9

Equações Diferenciais

9.1

Modelagem com Equações Diferenciais

Modelagem com Equações Diferenciais

O modelo matemático frequentemente tem a forma de uma *equação diferencial*, isto é, uma equação que contém uma função desconhecida e algumas de suas derivadas. Isso não surpreende, porque em um problema real normalmente notamos que mudanças ocorrem e queremos predizer o comportamento futuro com base na maneira como os valores presentes variam. Vamos começar examinando vários exemplos de como as equações diferenciais aparecem quando modelamos um fenômeno físico.

Modelos para o Crescimento Populacional

Modelos para o Crescimento Populacional

Um dos modelos para o crescimento de uma população baseia-se na hipótese de que uma população cresce a uma taxa proporcional ao seu tamanho. Essa hipótese é razoável para uma população de bactérias ou animais em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doenças).

Vamos identificar e dar nomes às variáveis nesse modelo:

t = tempo (a variável independente)

P = número de indivíduos da população
(a variável dependente)

Modelos para o Crescimento Populacional

A taxa de crescimento da população é a derivada dP/dt. Assim, nossa hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é escrita como a equação

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A Equação 1 é nosso primeiro modelo para o crescimento populacional; é uma equação diferencial porque contém uma função desconhecida P e sua derivada dP/dt.

Modelos para o Crescimento Populacional

Tendo formulado um modelo, vamos olhar para suas consequências. Se desconsiderarmos uma população nula, então $P(t) > 0$ para todo t. Portanto, se $k > 0$,então Equação 1 mostra que $P'(t) > 0$ para todo t. Isso significa que a população está sempre aumentando. De fato, quando $P(t)$ aumenta, a Equação 1 mostra que dP/dt torna-se maior. Em outras palavras, a taxa de crescimento aumenta quando a população cresce.

Não é difícil pensar em uma solução para a Equação 1. Esta equação nos pede para encontrar uma função cuja derivada seja uma constante multiplicada por ela própria.

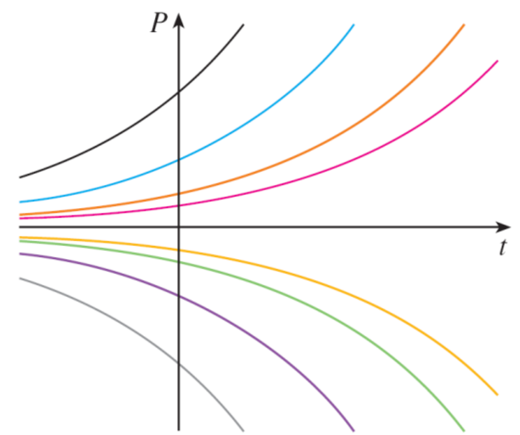
Modelos para o Crescimento Populacional

Sabemos que as funções exponenciais têm esta propriedade. De fato, se fizermos $P(t) = Ce^{kt}$, então

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

Portanto, qualquer função exponencial da forma $P(t) = Ce^{kt}$ é uma solução da Equação1.

Se fizermos C variar em todos os números reais, obtemos a *família* de soluções $P(t) = Ce^{kt}$ cujos gráficos são mostrados na Figura 1.

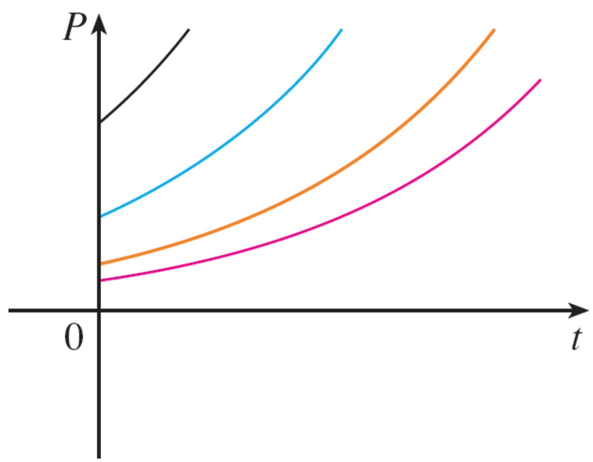


A família de soluções de $dP/dt = kP$

Figura 1

Modelos para o Crescimento Populacional

Mas as populações têm apenas valores positivos e, assim, estamos interessados somente nas soluções com $C > 0$. E estamos provavelmente preocupados apenas com valores de t maior que o tempo inicial $t = 0$. A Figura 2 mostra as soluções com significado físico.



A família de soluções de $P(t) = Ce^{kt}$ com $C > 0$ e $t \geq 0$

Figura 2

Modelos para o Crescimento Populacional

Fazendo $t = 0$, temos $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que a constante C acaba sendo a população inicial, $P(0)$.

A Equação 1 é apropriada para a modelagem do crescimento populacional sob condições ideais, mas devemos reconhecer que um modelo mais realista deveria refletir o fato de que um dado ambiente tem recursos limitados. Muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de *sua capacidade de suporte* M (ou diminui em direção a M se ela excede o valor de M).

Modelos para o Crescimento Populacional

Para um modelo considerar ambos os casos, fazemos duas hipóteses:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ se *P* for pequeno (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a *P*).

- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ se *P* > *M* (*P* diminui se exceder *M*).

Uma expressão simples que incorpora ambas as hipóteses é dada pela equação

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Modelos para o Crescimento Populacional

Observe que, se P é pequeno quando comparado com M, então P/M está próximo de 0 e, portanto, $dP/dt \approx kP$. Se $P > M$, então $1 - P/M$ é negativo e, assim, $dP/dt < 0$.

A Equação 2 é chamada *equação diferencial logística* e foi proposta pelo matemático e biólogo holandês Pierre-François Verhulst na década de 1840 como um modelo para o crescimento populacional mundial. Primeiro, observamos que as funções constantes $P(t) = 0$ e $P(t) = M$ são soluções, porque, em qualquer um dos casos, um dos fatores do lado direito da Equação 2 é zero. Essas duas soluções constantes são chamadas *soluções de equilíbrio*.

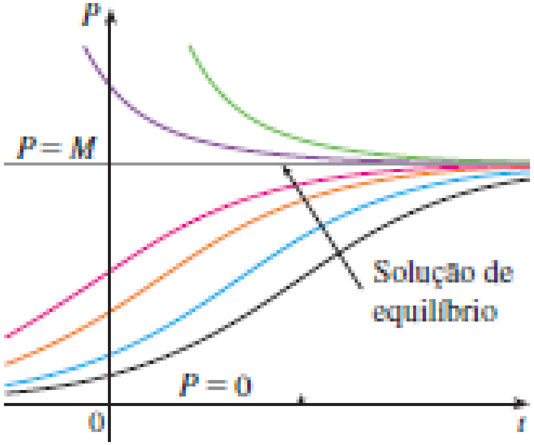
Modelos para o Crescimento Populacional

Se a população inicial $P(0)$ estiver entre 0 e M, então o lado direito da Equação 2 é positivo; assim, $dP/dt > 0$ e a população aumenta. Mas se a população exceder a capacidade de suporte ($P > M$), então $1 - P/M$ é negativo, portanto $dP/dt < 0$ e a população diminui.

Observe que, em qualquer um dos casos, se a população se aproxima da capacidade de suporte ($P \to M$), então $dP/dt \to 0$, o que significa que a população se estabiliza.

Modelos para o Crescimento Populacional

Dessa forma, esperamos que as soluções da equação diferencial logística tenham gráficos que se pareçam com aqueles da Figura 3. Observe que os gráficos se distanciam da solução de equilíbrio $P = 0$ e se aproximam da solução de equilíbrio $P = M$.



Soluções da equação logística

Figura 3

Modelo para o Movimento de uma Mola

Modelo para o Movimento de uma Mola

Vamos olhar agora para um modelo físico. Consideremos o movimento de um objeto com massa *m* na extremidade de uma mola vertical (como na Figura 4).

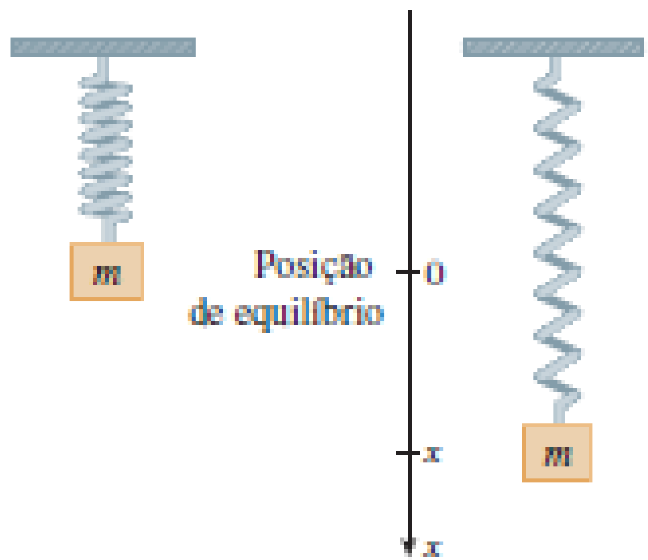


Figura 4

Modelo para o Movimento de uma Mola

Discutimos a Lei de Hooke, que diz que, se uma mola for esticada (ou comprimida) x unidades a partir de seu tamanho natural, então ela exerce uma força que é proporcional a x:

$$\text{força elástica} = -kx$$

onde k é uma constante positiva (chamada *constante da mola*). Se ignorarmos qualquer força externa de resistência (por causa da resistência do ar ou do atrito), então, pela segunda Lei de Newton (força é igual a massa vezes aceleração), temos

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{3}$$

Modelo para o Movimento de uma Mola

Esse é um exemplo do que chamamos *equação diferencial de segunda ordem*, porque envolve derivadas segundas.

Vamos ver o que podemos deduzir da solução diretamente da equação. Podemos reescrever a Equação 3 na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que diz que a derivada segunda de *x* é proporcional a *x*, mas tem o sinal oposto.

Equações Diferenciais Gerais

Equações Diferenciais Gerais

Em geral, uma **equação diferencial** é aquela que contém uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que ocorre na equação. Dessa maneira, as Equações 1 e 2 são de primeira ordem e a Equação 3 é de segunda ordem. Em todas as três equações, a variável independente é chamada t e representa o tempo, mas, em geral, a variável independente não precisa representar o tempo.

Equações Diferenciais Gerais

Por exemplo, quando consideramos a equação diferencial

$$y' = xy \qquad \boxed{4}$$

entendemos que *y* seja uma função desconhecida de *x*.

Uma função *f* é denominada **solução** de uma equação diferencial se a equação é satisfeita quando $y = f(x)$ e suas derivadas são substituídas na equação. Assim, *f* é uma solução da Equação 4 se

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos os valores de *x* em algum intervalo.

Equações Diferenciais Gerais

Quando nos pedem para *resolver* uma equação diferencial, espera-se que encontremos todas as soluções possíveis da equação. Já resolvemos algumas equações diferenciais particularmente simples; a saber, aquelas da forma

$$y' = f(x)$$

Por exemplo, sabemos que a solução geral da equação diferencial

$$y' = x^3$$

é dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

onde C é uma constante qualquer.

Exemplo 1

Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

Exemplo 1 – *Solução*

Usamos a Regra do Quociente para derivar a expressão em relação a *y*:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

O lado direito da equação diferencial torna-se

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Portanto, para todo valor de *c*, a função dada é solução da equação diferencial.

Equações Diferenciais Gerais

Quando aplicamos as equações diferenciais, geralmente não estamos tão interessados em encontrar uma família de soluções (a *solução geral*) quanto em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Em muitos problemas físicos precisamos encontrar uma solução particular que satisfaça uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução da equação diferencial que satisfaça a condição inicial é denominado **problema de valor inicial**.