9.4 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $y' + x^2 y = y^2$ não é linear, uma vez que não pode ser colocado forma linear padrão (1).

2. $x^2 y' - y + x = 0 \Rightarrow y' - \frac{1}{x^2} y = -\frac{1}{x}$, que é a forma padrão linear (1) e portanto esta equação diferencial é linear.

3. $xy' = x - y \Rightarrow xy' + y = x \Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = 1$, que é a forma padrão linear (1) e portanto esta equação diferencial é linear.

4. $yy' = \operatorname{sen} x$ não é linear uma vez que não pode ser colocado na forma linear padrão (1).

5. $I(x) = e^{\int -3\,dx} = e^{-3x}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos

$$e^{-3x} y' - 3e^{-3x} y = e^{-2x} \Rightarrow (e^{-3x} y)' = e^{-2x} \Rightarrow$$
$$y = e^{3x}\left[\int (e^{-2x})\,dx + C\right] = Ce^{3x} - \tfrac{1}{2}e^{x}.$$

6. $I(x) = e^{\int 4\,dx} = e^{4x}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos $e^{4x} y' + 4e^{4x} y = xe^{4x} \Rightarrow$ $(e^{4x} y)' = xe^{4x}$, logo

$$y = e^{-4x}\left(\int e^{4x} x\,dx + C\right)$$
$$= e^{-4x}\left(\tfrac{1}{4}xe^{4x} - \tfrac{1}{16}e^{4x} + C\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{16} + Ce^{-4x}$$

7. $I(x) = e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos

$$e^{-x^2}(y' - 2xy) = xe^{-x^2} \Rightarrow \left(e^{-x^2} y\right)' = xe^{-x^2} \Rightarrow$$
$$y = e^{x^2}\left(\int xe^{-x^2}\,dx + C\right) = Ce^{x^2} - \tfrac{1}{2}.$$

8. $y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x} e^{x^2}$ $(x \neq 0)$, logo

$I(x) = e^{\int 2x^{-1}\,dx} = e^{\ln x^2} = x^2$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos $x^2 y' + 2xy = xe^{x^2} \Rightarrow$

$$(x^2 y)' = xe^{x^2} \Rightarrow$$
$$y = x^{-2}\left[\int \left(xe^{x^2}\right) dx + C_1\right] = x^{-2}\left[\left(\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right) + C_1\right]$$
$$= \frac{e^{x^2} + C}{2x^2}$$

9. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} = 2 \operatorname{sen} x$, logo

$I(x) = e^{\int -\operatorname{tg} x\,dx} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$ (uma vez que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$). Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos $(y' - y \operatorname{tg} x)\cos x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\cos x \Rightarrow$

$$(y \cos x)' = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow$$
$$y \cos x = \int \operatorname{sen} 2x\,dx + C = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + C$$
$$= \tfrac{1}{2} - \cos^2 x + C \Rightarrow$$
$$y = \frac{\sec x}{2} - \cos x + C \sec x.$$

10. $y' + \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) y = \dfrac{e^{-x}}{x}$, logo $I(x) = e^{\int (1+1/x)\,dx} = xe^{x}$.

Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos

$$xe^{x} y' + (xe^{x} + e^{x})y = 1 \Rightarrow (xe^{x} y)' = 1 \Rightarrow$$
$$xe^{x} y = \int 1\,dx \Rightarrow xe^{x} y = x + C \Rightarrow$$
$$y = e^{-x}(1 + C/x).$$

11. $I(\theta) = e^{\int -\operatorname{tg}\theta\,d\theta} = e^{-\ln(\sec\theta)} = \cos\theta$.

Multiplicando a equação diferencial por $I(\theta)$ temos

$$\cos\theta\,(dy/d\theta) - y \operatorname{sen}\theta = \cos\theta \Rightarrow (y\cos\theta)' = \cos\theta$$
$$\Rightarrow y\cos\theta = \int \cos\theta\,d\theta \Rightarrow y\cos\theta = \operatorname{sen}\theta + C \Rightarrow$$
$$y = \operatorname{tg}\theta + C\sec\theta.$$

12. $I(x) = e^{\int dx} = e^{x}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos $e^{x} y' + e^{x} y = e^{x}(x + e^{x}) \Rightarrow$ $(e^{x} y)' = e^{x}(x + e^{x})$. Portanto

$$y = e^{-x}\left[\int e^{x}(x + e^{x})\,dx + C\right]$$
$$= e^{-x}\left[xe^{x} - e^{x} + \frac{e^{2x}}{2} + C\right]$$
$$= x - 1 + \frac{e^{x}}{2} + \frac{C}{e^{x}}$$

Mas $0 = y(0) = -1 + \frac{1}{2} + C$, logo $C = \frac{1}{2}$, e a solução para o problema do valor inicial é $y = x - 1 + \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = x - 1 + \cosh x$.

13. $y' - 3y/x = x$, $x > 0$, logo $I(x) = e^{\int -(3/x)\,dx} = x^{-3}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos

$$x^{-3} y' - 3x^{-4} y = x^{-2} \Rightarrow (x^{-3} y)' = x^{-2} \Rightarrow$$

$y = x^{3}\left[\int x^{-2}\,dx + C\right] = -x^{2} + Cx^{3}$. Mas $0 = y(1) = -1 + C$ logo $C = 1$ e a solução para o problema do valor inicial é $y = -x^{2} + x^{3}$.

14. $I(x) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$. Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos
$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 2x \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-x^2}y\right)' = 2x \quad \Rightarrow$
$y = e^{x^2}\left[\int 2x\,dx + C\right] = x^2e^{x^2} + Ce^{x^2}$. Mas
$3 = y(0) = C$, e a solução para o problema do valor inicial é
$y = \left(x^2 + 3\right)e^{x^2}$.

15. $y' + \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)y = \dfrac{3\sqrt{x}}{1+x^2}$, logo
$I(x) = e^{\int [2x/(1+x^2)]dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$.
Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos
$\left(1+x^2\right)y' + 2xy = 3\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\left(1+x^2\right)y\right)' = 3\sqrt{x}$
$\Rightarrow \quad y = \left(1+x^2\right)^{-1}\left(\int 3\sqrt{x}\,dx + C\right) = \dfrac{2x^{3/2} + C}{1+x^2}$. Mas
$2 = y(0) = C$, logo a solução para o problema do valor inicial é $y = \dfrac{2x^{3/2} + 2}{1+x^2}$.

16. $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{x^2}$ $(x \neq 0)$, logo $I(x) = e^{\int (2/x)\,dx} = x^2$.
Multiplicando a equação diferencial por $I(x)$ temos
$x^2y' + 2xy = \cos x \quad \Rightarrow \quad \left(x^2y\right)' = \cos x \quad \Rightarrow$
$y = x^{-2}\left[\int \cos x\,dx + C\right] = x^{-2}(\text{sen } x + C), x \neq 0$.
Mas $0 = y(\pi) = C$, logo a solução para o problema do valor inicial é $y = (\text{sen } x)/x^2$.