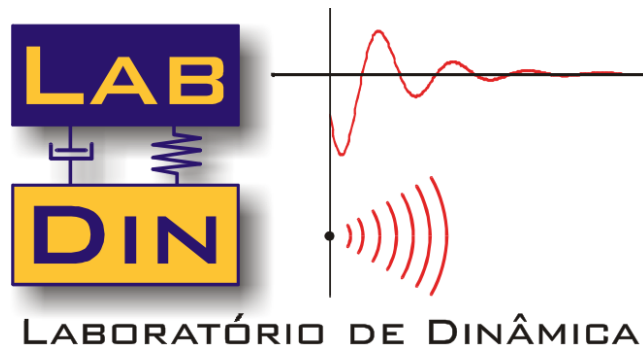


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Térmicos
Teoria

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar elementos teóricos para a modelagem de Sistemas Térmicos no contexto da Dinâmica de Sistemas. Os seguintes elementos serão estudados:

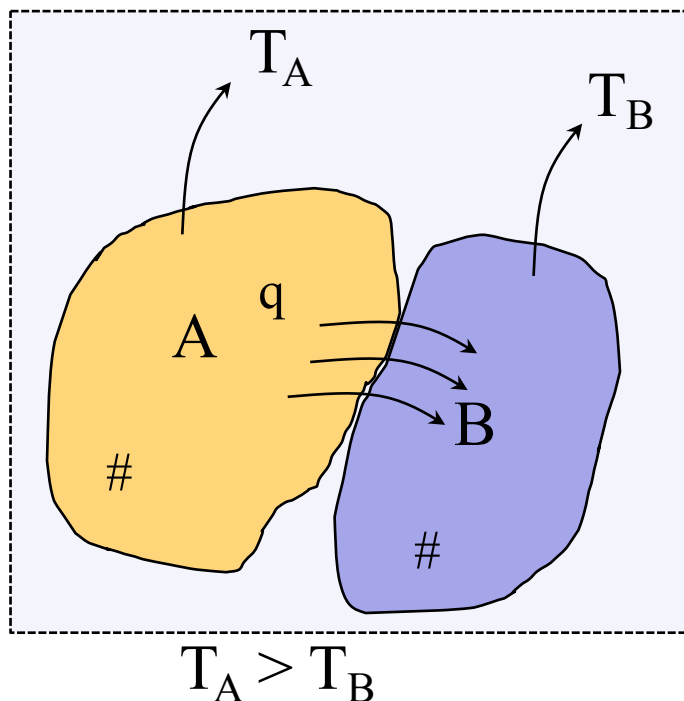
- Resistência Térmica
- Capacitância Térmica

Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Introdução

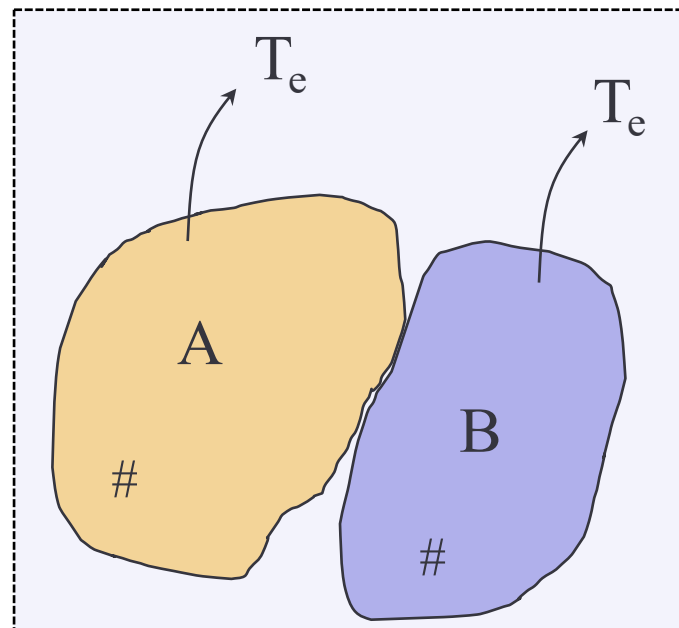
O conceito de *equilíbrio térmico*



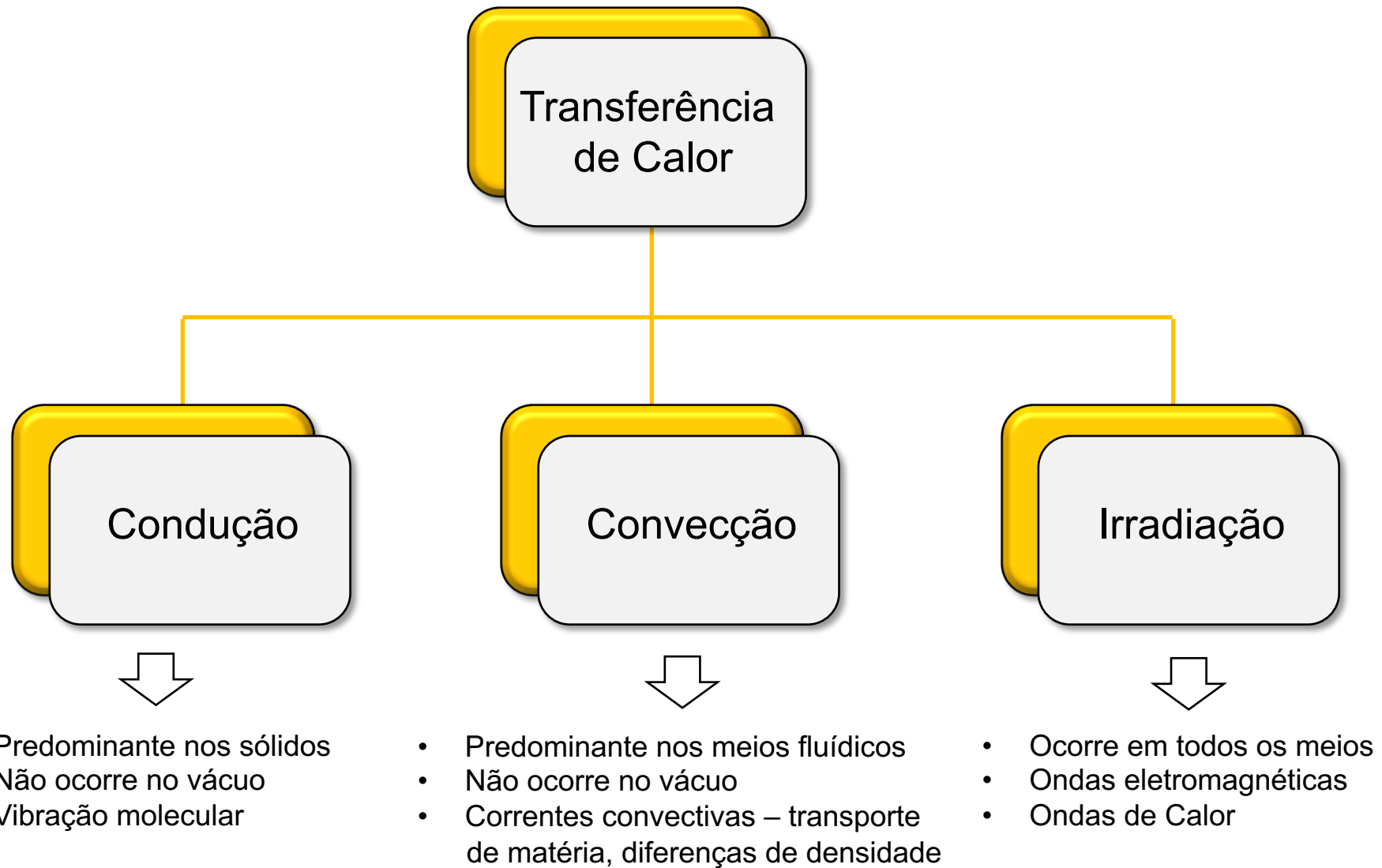
Δt



Isolamento térmico



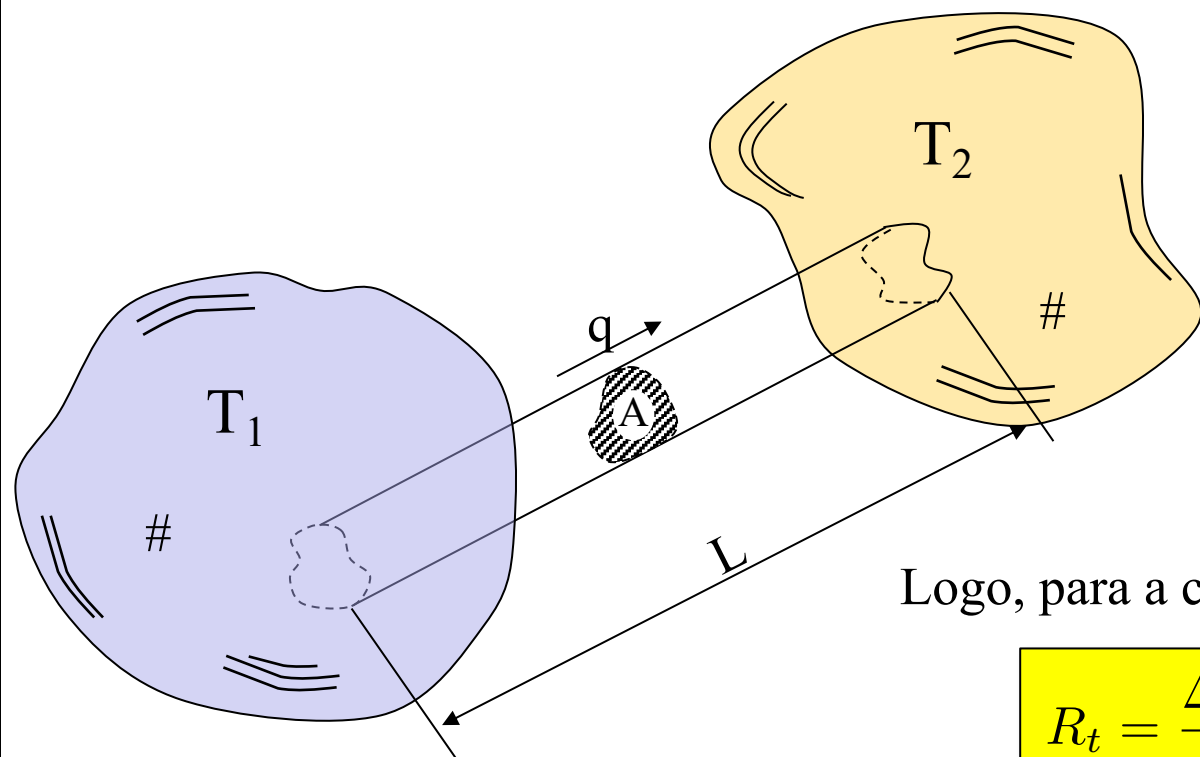
Nossas variáveis de interesse são então o fluxo de energia térmica q (calor) e a variação de temperatura Δt . Para os elementos resistência e capacitância térmica procuraremos estabelecer a relação entre estas variáveis. O processo de transferência de calor pode ser por: (i) *condução*; (ii) *convecção* e ; (iii) *irradiação*



O Elemento Resistência Térmica

Efeito físico: modelagem da dissipação durante o processo de troca de calor

A relação entre a quantidade de calor trocada e o gradiente de temperatura depende da forma predominante de troca de calor. Então estudaremos separadamente as diferentes formas de troca de calor. Iniciamos com a *condução térmica*



Lei de Fourier:

$$q = \frac{kA}{L} (T_1 - T_2) = \frac{kA}{L} \Delta T$$

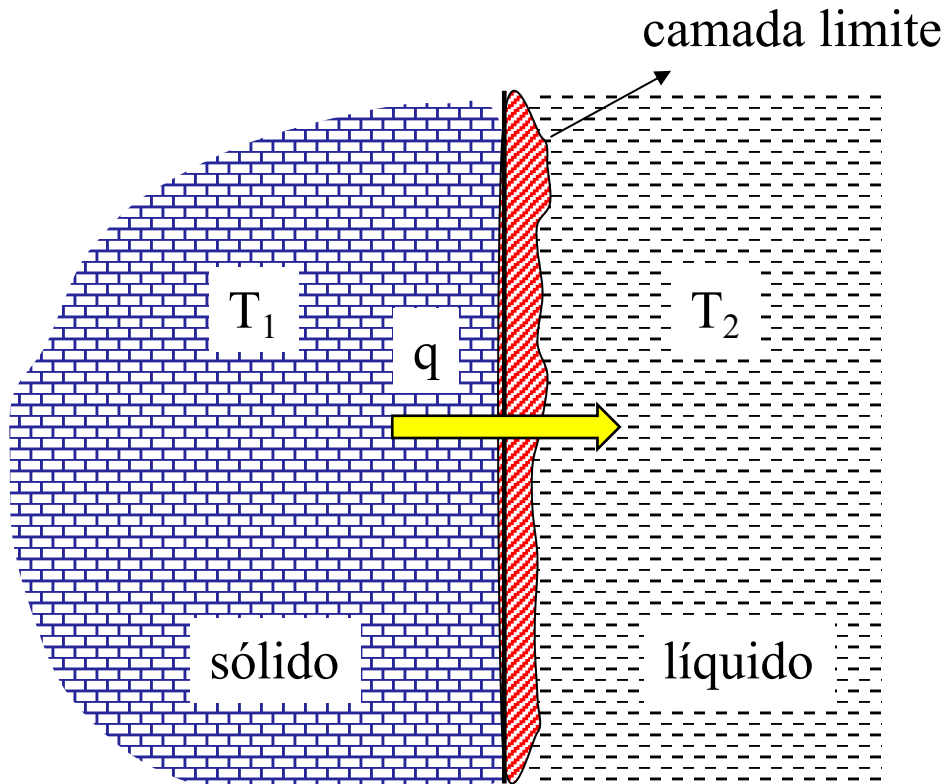
k – coeficiente de condutividade térmica do material da haste

Logo, para a condução térmica:

$$R_t = \frac{\Delta T}{q} = \frac{L}{kA}$$

Cont. ...

Muitas aplicações práticas envolvem a transferência de calor através de interfaces fluídico/sólidas. Neste caso, consideramos a *convecção térmica* como mecanismo de condução de calor e a forma da determinação da resistência térmica muda:



Para a condução definimos:

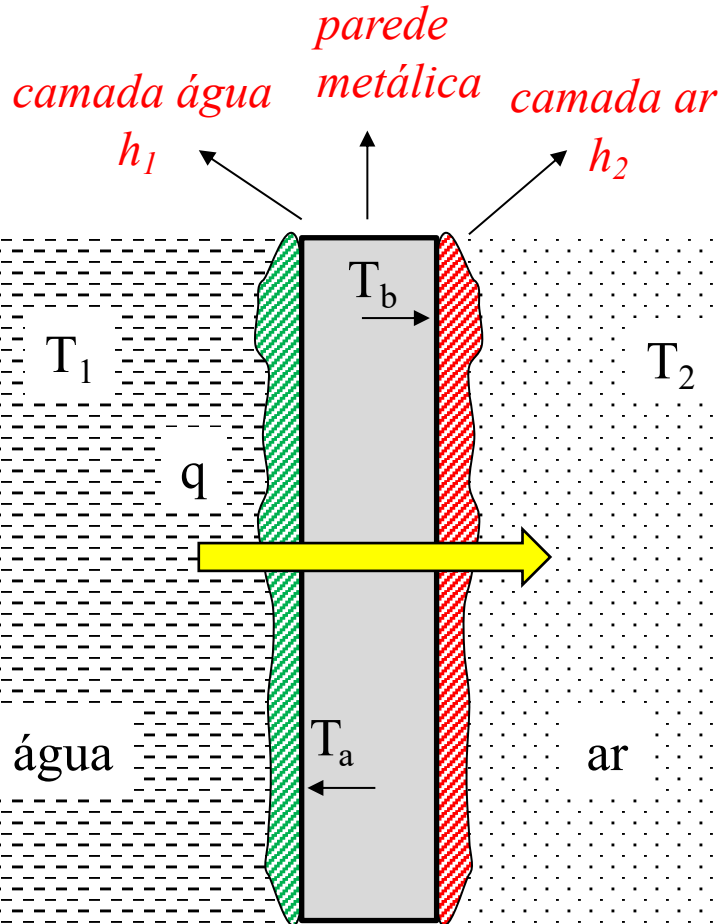
$$q = hA (T_1 - T_2) = hA\Delta T$$

$$R_t = \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{hA}$$

h – coeficiente de película

Cont. ...

Em situações reais a condução e convecção são combinadas e então podemos definir uma resistência térmica global levando-se em conta os dois processos



Para este caso:

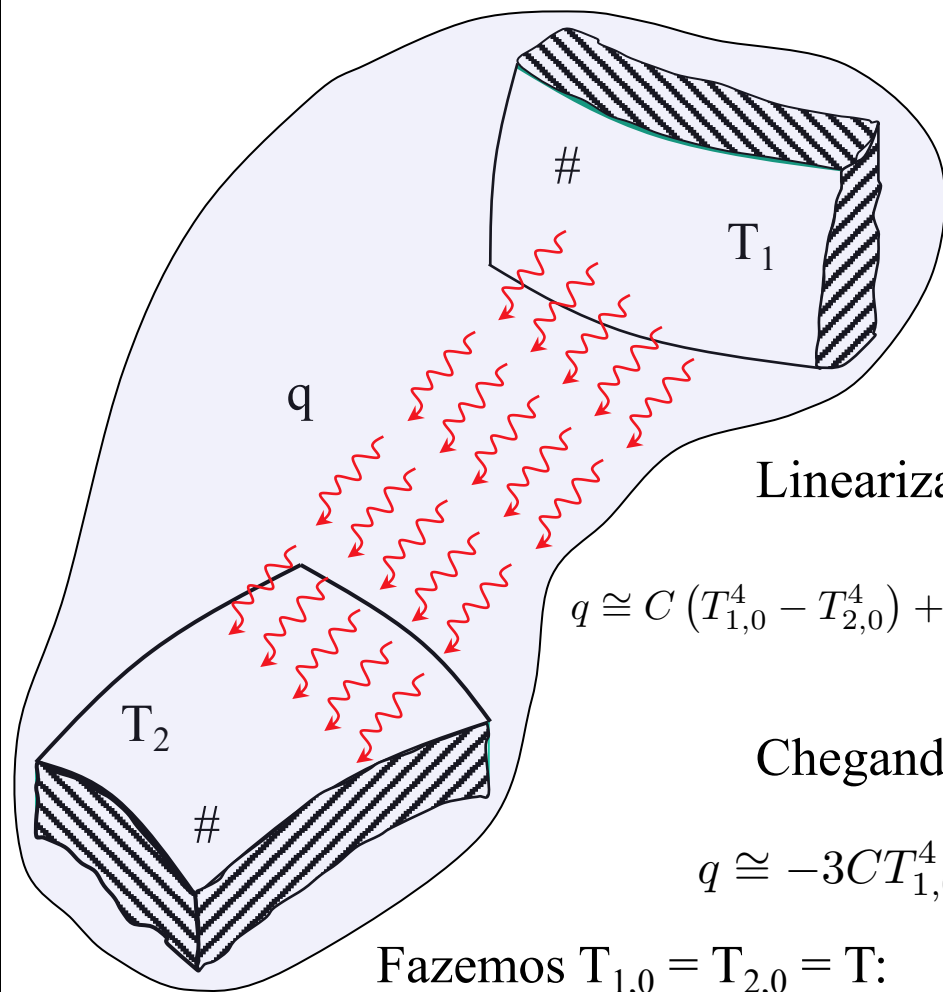
$$q \left(\frac{1}{h_1 A} \right) + q \left(\frac{L}{k A} \right) + q \left(\frac{1}{h_2 A} \right) = T_1 - T_2$$

$$q = \frac{\Delta T}{R_t} = U A \Delta T$$

$$R_t = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_2 A}$$

Cont. ...

A terceira forma de transferência de calor é *a irradiação térmica*:



Neste caso: (Stefan-Boltzmann)

$$q = C (T_1^4 - T_2^4)$$

Linearizamos por Taylor:

$$q \cong C (T_{1,0}^4 - T_{2,0}^4) + \left[\frac{\partial q}{\partial T_1} \right]_{T_{1,0}, T_{2,0}} (T_1 - T_{1,0}) + \left[\frac{\partial q}{\partial T_2} \right]_{T_{1,0}, T_{2,0}} (T_2 - T_{2,0})$$

Chegando a:

$$q \cong -3CT_{1,0}^4 + 3CT_{2,0}^4 + (4CT_{1,0}^3)T_1 - (4CT_{2,0}^3)T_2$$

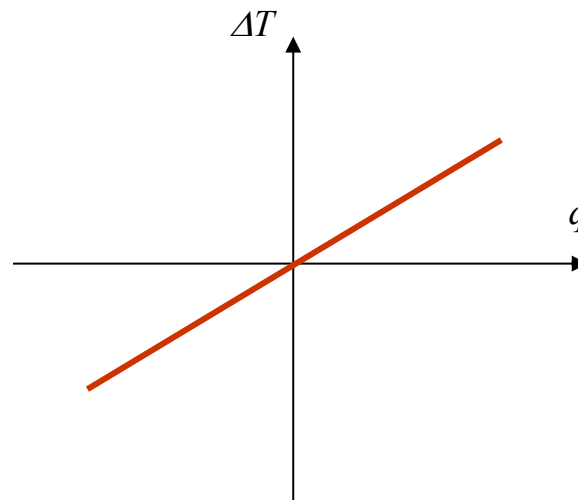
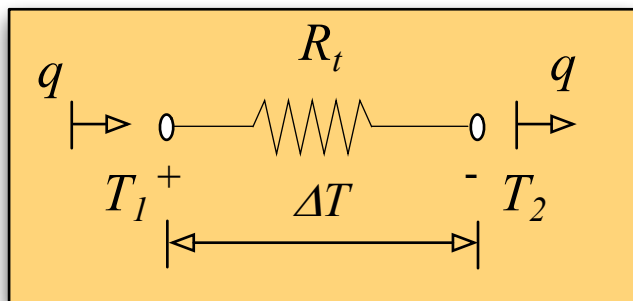
Fazemos $T_{1,0} = T_{2,0} = T$:

$$q \cong 4CT^3(T_1 - T_2)$$

$$R_t \cong \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{4CT^3}$$

Cont. ...

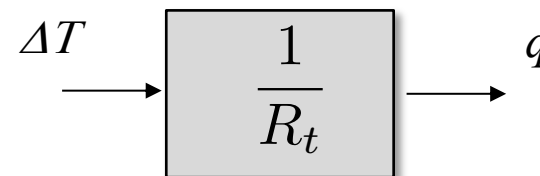
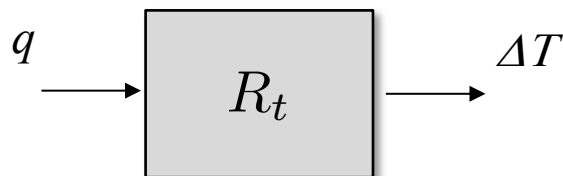
Propriedades do elemento resistência térmica puro e ideal



$$\Delta T = R_t q$$

$\mathcal{L}$
 $\downarrow$

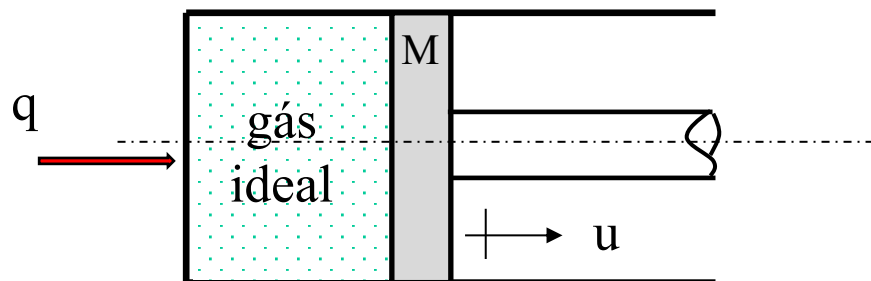
$$\Delta T(s) = R_t Q(s)$$



O Elemento Capacitância Térmica

Efeito Físico: Armazenamento de energia térmica (Interna)

Iniciamos o estudo deste conceito apreciando o seguinte exemplo



Portanto, ao fornecer calor ao sistema aumenta sua energia interna ΔU , aumentando assim a temperatura do gás, além de movimentar o êmbolo (trabalho mecânico). E, como expressa a 1ª Lei da Termodinâmica

$$q = \Delta U + \tau$$

Cont. ...

De forma geral, modelos matemáticos de sistemas térmicos derivam de um balanço de energia do tipo:

$$\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{da Energia} \\ \text{Armazenada} \\ \text{no Sistema} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do Fluxo de Calor} \\ \text{de Entrada} \\ \text{no Sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do Fluxo de Calor} \\ \text{de Saída} \\ \text{do Sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do Fluxo de Calor} \\ \text{Gerado} \\ \text{no Sistema} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Taxa de Variação} \\ \text{do Trabalho} \\ \text{Gerado no (ou} \\ \text{pelo) Sistema} \end{array} \right]$$

Matematicamente esta lei de balanço energético pode ser escrita como:

$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = q_i(t) - q_o(t) + q_g(t) + \frac{d\tau}{dt}$$

onde ρ , c_p e V são a densidade, calor específico e volume do sistema, respectivamente.

Cont. ...

Se assumirmos agora que os corpos aqui tratados são constituídos de materiais tal que:

- Um incremento na energia térmica não provoca quantidades significativas de trabalho realizado sobre o sistema ou pelo sistema
- O mesmo incremento de energia térmica não provoca grandes mudanças na energia cinética das moléculas do corpo
- A distribuição de temperatura no corpo é uniforme, implicando que suas propriedades também sejam constantes (difícil de se atingir para sólidos !)

A equação anterior escreve da seguinte forma

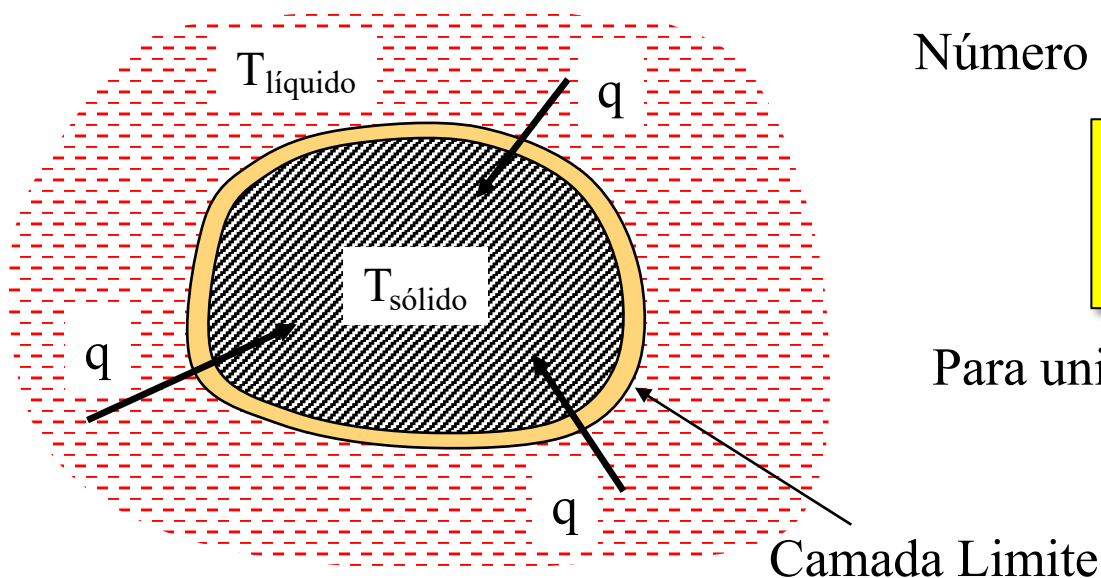
$$\rho c_p V \frac{dT}{dt} = q_i(t) - q_o(t)$$

Cont. ...

E, a partir desta última expressão podemos definir a relação entre o gradiente de temperatura e o fluxo de energia sob a forma de calor para o *elemento capacitância puro e ideal*

$$T - T_0 = \frac{1}{C_t} \int_0^t q \, dt$$

onde C_t é o valor da capacitância do corpo. Sobre a homogeneidade da temperatura:



Número de Biot:

$$N_B = \frac{hL}{k}$$

Para uniformidade de temperatura:

$$N_B < 0,1$$

Cont. ...

$$\Delta T = \frac{1}{C_t} \int_0^t q \, dt \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \Delta T(s) = \frac{1}{C_t} \frac{Q(s)}{s}$$

Representação e Curva Característica

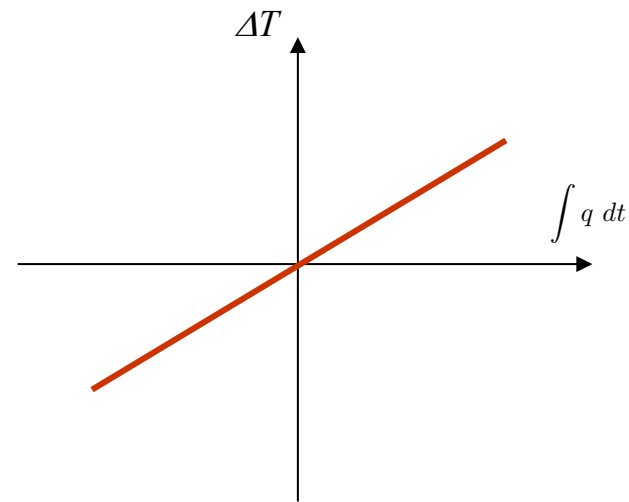
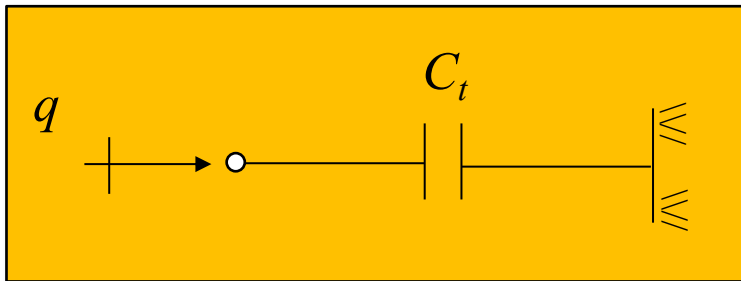
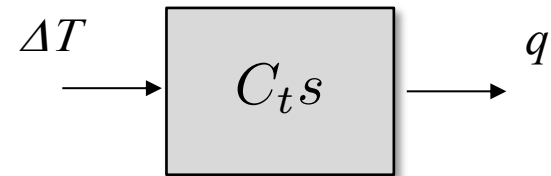
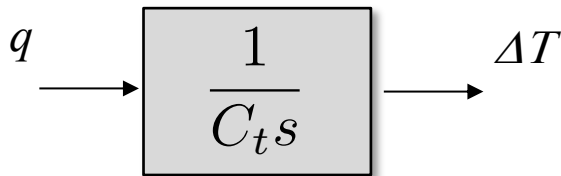
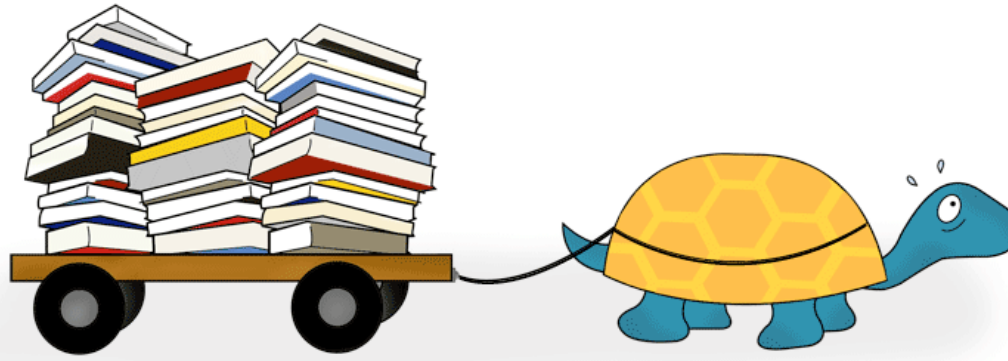


Diagrama de Blocos e F.T.

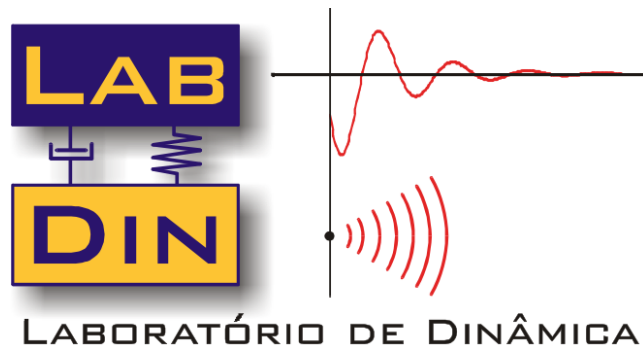


FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

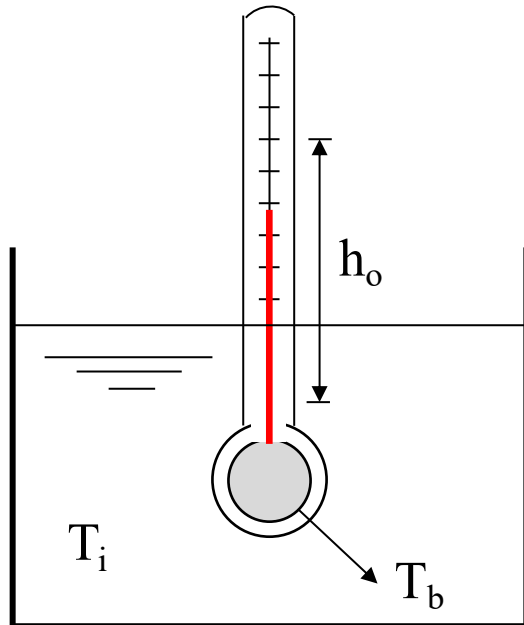


SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Térmicos
Exemplos

Exemplo 1 : Modelagem de um Termômetro de Bulbo

A figura mostra um termômetro de mercúrio imerso em um banho. Obtenha a F.T. relacionando a altura do mercúrio na haste h_o com a temperatura do banho T_i



Hipóteses Simplificadoras

- 1-) A quantidade de mercúrio no capilar é desprezível
- 2-) A parede do bulbo e a película de fluido são resistências puras
- 3-) O coeficiente global de condução térmica é constante
- 4-) A área de troca de calor é constante
- 5-) Não há perdas térmicas através da haste
- 6-) O calor específico do Hg é constante
- 7-) O mercúrio é considerado uma capacitância térmica pura
- 8-) Vamos assumir relação linear entre h_o e T_b

Pela hipótese 8 podemos escrever

$$h_o = \frac{k_e V_b}{A_c} T_b \qquad h_o = k T_b$$

$$q_i dt - q_o dt = dU$$

Cont. ...

Assumindo que o sistema esteja termicamente isolado do meio $q_o = 0$

$$U A_b (T_i - T_b) dt - 0 = dU_b$$

Agora, para resolvermos dU_b ou seja a energia que fica armazenada no bulbo, podemos assumir que esta energia seja exclusivamente na forma de calor sensível (sem que haja mudança de estado), e então podemos usar a equação fundamental da calorimetria

$$U_b = mc\Delta T$$

e, na forma diferencial

$$dU_b = m_{Hg} c_{Hg} dT_b$$

Logo

$$U A_b (T_i - T_b) dt = m_{Hg} c_{Hg} dT_b$$

Ou ainda

$$U A_b T_i dt - U A_b T_b dt = \rho V_b c dT_b$$

Cont. ...

Lembrando da relação entre a altura do Hg na coluna capilar e a temperatura do bulbo

$$h_o = kT_b$$

Temos

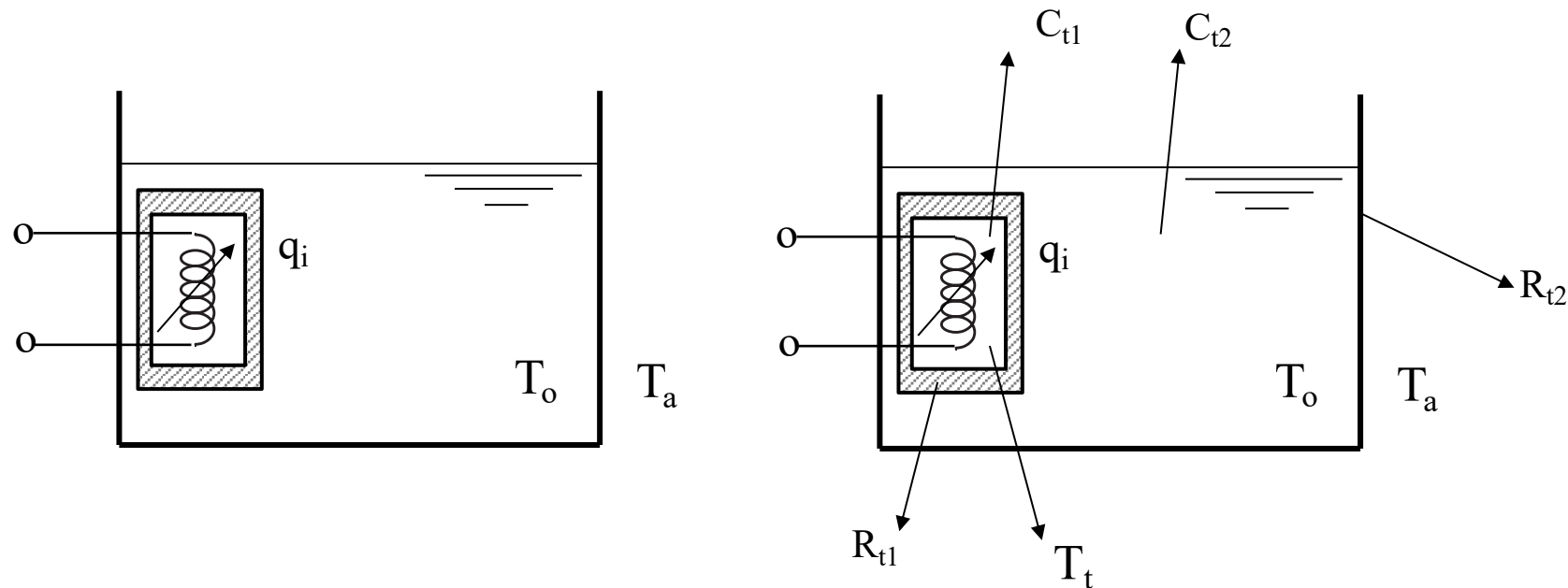
$$\frac{\rho V_b c}{k} \frac{dh_o}{dt} + \frac{U A_b}{k} h_o = U A_b T_i$$

E, aplicando a T.L. com condições iniciais nulas chegamos a F.T. procurada

$$\frac{H_o(s)}{T_i(s)} = \frac{\frac{kV_b}{A_b c}}{\frac{\rho V_b}{UA_b} s + 1}$$

Exemplo 2 : Modelagem de um Sistema de Aquecimento

Para o sistema de aquecimento mostrado determine a F.T. $T_o(s)/Q_i(s)$



Consideramos todos os elementos puros e ideais. Então temos para este modelo duas capacitâncias térmicas (C_{t1} e C_{t2}), duas resistências térmicas (R_{t1} e R_{t2}) e duas entradas q_i e T_a . Para a j -ésima capacitância térmica podemos escrever

$$q_{ij} dt - q_{oj} dt = dU_j \quad j = 1 \dots N$$

Cont. ...

E, baseado na equação da capacitância térmica podemos escrever

$$dU_j = C_{tj} dT_j$$

E a equação do balanço de energia fica então

$$q_{ij} dt - q_{oj} dt = C_{tj} dT_j \quad j = 1 \dots N$$

Aplicando esta equação para C_{t1} e C_{t2} temos

$$q_i dt - \frac{T_t - T_o}{R_{t1}} dt = C_{t1} dT_t$$

$$\frac{T_t - T_o}{R_{t1}} dt - \frac{T_o - T_a}{R_{t2}} dt = C_{t2} dT_o$$

Reescrevendo estas duas equações

$$\begin{bmatrix} C_{t1} & 0 \\ 0 & C_{t2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_t \\ \dot{T}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{t1}} & -\frac{1}{R_{t1}} \\ -\frac{1}{R_{t1}} & \frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_{t2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_t \\ T_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_i \\ \frac{1}{R_{t1}} T_a \end{Bmatrix}$$

Que, conforme já expresso é um sistema com duas entradas. Como queremos a F.T. em relação à entrada q_i , fazemos $T_a = 0$ após transformarmos o sistema de EDO acima usando a T.L.

$$\begin{bmatrix} C_{t1}s + \frac{1}{R_{t1}} & -\frac{1}{R_{t1}} \\ -\frac{1}{R_{t1}} & C_{t2}s + \frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_{t2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_t(s) \\ T_o(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i(s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{T_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{R_{t2}}{R_{t1}R_{t1}C_{t1}C_{t2}s^2 + [R_{t1}C_{t1} + R_{t2}(C_{t1} + C_{t2})]s + 1}$$

FIM

Bom Estudo !

