MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Capítulo 6: Bancos de Filtros

Seção 6.1: Visão geral

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria de **Wavelets** a partir da perspectiva de bancos de filtros.

Alguns pontos em comum com a representação de Fourier:

- *a transformada Wavelet também é linear, podendo ser representada por um par de equações*
  $$X = Wx \qquad\qquad x = W^{-1}X;$$
- *os coeficientes* X_k *também estão associados a uma família de funções básicas (wavelets);*
- *a teoria pode ser estendida para sinais de duração infinita, bem como para sinais contínuos.*

Algumas diferenças importantes:

- *a transformada parte do princípio que o conteúdo espectral do sinal varia no tempo;*
- *cada wavelet básica (e portanto cada coeficiente X_k) possui simultaneamente localização temporal e características frequenciais;*
- *a transformada possui complexidade computacional linear e não $\mathcal{O}(N\ log\ N)$.*

A ideia de banco de filtros não é tão distante da realidade de Fourier: cada coeficiente X_k da DFT era definido por uma equação

$$X_k = (x, E_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi k(0-n)/N} = (x * E_k)_0,$$

ou seja, o coeficiente X_k pode ser visto como obtido pela *filtragem* do sinal x pelo filtro definido por $h = E_k$, cuja resposta em frequência é

$$\mathrm{DFT}(E_k) = (0, \ldots, 0, \overbrace{N}^{k}, 0, \ldots, 0).$$

Nesse sentido, a transformada de Fourier pode ser vista como um banco de N filtros $E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$, cada um dos quais "seleciona" exatamente o conteúdo de frequência k do sinal x:

$$x \longrightarrow \left| \begin{array}{ccc} \longrightarrow & \boxed{E_0} & \longrightarrow \\ \longrightarrow & \boxed{E_1} & \longrightarrow \\ & \vdots & \\ \longrightarrow & \boxed{E_{N-1}} & \longrightarrow \end{array} \right. \begin{bmatrix} \boxed{X_0} \\ \boxed{X_1} \\ \vdots \\ \boxed{X_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Seção 6.2.1: O banco de filtros de Haar de 1 estágio e 2 canais

Num primeiro momento, será mais conveniente apresentar a teoria de bancos de filtros sem nos preocuparmos com as "extremidades" do vetor, o que se torna muito mais fácil no contexto dos sinais bi-infinitos em $L^2(\mathbb{Z})$.

Consideraremos também bancos de filtros que utilizam apenas dois *canais* de separação em frequências de um sinal x, através de um filtro *passa-baixas* (*low-pass*) e outro filtro *passa-altas* (*high-pass*), associados respectivamente a vetores de coeficientes $l, h \in L^2(\mathbb{Z})$:

$$x \longrightarrow \left| \begin{array}{cccc} \longrightarrow & \boxed{l} & \longrightarrow & \boxed{l * x} \\ \longrightarrow & \boxed{h} & \longrightarrow & \boxed{h * x} \end{array} \right.$$

O banco de filtros de Haar utiliza os filtros passa-baixas e passa-altas associados aos coeficientes

$$\begin{array}{llll} l_0 = \frac{1}{2}, & l_1 = \frac{1}{2}, & l_r = 0, & \text{c.c.} \\ h_0 = \frac{1}{2}, & h_1 = -\frac{1}{2}, & l_r = 0, & \text{c.c.} \end{array}$$

Esses são nossos velhos conhecidos *filtro da média* e *filtro da diferença normalizada*.

Exemplo 6.1

Considere o sinal definido por

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\pi(3)t\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\pi(49)t\right)$$

amostrado em $t \in [0, 1)$ usando $N = 128$ amostras.

Vamos observar a seguir os sinais obtidos pela aplicação dos filtros da média e da diferença a esse sinal:

$$(l * x)_k = \tfrac{1}{2}x_k + \tfrac{1}{2}x_{k-1},$$
$$(h * x)_k = \tfrac{1}{2}x_k - \tfrac{1}{2}x_{k-1}.$$

In [3]:
```
fig, ax = plt.subplots(1,3, figsize=(18,5))
ax[0].plot(k,x);ax[0].set_title("Sinal original")
ax[1].plot(k,xl);ax[1].set_ylim([-1, 1]);ax[1].set_title("Sinal filtrado (frequ
encias baixas)")
ax[2].plot(k,xh);ax[2].set_ylim([-1, 1]);ax[2].set_title("Sinal filtrado (frequ
encias altas)")
plt.suptitle(r"Figura 6.1: Observe que $||(x_l+x_h)-x||$ = {0:.2e}".format(np.li
nalg.norm(xh+xl-x)),y=0,fontsize=20);plt.show()
```

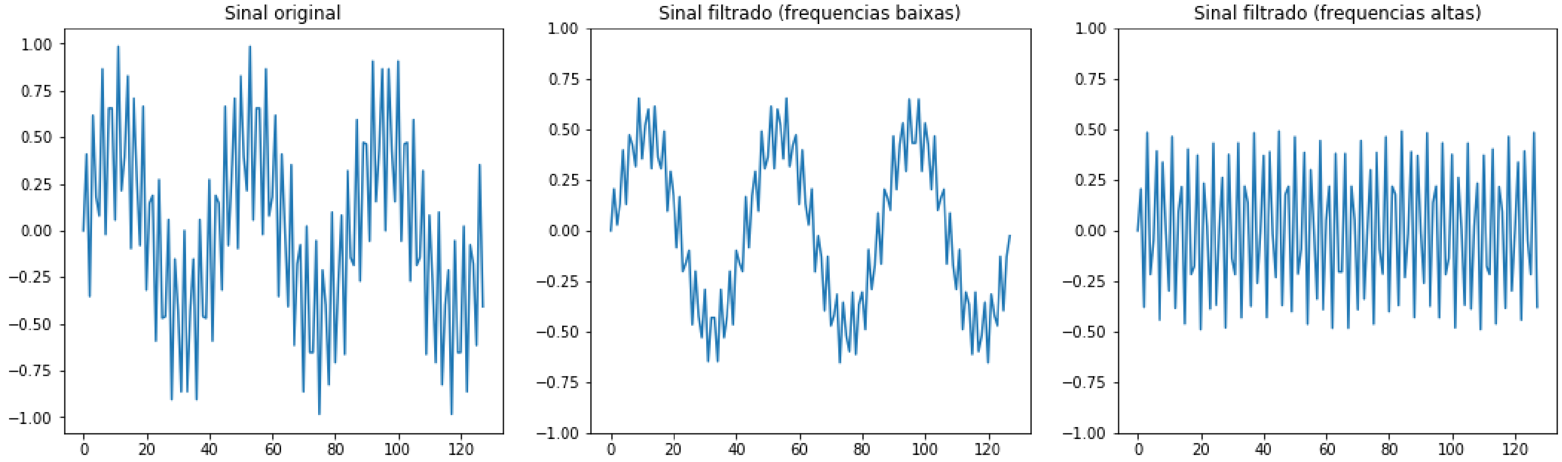


Figura 6.1: Observe que $||(x_l + x_h) - x||$ = 2.94e-16

Princípio da reconstrução perfeita

Observe que para os filtros de Haar, a soma das componentes $l * x$ e $h * x$ sempre fornece a reconstrução do sinal original. A propriedade $l * x + h * x = x$ decorre diretamente do fato de que $l + h = \delta$, onde $\delta_0 = 1$ e $\delta_r = 0, \ \forall r \neq 0$, e portanto

$$l * x + h * x = (l + h) * x = \delta * x = x,$$

já que δ é o elemento neutro da convolução.

Gostaríamos de manter esse princípio válido, ou seja, de que é possível reconstruir exatamente o sinal x a partir dos sinais filtrados $l * x$ e $h * x$, e ao mesmo tempo explorar certas redundâncias presentes nestes últimos sinais.

Considere o sinal original

$$x = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ \boxed{x_0} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

e os sinais filtrados pelos filtros passa-baixas e passa-altas

Há muita redundância nos sinais $l * x$ e $h * x$. Lembrando que

$$(l * x)_k = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}x_{k-1} \quad \text{e} \quad (h * x)_k = \frac{1}{2}x_k - \frac{1}{2}x_{k-1}$$

podemos ver que a partir do conhecimento das duas amostras acima, correspondentes a um único instante k, é possível "reconstruir" tanto as amostras x_k quanto x_{k-1}:

$$\begin{aligned} x_k &= (l * x)_k + (h * x)_k \\ x_{k-1} &= (l * x)_k - (h * x)_k. \end{aligned}$$

Assim, não seria necessário conhecer $(l * x)_{k-1}$ $(h * x)_{k-1}$ para obter x_{k-1}, sendo possível "descartar" metade dos vetores $l * x$ e $h * x$ e ainda assim preservar o princípio da reconstrução perfeita.

Construção dos vetores de aproximação e detalhe

Usaremos um operador de *subamostragem* para construir os vetores X_l e X_h que denominaremos de *coeficientes de aproximação e de detalhes*.

Definição 6.2.1: O operador de subamostragem (*downsampling*) $D : L^2(\mathbb{Z}) \mapsto L^2(\mathbb{Z})$ é definido por

$$D : (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\ldots, x_{-2}, \boxed{x_0}, x_2, \ldots)$$

ou equivalentemente por $(D(x))_k = x_{2k}$.

Note que esse operador descarta todos os coeficientes ímpares, e corresponde a uma *contração temporal* do sinal.

Observe também que esse operador é linear, ou seja, satisfaz

$$D(x + y) = D(x) + D(y) \qquad \text{e} \qquad D(\alpha x) = \alpha D(x),$$

Os coeficientes de aproximação e detalhes pelo banco de filtros de Haar para um sinal x serão definidos respectivamente por

$$X_l = D(l * x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} + x_{-3} \\ \boxed{x_0 + x_{-1}} \\ x_2 + x_1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad X_h = D(h * x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} - x_{-3} \\ \boxed{x_0 - x_{-1}} \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Note que X_l é uma versão *suavizada* (através do filtro passa-baixas) e *concentrada* (pelo operador de subamostragem) do sinal original; analogamente, X_h concentra o conteúdo de alta frequência do sinal original.

A Transformada do banco de filtros de Haar em $L^2(\mathbb{Z})$

O processo descrito até aqui pode ser ilustrado pelo diagrama

$$x \longrightarrow \left| \begin{array}{l} \longrightarrow \boxed{l_a} \longrightarrow l_a * x \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow D(l_a * x) \longrightarrow \\ \longrightarrow \boxed{h_a} \longrightarrow h_a * x \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow D(h_a * x) \longrightarrow \end{array} \right| \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{X_l} \\ \boxed{X_h} \end{bmatrix}$$

onde os filtros passa-altas e passa-baixas foram renomeados como l_a e h_a para indicar que pertencem à etapa de *análise*.

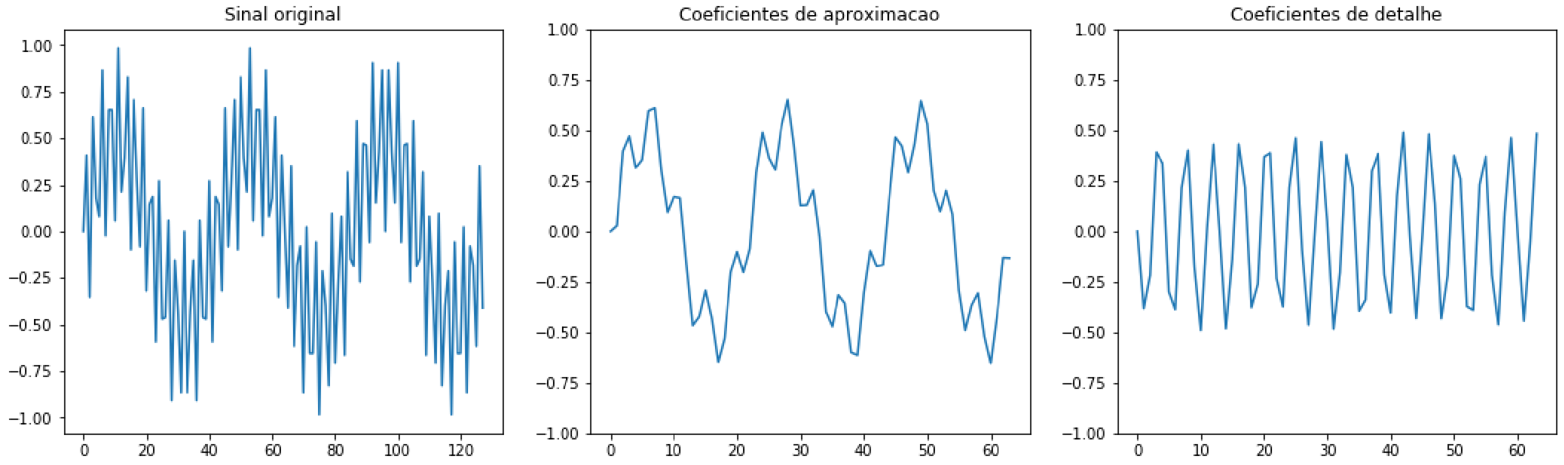
Consideraremos a transformação $W : L^2(\mathbb{Z}) \mapsto L^2(\mathbb{Z}) \times L^2(\mathbb{Z})$ definida por

$$W(x) \mapsto (X_l, X_h)$$

como sendo a transformada de Haar em $L^2(\mathbb{Z})$. Sua *linearidade* segue diretamente das linearidades da convolução e da subamostragem.

A figura a seguir ilustra a decomposição do último sinal de exemplo x em X_l e X_h.

In [4]:
```
fig,ax = plt.subplots(1,3, figsize=(18,5))
ax[0].plot(k,x);ax[0].set_title("Sinal original")
ax[1].plot(xl[0:N:2]);ax[1].set_ylim([-1, 1]);ax[1].set_title("Coeficientes de
 aproximacao")
ax[2].plot(xh[0:N:2]);ax[2].set_ylim([-1, 1]);ax[2].set_title("Coeficientes de
 detalhe");
plt.suptitle(r"Observe que os dois últimos gráficos possuem metade da duração do
primeiro",y=0,fontsize=16);plt.show()
```



Observe que os dois últimos gráficos possuem metade da duração do primeiro

Invertendo a transformada de Haar de 1 estágio

O nosso objetivo agora é verificar que ainda é possível reconstruir o sinal original x a partir dos coeficientes de aproximação X_l e de detalhes X_h, apesar do descarte promovido pela subamostragem. Essa reconstrução começa restaurando a escala de tempo do sinal original.

Definição 6.2.2: O operador de superamostragem (*upsampling*) $U : L^2(\mathbb{Z}) \mapsto L^2(\mathbb{Z})$ é definido por

$$U : (\ldots, x_{-1}, \boxed{x_0}, x_1, \ldots) \mapsto (\ldots, 0, x_{-1}, 0, \boxed{x_0}, 0, x_1, 0, \ldots)$$

ou equivalentemente por $(U(x))_k = \begin{cases} x_{k/2}, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$

Observe também que esse operador também é linear, ou seja, satisfaz $U(x+y) = U(x) + U(y)$ e $U(\alpha x) = \alpha U(x)$.

Aplicando o operador de superamostragem nos vetores X_l e X_h obtemos

$$U(X_l) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ x_{-2} + x_{-3} \\ 0 \\ \boxed{x_0 + x_{-1}} \\ 0 \\ x_2 + x_1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad U(X_h) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ x_{-2} - x_{-3} \\ 0 \\ \boxed{x_0 - x_{-1}} \\ 0 \\ x_2 - x_1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Para "preenchermos" as lacunas dos vetores $U(X_l)$ e $U(X_h)$ de forma a permitir a reconstrução de x, aplicaremos convoluções com novos filtros, também passa-baixas e passa-altas, que sejam apropriados à reconstrução. Os filtros dessa última etapa são chamados de *filtros de síntese*, e denotados por l_s (passa-baixas) e h_s (passa-altas).

No banco de filtros de Haar, os filtros de síntese são dados por

$$
\begin{aligned}
(l_s)_{-1} &= 1, \quad & (l_s)_0 &= 1, \quad & (l_s)_r &= 0, \quad & \text{c.c.} \\
(h_s)_{-1} &= -1, \quad & (h_s)_0 &= 1, \quad & (l_s)_r &= 0, \quad & \text{c.c.}
\end{aligned}
$$

ou equivalentemente

$$
\begin{aligned}
(l_s * x)_k &= x_k + x_{k+1} \\
(h_s * x)_k &= x_k - x_{k+1}
\end{aligned}
$$

Observe que estes são pequenas variantes dos filtros da média e da diferença originais, porém com escala diferente e "espelhados", ou seja, combinam cada amostra com a amostra seguinte, ao invés da anterior (por isso são filtros não-causais).

Aplicando os filtros de síntese aos vetores $U(X_l)$ e $U(X_h)$ para produzir $v_l = l_s * U(X_l)$ e $v_h = h_s * U(X_h)$, obtemos

$$v_l = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} + x_{-3} \\ x_{-2} + x_{-3} \\ x_0 + x_{-1} \\ \boxed{x_0 + x_{-1}} \\ x_2 + x_1 \\ x_2 + x_1 \\ x_4 + x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad v_h = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ -x_{-2} + x_{-3} \\ x_{-2} - x_{-3} \\ -x_0 + x_{-1} \\ \boxed{x_0 - x_{-1}} \\ -x_2 + x_1 \\ x_2 - x_1 \\ -x_4 + x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Em geral, temos

$$(v_l)_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), & \text{se } k \text{ é par,} \\ \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k), & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$(v_h)_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}), & \text{se } k \text{ é par,} \\ \frac{1}{2}(-x_{k+1} + x_k), & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

de onde se vê que

$$(v_l)_k + (v_h)_k = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) + \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}), & \text{se } k \text{ é par,} \\ \frac{1}{2}(x_{k+1} + x_k) + \frac{1}{2}(-x_{k+1} + x_k), & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{array} \right\} = x_k\,.$$

Ou ainda:

$$v_l + v_h = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-2} + x_{-3} \\ x_{-2} + x_{-3} \\ x_0 + x_{-1} \\ \boxed{x_0 + x_{-1}} \\ x_2 + x_1 \\ x_2 + x_1 \\ x_4 + x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \vdots \\ -x_{-2} + x_{-3} \\ x_{-2} - x_{-3} \\ -x_0 + x_{-1} \\ \boxed{x_0 - x_{-1}} \\ -x_2 + x_1 \\ x_2 - x_1 \\ -x_4 + x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x_{-3} \\ x_{-2} \\ x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Esse processo pode ser ilustrado pelo diagrama da transformada de síntese (inversa):

$$
\begin{array}{ccccccccccc|ccc}
 & & \overbrace{v_l}^{=l_s * U(X_l)} & \longleftarrow & \boxed{l_s} & \longleftarrow & U(X_l) & \longleftarrow & \boxed{U} & \longleftarrow & & & & \\
 & & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
x & \longleftarrow & \bigoplus & & & & & & & & & \longleftarrow & \begin{bmatrix} \boxed{X_l} \\ \boxed{X_h} \end{bmatrix} \\
 & & \nwarrow & & & & & & & & & & & \\
 & & \overbrace{v_s}^{=h_s * U(X_h)} & \longleftarrow & \boxed{h_s} & \longleftarrow & U(X_h) & \longleftarrow & \boxed{U} & \longleftarrow & & & &
\end{array}
$$

Observe a estrutura espelhada em relação ao diagrama da transformada direta (análise).

Observação 6.1: Causalidade e atrasos

Os filtros de síntese l_s e h_s *não são causais*, o que pode dificultar a aplicação da transformada inversa em certos contextos (por exemplo no processamento em tempo real).

Uma alternativa para tornar todos os filtros causais é introduzir atrasos propositais na cadeia de processamento. Considere o operador de *atraso* $S : L^2(\mathbb{Z}) \mapsto L^2(\mathbb{Z})$ definido por $(S(x))_k = x_{k+1}$, ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & x_{-2} & x_{-1} & \boxed{x_0} & x_1 & x_2 & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \cdots & x_{-3} & x_{-2} & \boxed{x_{-1}} & x_0 & x_1 & \cdots \end{array}$$

Substituindo os filtros não-causais l_s e h_s pelos filtros causais $S(l_s)$ e $S(h_s)$ teremos na saída do processo de síntese o sinal

$$S(l_s) * U(X_l) + S(h_s) * U(X_h) = S(l_s * U(X_l) + h_s * U(X_h)) = S(x).$$

A propriedade $S(v) * w = S(v * w)$ é um caso particular do exercício 6.7.

Exemplo 6.2

Considere o sinal definido por

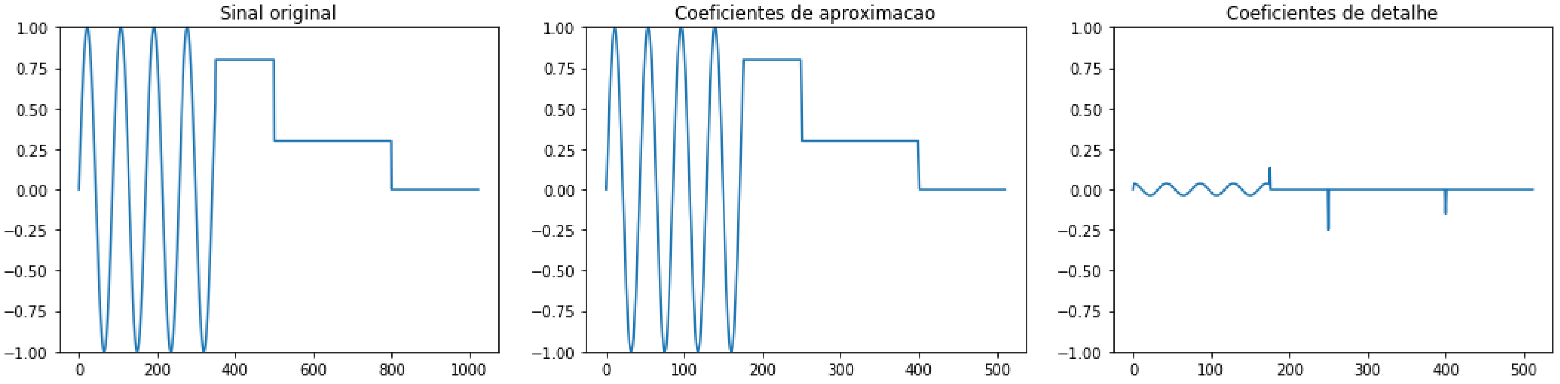
$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 12t), & 0 \leq t < t_1 \\ 0.8, & t_1 \leq t < t_2 \\ 0.3, & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t_3 \leq t < 1 \end{cases}$$

onde $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ formam uma partição arbitrária do intervalo $[0, 1]$.

Construiremos a seguir os coeficientes de aproximação e detalhes desse sinal x. Observe como os coeficientes de aproximação possuem o mesmo perfil do sinal original, e como os coeficientes de detalhes guardam informações importantes para a reconstrução (por exemplo os pontos de descontinuidade do sinal original).

In [6]:

```
fig, ax = plt.subplots(1,3, figsize=(18,4))
ax[0].plot(x);ax[0].set_ylim([-1, 1]);ax[0].set_title("Sinal original")
ax[1].plot(xl[0:N:2]);ax[1].set_ylim([-1, 1]);ax[1].set_title("Coeficientes de aproximacao")
ax[2].plot(xh[0:N:2]);ax[2].set_ylim([-1, 1]);ax[2].set_title("Coeficientes de detalhe");plt.show()
```



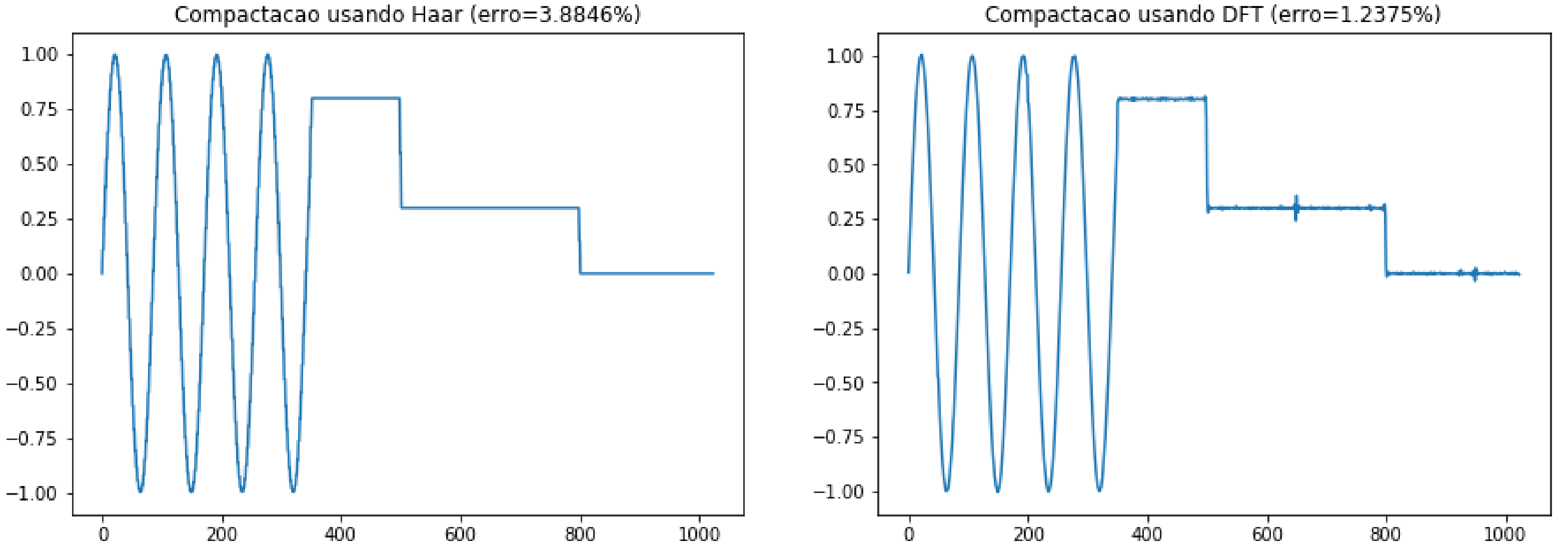
Continuação do exemplo 6.2: compressão

Lembrando que os coeficientes de aproximação X_l da transformada de Haar correspondem a uma versão suavizada e subamostrada do sinal original x, podemos obter uma compressão "fácil" de 50% simplesmente descartando os coeficientes de detalhes X_h na representação compactada, e ressintetizando o sinal preenchendo os coeficientes de detalhes faltantes com $X_h = 0$.

Na figura a seguir ilustramos a aplicação dessa compressão ao sinal do exemplo 6.2, contrastando com o resultado de aplicar um princípio similar de compressão à DFT(x), descartando 50% dos coeficientes de menor amplitude.

Observe os erros relativos indicados nos gráficos, e compare-os com sua impressão subjetiva da qualidade dos sinais reconstruídos. Note as diferenças entre as imagens na porção senoidal e nos trechos constantes.

In [8]:
```
fig, ax = plt.subplots(1,2, figsize=(15,5))
ax[0].plot(vl);ax[0].set_title(r"Compactacao usando Haar (erro={0:.4f}%)".format
(100*distortion(x[0:N], vl)))
ax[1].plot(xnovo);ax[1].set_title(r"Compactacao usando DFT (erro={0:.4f}%)".form
at(100*distortion(x[0:N], xnovo)))
plt.show()
```



Outro exemplo de compressão do mesmo sinal, mantendo 75% dos coeficientes

No caso de Haar, eliminaremos 50% dos coeficientes de X_h (os de menor amplitude), o que corresponde a descartar 25% do vetor (X_l, X_h).

No caso da DFT, eliminaremos 25% dos coeficientes da DFT(x) (os de menor amplitude).

Pode-se ver que a compressão por Haar nesse caso não acarreta nenhuma perda na reconstrução, provavelmente devido ao fato de que o vetor X_h já possuia muitos zeros, ao passo que a melhora no desempenho da compressão por Fourier não elimina os artefatos nos trechos constantes do sinal.

In [10]:

```
fig, ax = plt.subplots(1,2, figsize=(15,5))
ax[0].plot(vl+vh);ax[0].set_title(r"Compactacao usando Haar (erro={0:.4f}%)".fo
rmat(100*distortion(x[0:N], vl+vh)))
ax[1].plot(xnovo);ax[1].set_title(r"Compactacao usando DFT (erro={0:.4f}%)".form
at(100*distortion(x[0:N], xnovo)))
plt.show()
```