9 Equações Diferenciais

9.3 Equações Separáveis

Equações Separáveis

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão para *dy*/*dx* pode ser fatorada como uma função de *x* multiplicada por uma função de *y*.

Em outras palavras, pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

O nome *separável* vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser "separada" em uma função de *x* e uma função de *y*.

Equações Separáveis

Da mesma forma, se $f(y) \neq 0$, podemos escrever

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

onde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver essa equação, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)\, dy = g(x)\, dx$$

assim todos os y estão em um lado da equação e todos os x estão do outro lado

Equações Separáveis

Então integramos ambos os lados da equação:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

A Equação 2 define *y* implicitamente como função de *x*. Em alguns casos também poderemos isolar para *y* em termos de *x*.

Equações Separáveis

Usamos a Regra da Cadeia para justificar este procedimento: Se *h* e *g* satisfazem $\boxed{2}$, então

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

logo
$$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e
$$h(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Portanto, a Equação 1 é satisfeita.

Exemplo 1

(a) Resolva a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

SOLUÇÃO:

(a) Escrevemos a equação na forma diferencial e integramos os dois lados:

$$y^2\, dy = x^2\, dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3} y^3 = \tfrac{1}{3} x^3 + C$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

onde C é uma constante qualquer. (Poderíamos ter usado uma constante C_1 no lado esquerdo e outra constante C_2 no lado direito. Mas decidimos combiná-las em uma só constante no lado direito, fazendo $C = C_2 - C_1$.)

Resolvendo para y, obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Poderíamos deixar a solução dessa maneira ou podemos escrevê-la na forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

onde $K = 3C$. (Pois C é uma constante qualquer e o mesmo ocorre com K.)

(b) Se fizermos $x = 0$ na equação geral da parte (a), temos $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = 2$, devemos fazer $\sqrt[3]{K} = 2$ e assim $K = 8$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Trajetórias Ortogonais

Trajetórias Ortogonais

Uma **trajetória ortogonal** de uma família de curvas é uma curva que intercepta cada curva da família ortogonalmente, isto é, com ângulo reto (veja a Figura 7).

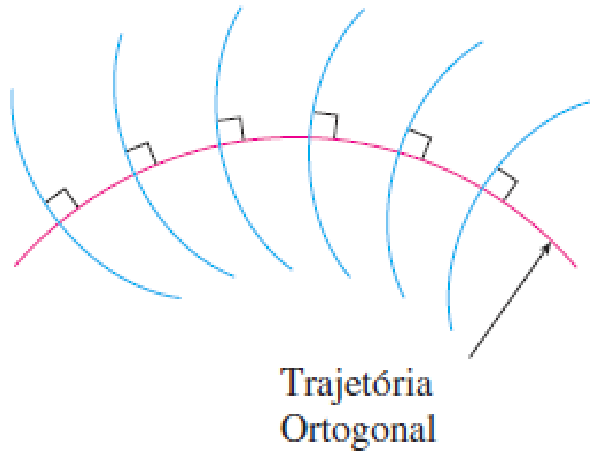

Figura 7

Trajetórias Ortogonais

Por exemplo, cada membro da família $y = mx$ de retas que passa pela origem é uma trajetória ortogonal da família $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concêntricos com o centro na origem (veja a Figura 8). Dizemos que as duas famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

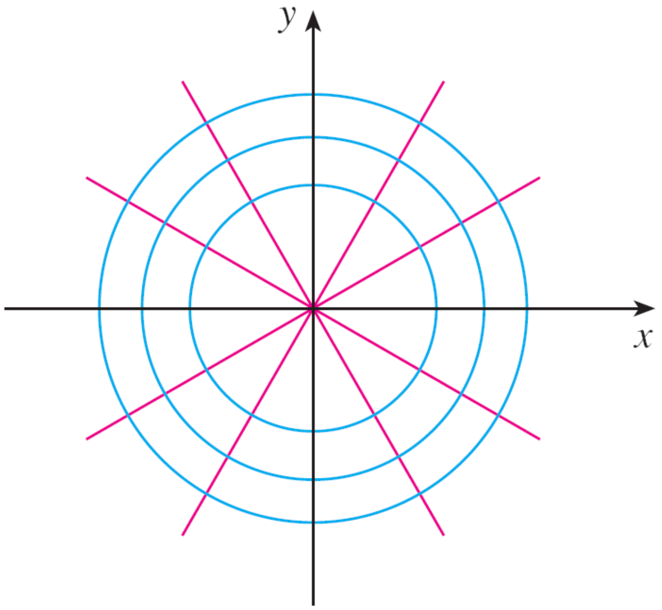

Figura 8

Exemplo 5

Encontre as trajetórias ortogonais da família de curvas $x = ky^2$, onde k é uma constante arbitrária.

SOLUÇÃO: As curvas $x = ky^2$ formam uma família de parábolas cujo eixo de simetria é o eixo x. O primeiro passo é encontrar uma única equação diferencial que seja satisfeita por todos os membros da família. Se diferenciarmos $x = ky^2$, obteremos

$$1 = 2ky\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Essa é uma equação diferencial que depende de *k*, mas precisamos de uma equação que seja válida para todos os valores *k* simultaneamente. Para eliminar *k* observamos que, da equação geral da parábola dada $x = ky^2$, temos $k = x/y^2$ e, assim, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\,\dfrac{x}{y^2}\,y}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Isso significa que a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x, y) em uma das parábolas é $y' = y/(2x)$.

Em uma trajetória ortogonal, a inclinação da reta tangente deve ser o oposto do inverso dessa inclinação. Portanto, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

Essa equação diferencial é separável e a resolvemos como segue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

onde *C* é uma constante arbitrária positiva. Então, as trajetórias ortogonais são a família de elipses dada pela Equação 4 e esboçada na Figura 9.

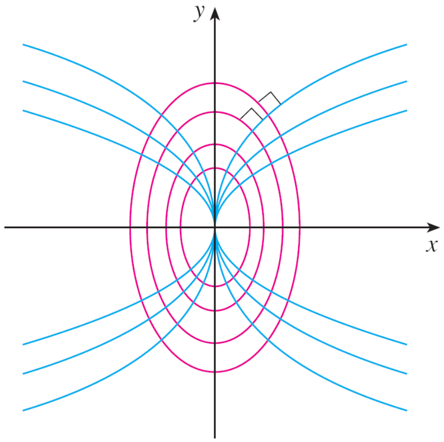

Figura 9

Problemas de Mistura

Problemas de Mistura

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t, então $y'(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada.

Problemas de Mistura

A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável.

Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago, injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros.

Exemplo 6

Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5.000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

SOLUÇÃO: Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. Foi-nos dado que $y(0) = 20$ e queremos encontrar $y(30)$. Fazemos isso encontrando uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$.

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Observe que *dy*/*dt* é a taxa de variação da quantidade de sal, assim,

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída})$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = \left(0{,}03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

O tanque sempre contém 5.000 L de líquido, então a concentração no tempo t é $y(t)/5.000$ (medida em quilogramas por litro).

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = \left(\frac{y(t)}{5.000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Então, da Equação 5, temos

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Resolvendo essa equação diferencial separável, obtemos

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

Uma vez que $y(0) = 20$, temos $-\ln 130 = C$, logo

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Portanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Como $y(t)$ é contínua, $y(0) = 20$ e o lado direito nunca é zero, deduzimos que $150 - y(t)$ é sempre positiva. Então, $|150 - y| = 150 - y$ e assim

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

Exemplo 6 – *Solução*

continuação

A quantidade de sal depois de 30 minutos é

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1 \text{ kg}$$