9

Equações Diferenciais

9.4 Modelos para Crescimento Populacional

Modelos para o Crescimento Populacional

Nesta seção investigaremos equações diferenciais que são usadas para modelar o crescimento populacional: a lei do crescimento natural, a equação logística e muitas outras.

A Lei de Crescimento Natural

A Lei de Crescimento Natural

Em geral, se $P(t)$ for o valor de uma quantidade y no tempo t, e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $P(t)$ em qualquer tempo, então

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

onde k é uma constante. A Equação 1 é algumas vezes chamada **lei do crescimento natural**. Se k for positivo, então a população aumenta; se k for negativo, ela diminui.

A Lei de Crescimento Natural

Como a Equação 1 é uma equação diferencial separável, podemos resolvê-la pelo método a seguir:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt + C} = e^{C}e^{kt}$$

$$P = Ae^{kt}$$

onde A ($= \pm e^{C}$ ou 0) é uma constante arbitrária.

A Lei de Crescimento Natural

Para percebermos o significado da constante *A*, observamos que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Portanto, *A* é o valor inicial da função.

$\boxed{2}$ A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

é

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

A Lei de Crescimento Natural

Outra maneira de escrever a Equação 1 é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que diz que a **taxa de crescimento relativa** (a taxa de crescimento dividida pelo tamanho da população) é constante. Então, $\boxed{2}$ diz que a população com uma taxa de crescimento relativo constante deve crescer exponencialmente.

A Lei de Crescimento Natural

Podemos levar em conta a emigração (ou a remoção) de uma população modificando a Equação 1: se a taxa de emigração for uma constante *m*, então a taxa de mudança da população é modelada pela equação diferencial

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

O Modelo Logístico

O Modelo Logístico

Como estudamos anteriormente, uma população com frequência cresce exponencialmente em seus estágios iniciais, mas em dado momento se estabiliza e se aproxima de sua capacidade de suporte por causa dos recursos limitados. Se *P*(*t*) for o tamanho da população no instante *t*, assumimos que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{se } P \text{ for pequeno}$$

Isso diz que a taxa de crescimento inicialmente está próxima de ser proporcional ao tamanho.

O Modelo Logístico

Em outras palavras, a taxa de crescimento relativo é praticamente constante quando a população é pequena. Mas também queremos refletir o fato de que a taxa de crescimento relativo diminui quando a população *P* aumenta e torna-se negativa quando *P* ultrapassa sua **capacidade de suporte** *M*, a população máxima que um ambiente é capaz de sustentar a longo prazo. A expressão mais simples para a taxa de crescimento relativo que incorpora essas hipóteses é

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

O Modelo Logístico

Multiplicando por *P*, obtemos o modelo para o crescimento populacional conhecido como a equação diferencial logística:

4

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)}$$

Exemplo 1

Desenhe um campo de direções para a equação logística com k = 0,08 e capacidade de suporte K = 1 000. O que você pode deduzir sobre as soluções?

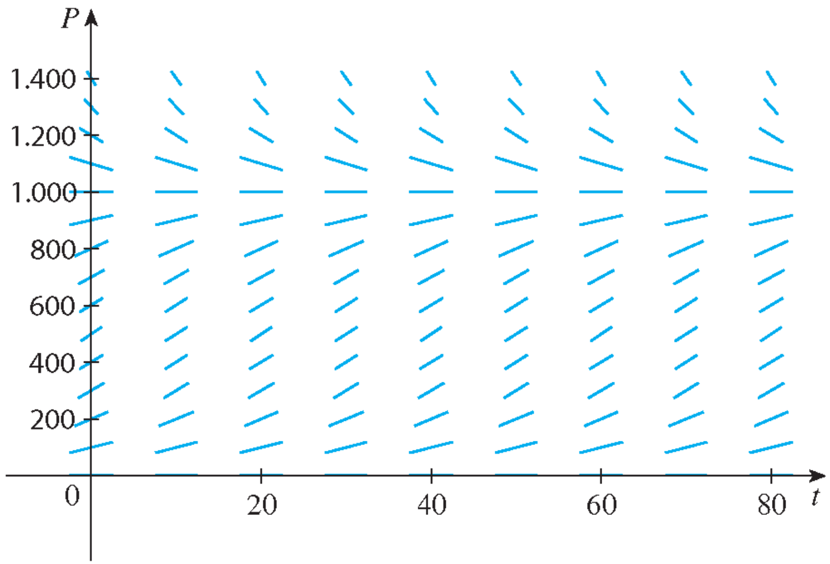
SOLUÇÃO: Nesse caso a equação diferencial logística é

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1\,000}\right)$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Um campo de direções para essa equação é mostrado na Figura 1.



Campo de direções para a equação logística no Exemplo 1

Figura 1

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Mostramos apenas o primeiro quadrante porque as populações negativas não têm significado e estamos interessados apenas no que acontece depois de $t = 0$.

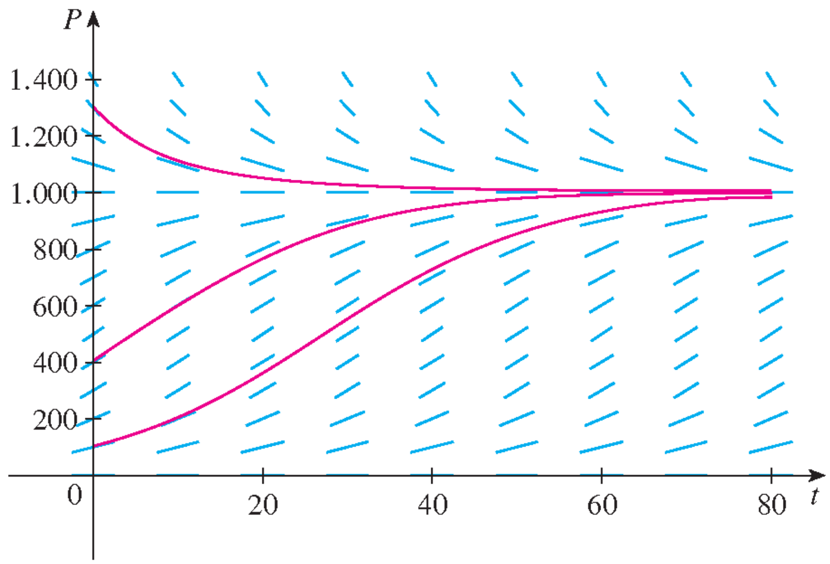
A equação logística é autônoma (dP/dt depende apenas de P, não de t); assim, as inclinações são as mesmas ao longo de qualquer reta horizontal. Como esperado, as inclinações são positivas para $0 < P < 1.000$ e negativas para $P > 1.000$.

As inclinações são pequenas quando P está próximo de 0 ou 1.000 (a capacidade de suporte). Observe que as soluções se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = 1.000$.

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Na Figura 2 usamos o campo de direções para esboçar as curvas solução com populações iniciais $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ e $P(0) = 1.300$.



Curvas solução para a equação logística no Exemplo 1

Figura 2

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Observe que as curvas solução abaixo de P = 1.000 estão aumentando, e aquelas que começam acima de P = 1.000 estão diminuindo. As inclinações são maiores quando $P \approx 500$, portanto as curvas solução que começam abaixo de P = 1.000 têm pontos de inflexão quando $P \approx 500$. De fato, podemos demonstrar que todas as curvas solução que começam abaixo de P = 500 têm um ponto de inflexão quando P é exatamente 500.

O Modelo Logístico

A equação logística $\boxed{4}$ é separável e podemos resolvê-la explicitamente. Uma vez que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

temos

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k\, dt$$

O Modelo Logístico

Para calcularmos a integral no lado esquerdo, escrevemos

$$\frac{1}{P(1 - P/M)} = \frac{M}{P(M - P)}$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}$$

O Modelo Logístico

Isso nos permite reescrever a Equação 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M - P} \right) dP = \int k\, dt$$

$$\ln |P| - \ln |M - P| = kt + C$$

$$\ln \left| \frac{M - P}{P} \right| = -kt - C$$

$$\left| \frac{M - P}{P} \right| = e^{-kt-C} = e^{-C} e^{-kt}$$

$$\boxed{6} \qquad \frac{M - P}{P} = Ae^{-kt}$$

onde $A = \pm e^{-C}$.

O Modelo Logístico

Isolando *P* na Equação 6, obtemos

$$\frac{M}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

então

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}}$$

Encontramos o valor de *A* colocando $t = 0$ na Equação 6. Se $t = 0$, então $P = P_0$ (a população inicial); portanto

$$\frac{M - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

O Modelo Logístico

Então, a solução para a equação logística é

$$\boxed{7} \qquad \boxed{P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}}$$

Usando a expressão para $P(t)$ na Equação 7, vemos que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = M$$

que é o esperado.

Exemplo 2

Escreva a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1.000}\right) \qquad P(0) = 100$$

e use-a para encontrar a população $P(40)$ e $P(80)$. Quando a população alcançará 900?

Exemplo 2 – *Solução*

A equação diferencial é uma equação logística com k = 0,08, capacidade de suporte M = 1.000 e população inicial P_0 = 100. Portanto, a Equação 7 dá a população no instante t como

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + Ae^{-0{,}08t}} \quad \text{onde} \quad A = \frac{1.000 - 100}{100} = 9$$

Logo,

$$P(t) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-0{,}08t}}$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Assim, os tamanhos da população quando t = 40 e 80 são

$$P(40) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-3,2}} \approx 731,6 \qquad P(80) = \frac{1.000}{1 + 9e^{-6,4}} \approx 985,3$$

A população alcançará 900 quando

$$\frac{1.000}{1 + 9e^{-0,08t}} = 900$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Resolvendo essa equação para t, temos

$$1 + 9e^{-0,08t} = \frac{10}{9}$$

$$e^{-0,08t} = \frac{1}{81}$$

$$-0,08t = \ln\frac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0,08} \approx 54,9$$

Logo, a população chega a 900 quando t for aproximadamente 55.

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Como uma verificação de nosso trabalho, traçamos a curva da população na Figura 3 e observamos onde ela intercepta a reta P = 900.

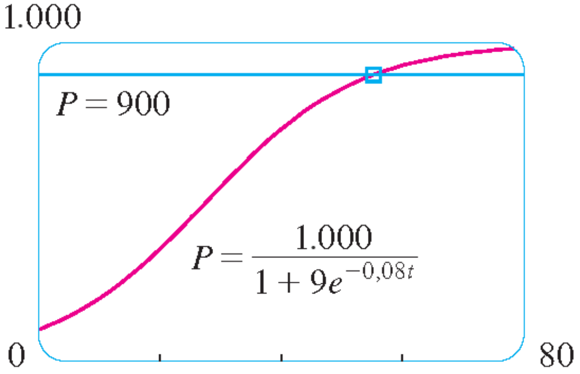


Figura 3

O cursor indica que $t \approx 55$.

Comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos

Comparação do Crescimento Natural com os Modelos Logísticos

Na década de 1930, o biólogo G. F. Gause realizou uma experiência com o protozoário *paramécio* e usou uma equação logística para modelar seus dados. A tabela fornece suas contagens diárias da população de protozoários.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

Ele estimou a taxa relativa de crescimento inicial como 0,7944 e a capacidade de suporte como 64.

Exemplo 3

Encontre os modelos exponencial e logístico para os dados de Gause. Compare os valores previstos com os valores observados e comente o ajuste.

SOLUÇÃO: Dadas a taxa de crescimento relativo $k = 0{,}7944$ e a população inicial $P_0 = 2$, o modelo exponencial é

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0{,}7944t}$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Gause usou o mesmo valor de *k* para seu modelo logístico. [Isso é razoável porque $P_0 = 2$ é pequeno comparado com a capacidade de suporte ($K = 64$). A equação

$$\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

mostra que o valor de *k* para o modelo logístico está muito próximo do valor para o modelo exponencial.]

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

A seguir, a solução da equação logística na Equação 7 fornece

$$P(t) = \frac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

onde

$$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Então

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Usamos essas equações para calcular os valores previstos (arredondados para o inteiro mais próximo) e os comparamos na tabela a seguir.

t (dias)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observados)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	. . .										

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Observamos na tabela e no gráfico da Figura 4 que, para os primeiros três ou quatro dias, o modelo exponencial fornece resultados comparáveis àqueles do método logístico mais sofisticado. Para $t \geq 5$, contudo, o modelo exponencial é muito impreciso, mas o modelo logístico se ajusta bem às observações.

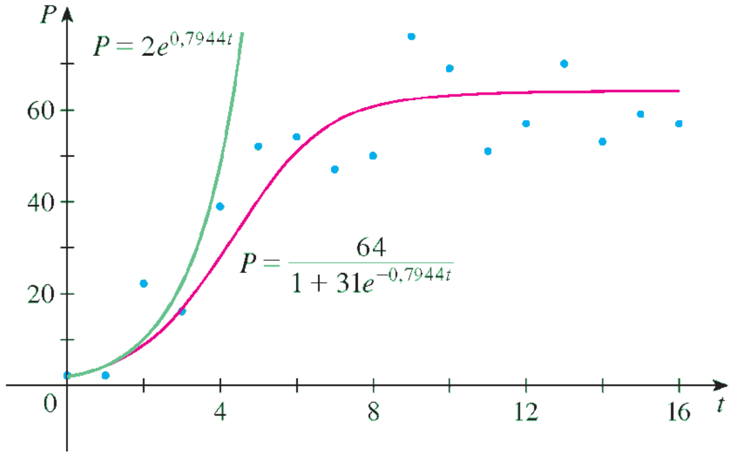


Figura 4

Os modelos exponencial e logístico para a população de *paramécios*

Outros Modelos para o Crescimento Populacional

Outros Modelos para o Crescimento Populacional

A Lei do Crescimento Natural e a equação diferencial logística não são as únicas equações propostas para modelar o crescimento populacional.

Dois dos outros modelos são modificações do modelo logístico. A equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

tem sido usada para modelar as populações que estão sujeitas à remoção de uma maneira ou de outra. (Pense em uma população de peixes que é capturada a uma taxa constante.)

Outros Modelos para o Crescimento Populacional

Para algumas espécies existe um nível mínimo populacional *m* abaixo do qual as espécies tendem a se extinguir. (Os adultos podem não conseguir encontrar parceiros adequados.) Essas populações são modeladas pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

onde o fator extra, 1 – *m*/*p*, leva em conta as consequências de uma população esparsa.