C da viga AC. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

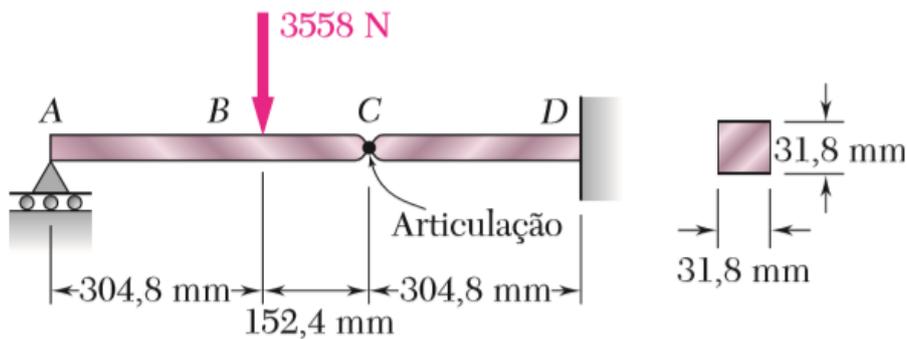


44. (Beer, J.) A viga BD está apoiada sobre a viga em balanço AE, como mostra a figura. Sabendo que é utilizada uma barra quadrada com 19,05 mm de lado para cada viga, determine para o carregamento mostrado (a) a deflexão no ponto C e (b) a deflexão no ponto E. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

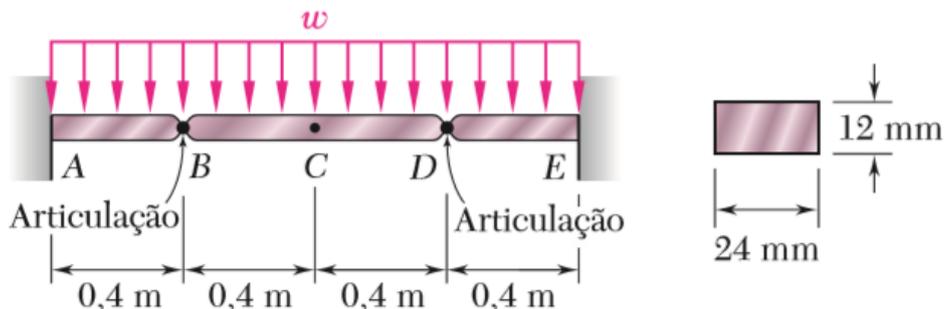
Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



45. (Beer, J.) As duas vigas mostradas têm a mesma seção transversal e estão unidas por uma articulação em C. Para o carregamento mostrado na figura, determine (a) a inclinação no ponto A e (b) a deflexão no ponto B. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

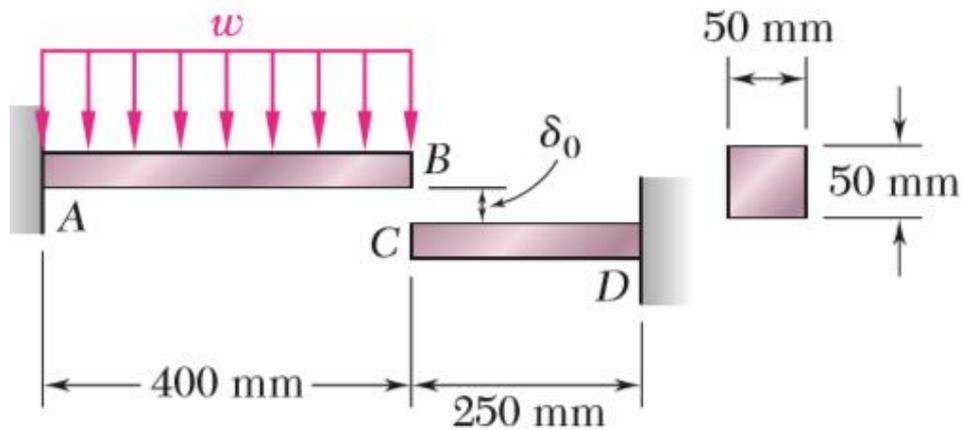


46. (Beer, J.) Uma viga central BD é presa por articulações a duas vigas em balanço AB e DE. Todas as vigas têm a seção transversal mostrada. Para o carregamento mostrado na figura, determine o maior valor de w de maneira que a deflexão em C não exceda 3 mm. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

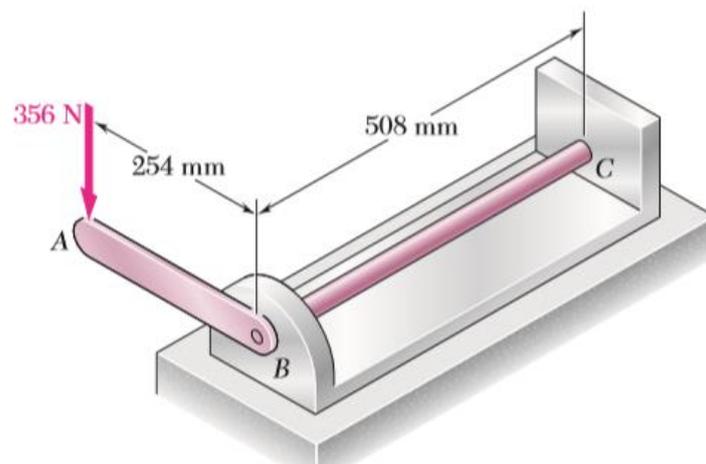


47. (Beer, J.) Antes de ser aplicada a força uniformemente distribuída w , existe uma folga $\delta_0 = 1,2 \text{ mm}$ entre as extremidades das vigas em balanço AB e CD. Sabendo que $E = 105 \text{ GPa}$ e $w = 30 \text{ kN/m}$, determine (a) a reação em A e (b) a reação em D.

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

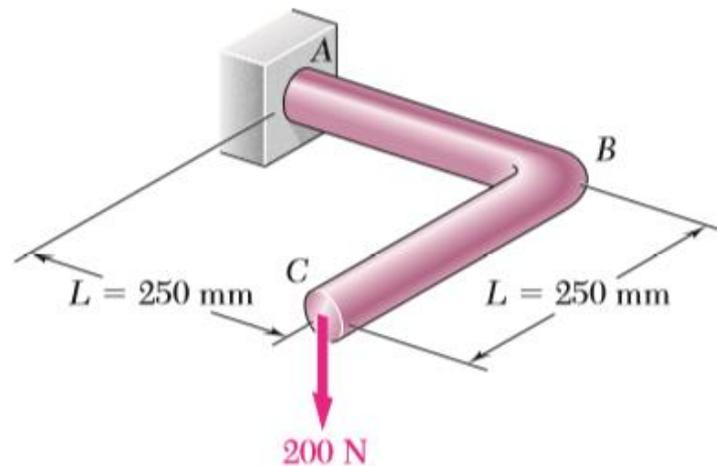


48. (Beer, J.) Uma barra BC de 22,2 mm de diâmetro é presa à alavanca AB e ao suporte fixo em C. A alavanca AB tem uma seção transversal uniforme com 9,5 mm de espessura e 25,4 mm de altura. Para o carregamento mostrado na figura, determine a deflexão no ponto A. Use $E = 200$ GPa e $G = 77,2$ MPa.



49. (Beer, J.) Uma barra de 16 mm de diâmetro foi moldada assumindo a forma mostrada. Determine a deflexão da extremidade C após lhe ser aplicada uma carga de 200 N. Use $E = 200$ GPa e $G = 80$ GPa.

Exercícios de linha elástica - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



50. (Beer, J.) Para a viga em balanço e o carregamento mostrados na figura, determine (a) a inclinação e (b) a deflexão no ponto B. Use $E = 200 \text{ GPa}$.

