UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LAB DIN
LABORATÓRIO DE DINÂMICA

# SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
# SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

## *Modelagem de Sistemas Fluídicos*
## *Teoria*


Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

# Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar elementos teóricos para a modelagem de Sistemas Fluídicos no contexto da Dinâmica de Sistemas. Os seguintes elementos serão estudados:

- Resistência Fluídica
- Capacitância Fluídica
- Inércia Fluídica

Bibliografia:


1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

# Introdução

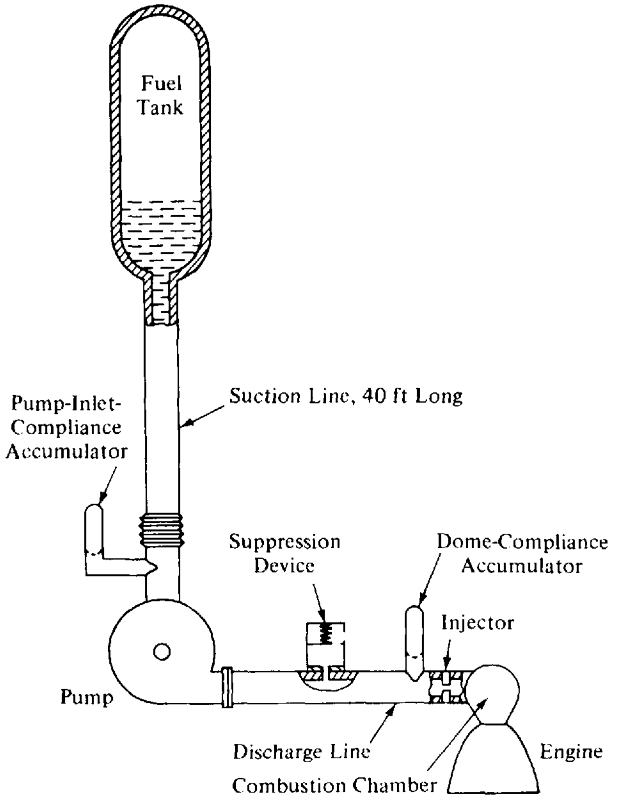
Embora para sistemas mecânicos, elétricos e eletromecânicos a abordagem de modelagem por parâmetros concentrados (*lumped*) conduza a modelos confiáveis, no caso de sistemas fluídicos (e também os térmicos) requer-se um tratamento mais aprofundado. Algumas características dos sistemas fluídicos:

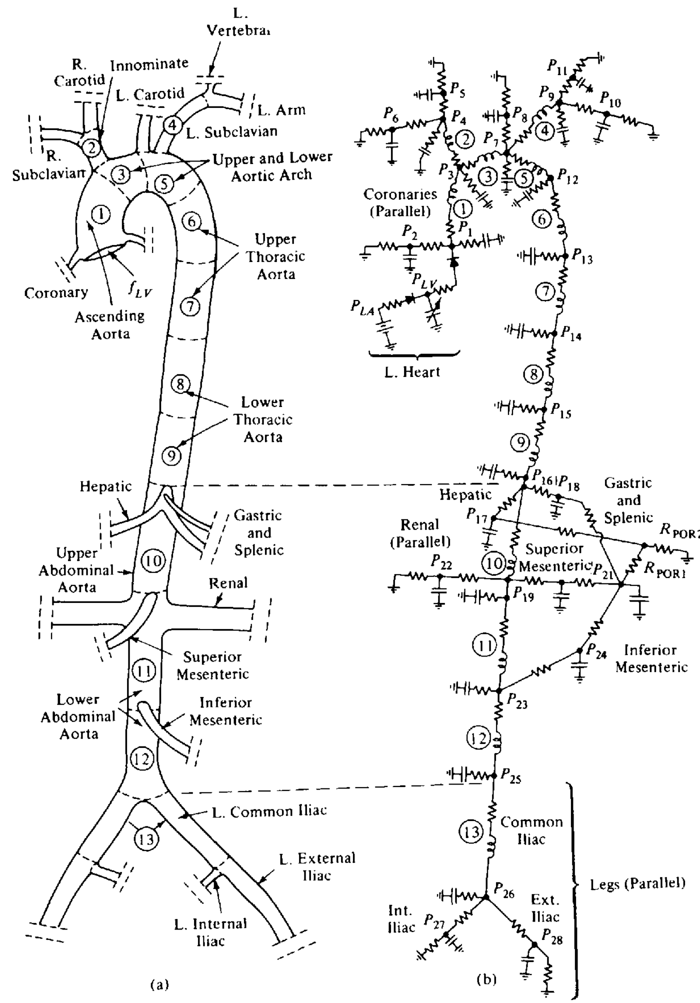
- ✓ Seguem um comportamento padrão similar aos sistemas mecânicos
- ✓ Surgem dificuldades em se aplicar o conceito de parâmetros concentrados, principalmente pelo fato do fluído não possuir forma definida
- ✓ Modelos mais acurados são necessários (modelagem CFD)

Para o presente estudo as variáveis físicas de interesse são:

- ✓ Pressão média do fluído [$Pa = N/m^2$]
- ✓ Vazão do fluído (taxa de variação volumétrica) [$m^3/s$]
- ✓ Área de secção transversal do conduto [$m^2$]
- ✓ Velocidade média do fluxo [$m/s$]

# Dois Exemplos



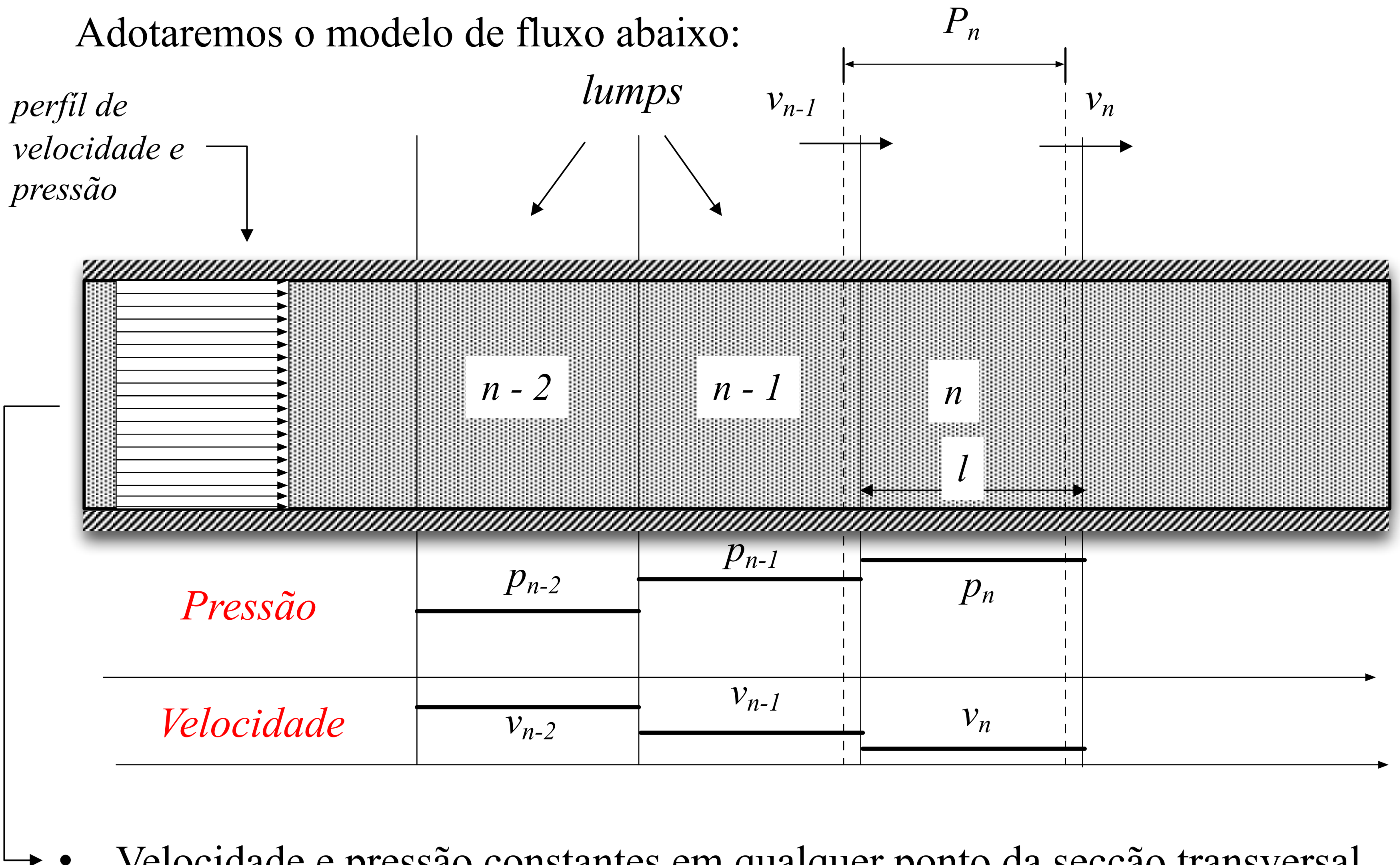

(a) Modelo de sistema de abastecimento de combustível de um foguete[1]

(b) Modelo de sistema de fluxo arterial humano[1]

1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

# Modelo de Fluxo Uni-Dimensional

Adotaremos o modelo de fluxo abaixo:




- Velocidade e pressão constantes em qualquer ponto da secção transversal

# Cont. ...

Para a descrição de um elemento discreto (*lump*) aplicaremos:

- Lei da Conservação da Massa e 2a Lei de Newton
- Durante um intervalo de tempo *dt* para um determinado elemento:

| Fluxo de Massa in | - | Fluxo de Massa out | = | Massa Armazenada |
|---|---|---|---|---|

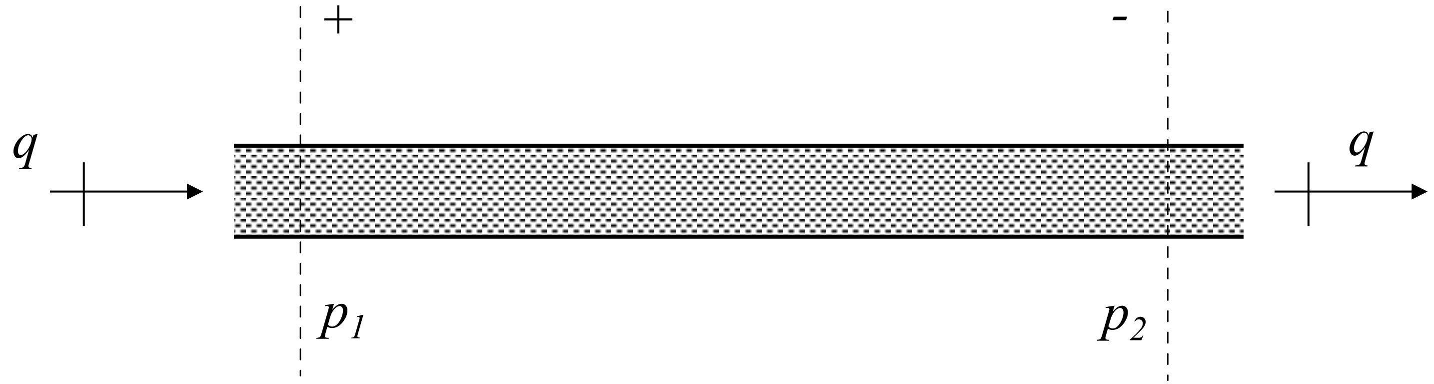
- De forma análoga a resultantes de forças (*PA*) entre os extremos de um elemento deve-se igualar à componente inercial do elemento (*ma*).
- Ao aplicarmos a conservação da massa teremos que levar em consideração a compressibilidade do fluído, através da propriedade denominada *Bulk Modulus*, que é entendida como uma medida da compressibilidade e dada por

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$$

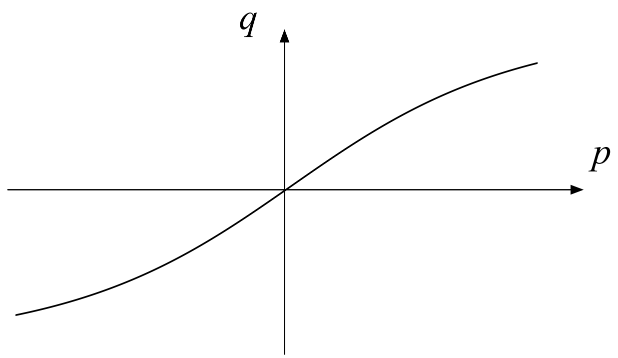
# O Elemento Resistência Fluídica

Efeito físico: modelagem da dissipação de energia sob a forma de atrito

Partido-se de um modelo fenomenológico, mostramos abaixo um fluxo em conduto reto




Geralmente, a relação entre *p* e *q* é não linear

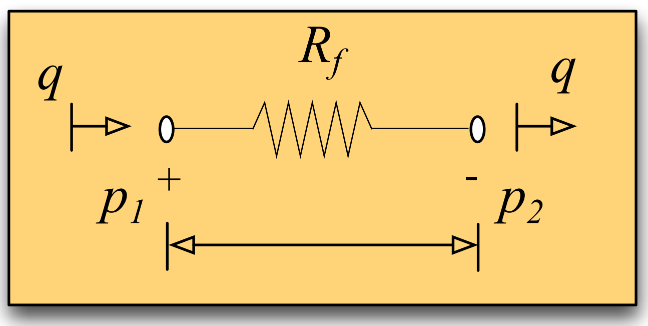


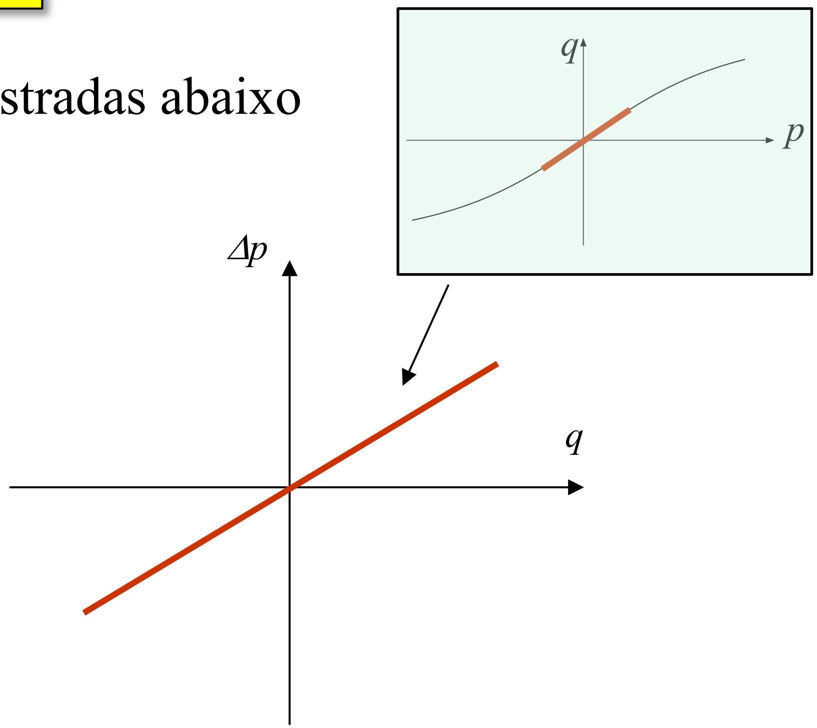
# Cont. ...

O elemento resistência fluídica puro e ideal é definido pela seguinte relação entre pressão e vazão

$$R_f = \frac{\Delta p}{q} = \frac{p_1 - p_2}{q}$$

Sua representação e curva característica são mostradas abaixo



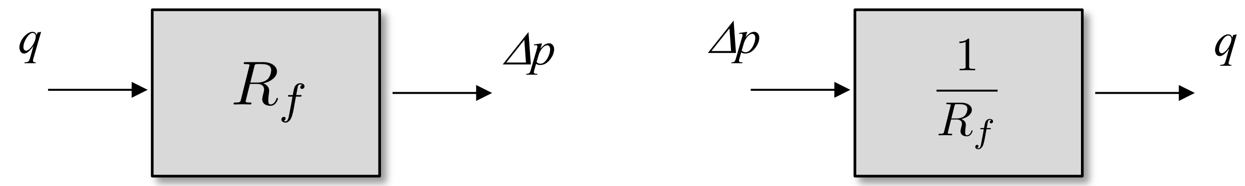



# Cont. ...

Para a definição da F.T. inicialmente aplicamos a T.L. à relação i/o

$$\mathcal{L}(\Delta p) = \mathcal{L}(R_f q) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P(s) = R_f Q(s)}$$

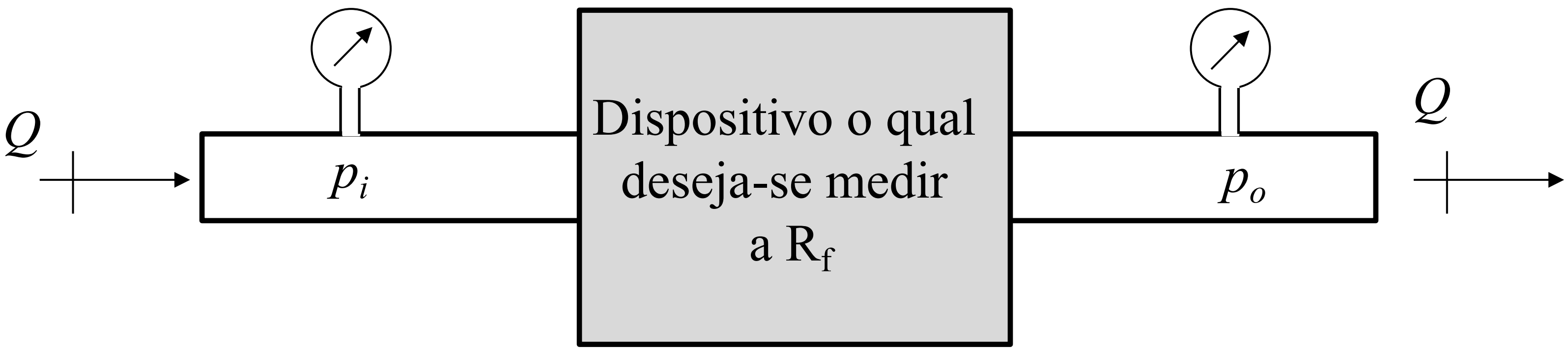
E, então podemos definir duas F.T.



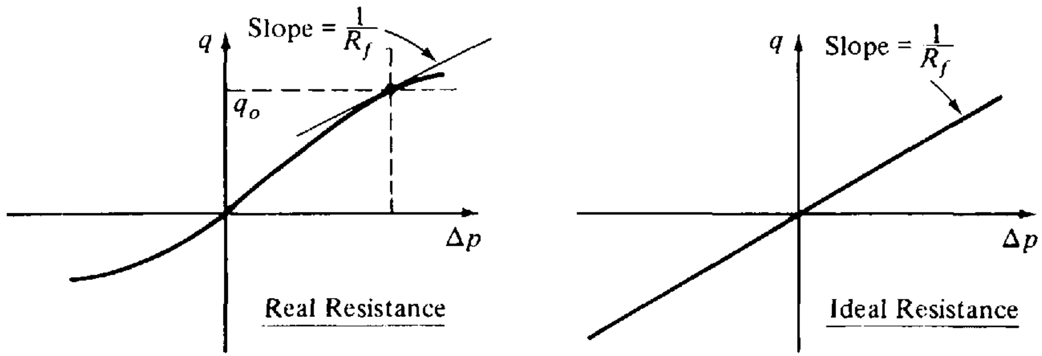

Resistência fluídica: Elemento de *ordem zero* (ganho constante !)

# Cont. ...

Experimentalmente podemos obter uma estimativa da $R_f$ através de um experimento simples:




E, a partir das medições de pressão e vazão constrói-se um gráfico e a partir dele obtem-se o valor da $R_f$ do circuito, que pode-se aproximar da $R_f$ do dispositivo




1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

# Cont. ...

Podemos também estimar a resistência fluídica teóricamente. Par isto, precisamos determinar as condições do fluxo, a saber:

*razão entre forças inerciais e viscosas*

(a) Fluxo Laminar

- Baixas velocidades
- Movimento ordenado do fluxo
- Governado por efeitos viscosos
- Efeitos inerciais desprezados

(b) Fluxo Turbulento

- Velocidades mais altas
- Movimento desordenado
- Governado por efeitos inerciais

Número de Reynolds

$$N_R = \frac{\rho D v}{\mu}$$

$N_R$ < 2000 – Laminar

$N_R$ > 4000 - Turbulento

# Cont. ...

Condições de fluxo laminar produzem resistências fluídicas muito próximas do comportamento linear, podendo ser calculadas teóricamente. Exemplo: Um tubo capilar liso, reto e de secção circular temos

$$q = \frac{\pi D^4}{128\mu L}\,\Delta p$$

Logo, para este duto

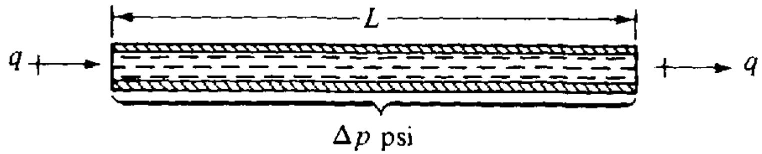
$$R_f = \frac{\Delta p}{q} = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

ρ – densidade do fluído
D – Diâmetro do tubo
v – velocidade do fluxo
μ – viscosidade do fluído
q – vazão do fluído

Para escoamentos turbulentos

$$\Delta p = \frac{0,242 L\mu^{0,25}\rho^{0,75}}{D^{4,75}}\,q^{1,75}$$

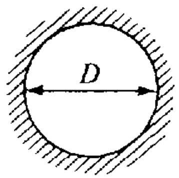
# Cont. ... Resistências fluídicas para fluxo em regime laminar



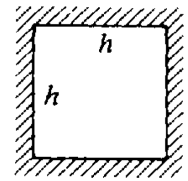

$\frac{\text{inch}^3}{\text{sec}}$

$$R_f \triangleq \frac{\Delta p}{q}$$

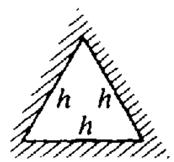
$$R_f = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

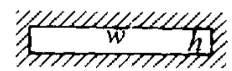



$$R_f = \frac{28.4\mu L}{h^4}$$




$$R_f = \frac{185\mu L}{h^4}$$



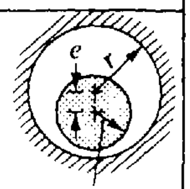




$$R_f = \frac{12\mu L}{wh^3\left[1 - \frac{192h}{\pi^5 w}\tanh\frac{\pi w}{2h}\right]}$$

if $w >> h$:

$$R_f = \frac{12\mu L}{wh^3}$$

$$R_f = \frac{6\mu L}{\pi r c^3\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{e}{c}\right)^2\right]}$$




$r - c$

$c << r$

if $e = 0$:

$$R_f = \frac{6\mu L}{\pi r c^3}$$

1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

# O Elemento Capacitância Fluídica

Efeito Físico: Armazenamento de energia (massa) fluídica

- Um fluído por si só apresenta o efeito da capacitância: Compressibilidade
- Dispositivos mecânicos podem gerar efeitos capacitivos
- Em geral um elemento fluídico no qual a energia armazenada é função da pressão pode ser pensado como uma capacitância fluídica, análoga à elétrica e mecânica

O elemento capacitância fluídica puro e ideal $C_f$ pode ser definido como

$$C_f = \frac{V}{\Delta p} \qquad C_f = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Como buscamos uma relação entre pressão e vazão podemos escrever

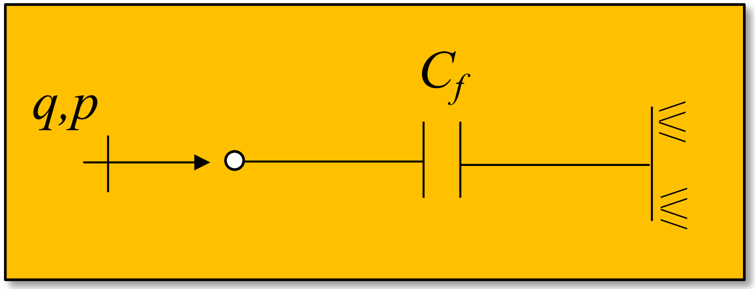
$$V = \int_{t_0}^{t} q \; dt$$

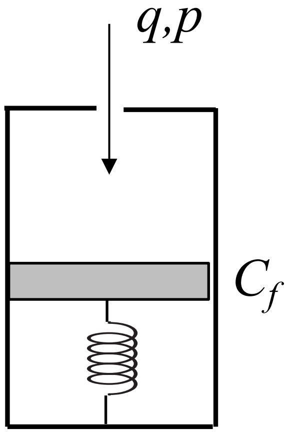
# Cont. ..

E, combinando estas duas expressões temos

$$\Delta p = \frac{1}{C_f}\int_{t_0}^{t} q\, dt$$

onde $C_f$ é o valor da capacitância fluídica, $V$ o volume armazenado, $\Delta p$ o diferencial de pressão e $q$ a vazão. Sua representação

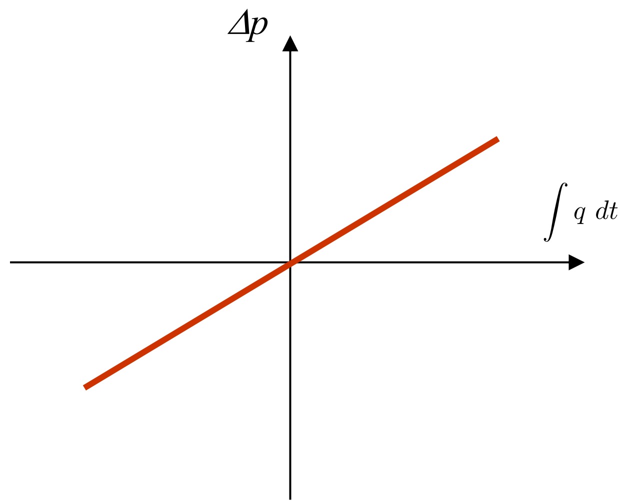


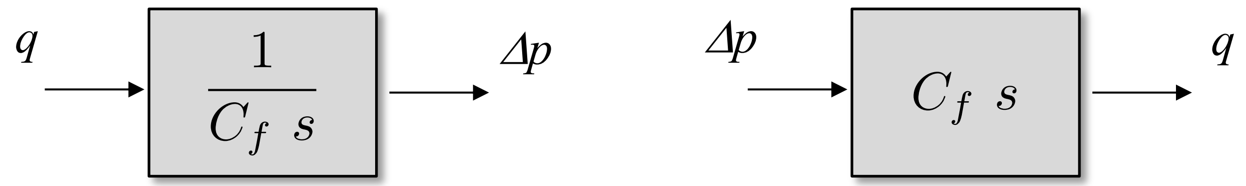



# Cont. ..

Curva característica e F.T. para o elemento capacitância fluídica

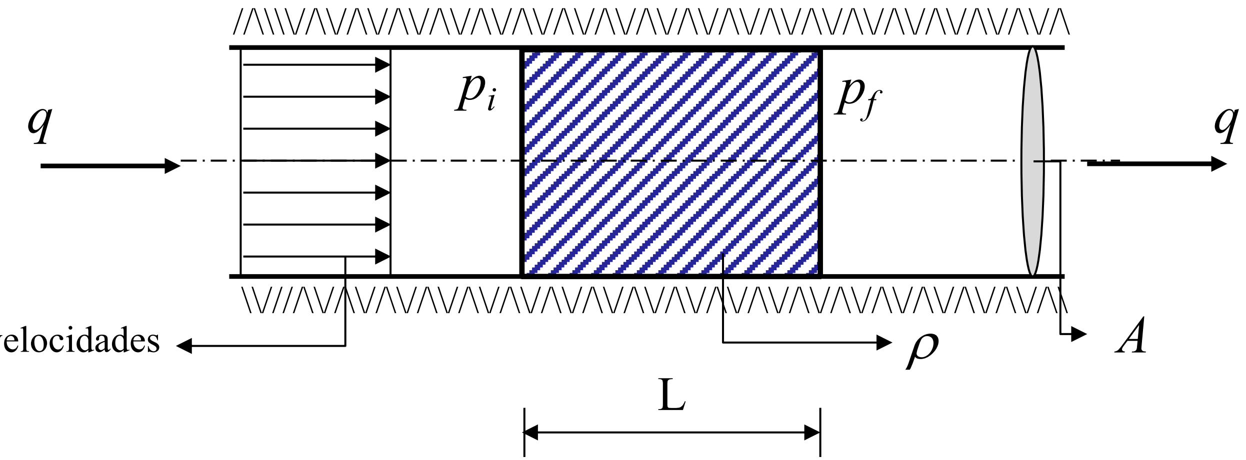
$$\Delta P(s) = \frac{1}{C_f}\mathcal{L}\left(\int_{t_0}^{t} q\ dt\right) = \frac{1}{C_f}\frac{Q(s)}{s}$$



# O Elemento Inércia Fluídica

Efeito Físico: Modelagem da propriedade da inércia do fluxo




Hipóteses Simplificadoras:

- Elementos discretos de tamanho finito
- Fluxo uni-dimensional com perfíl de velocidades constante e idênticas
- Elemento discreto tratado como um "corpo rígido"

$$m = \rho A L$$

# Cont. ...

Para o elemento discreto em seu movimento unidirecional:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = ma$$

A resultante de forças está relacionada à diferença de pressão antes e depois do elemento tal que

$$\sum_{i=1}^{N} f_i = A\Delta p$$

$$A\Delta p = \rho A L \frac{dv}{dt}$$

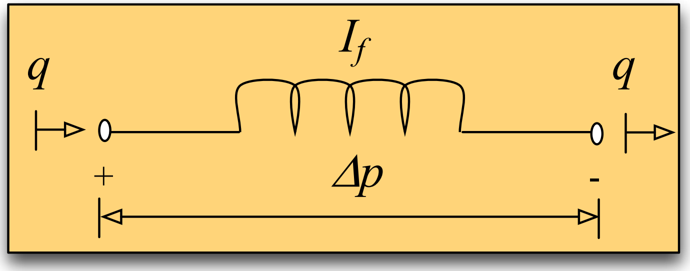
e, levando-se em conta que: $q = vA$

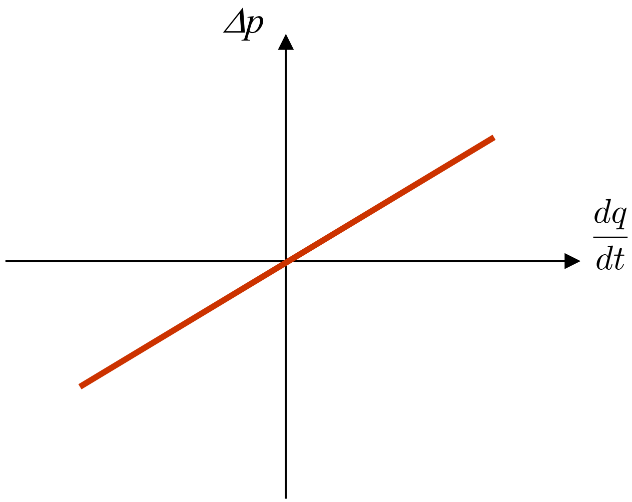
$$\Delta p = \frac{\rho L}{A}\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{\Delta p = I_f \frac{dq}{dt}} \qquad \boxed{I_f = \frac{\rho L}{A}}$$

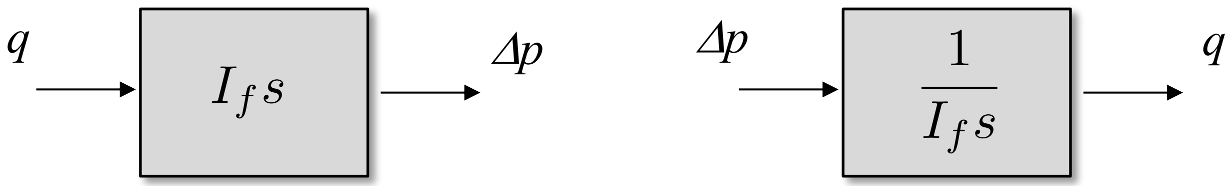
# Cont. ...

Para a F.T. aplicamos a T. L. à esta última equação obtendo assim

$$\mathcal{L}(\Delta p) = \Delta P(s) = I_f \mathcal{L}\left(\frac{dq}{dt}\right) = I_f s Q(s)$$

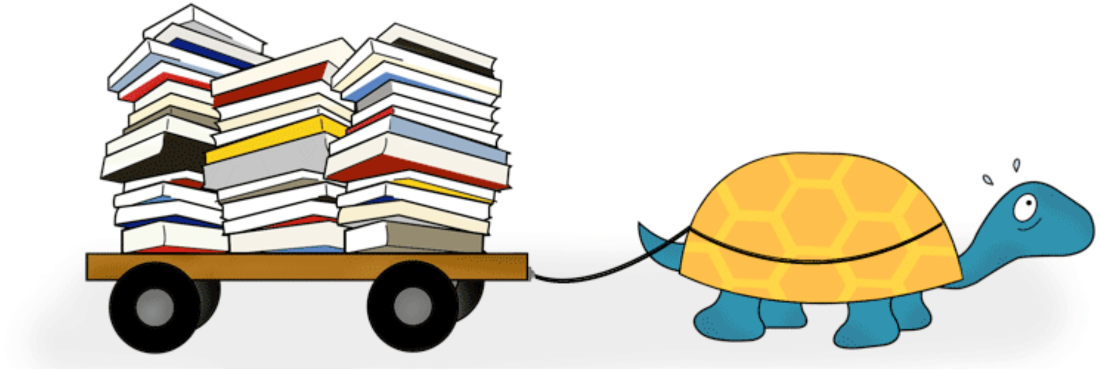


# FIM

## Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

# SEM 0533 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos I
# SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

## *Modelagem de Sistemas Fluídicos*
## *Exemplos*

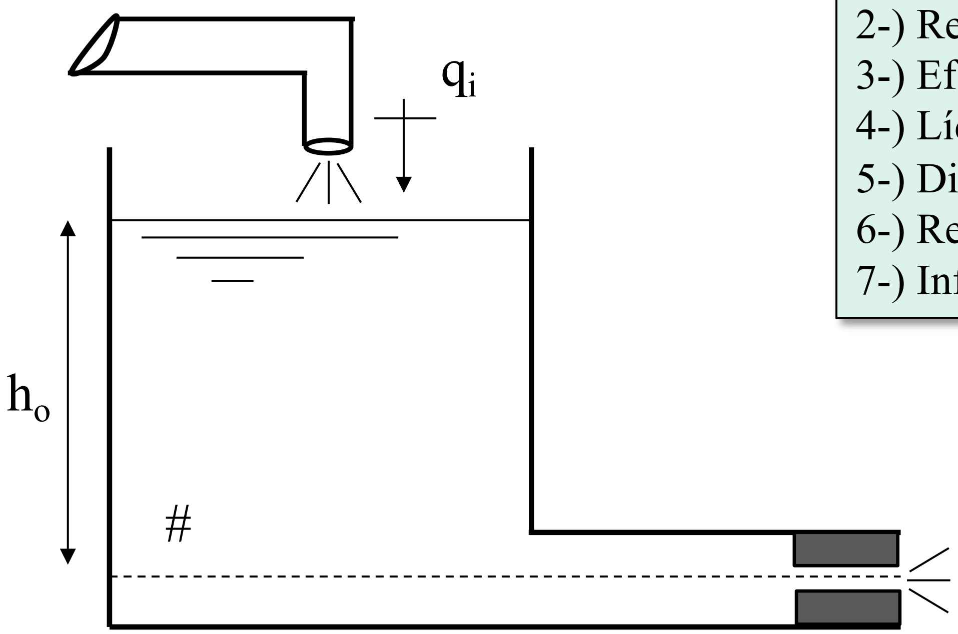

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC • USP

# Exemplos de Modelagem

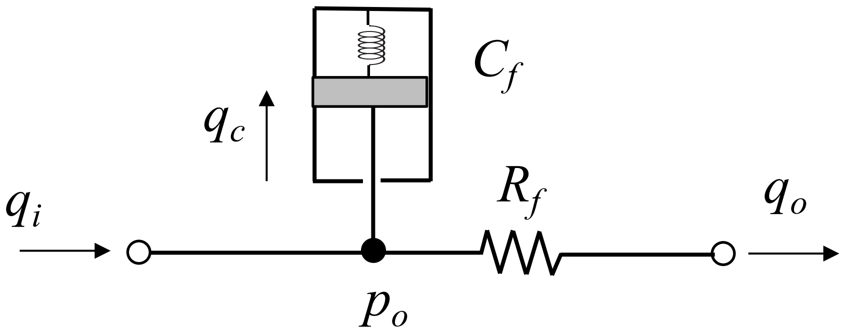
Exemplo 1: A figura mostra um sistema fluídico composto por um tanque aberto que é alimentado por uma fonte de vazão ($q_i$) e descarga para a atmosfera. Formule hipóteses simplificadoras para o modelo e determine a F.T. relacionando a altura da coluna de fluído $h_o$ com a vazão de entrada $q_i$.

Hipóteses:

1-) Tubo de descarga é curto: inércia desprezada
2-) Resistência fluídica ao longo do tubo desprezível
3-) Efeitos inerciais e atrito no tanque desprezíveis
4-) Líquido homogêneo e incompressível
5-) Dimensões geométricas constantes
6-) Resistência fluídica concentrada na extremidade
7-) Influências externas invariantes ($p_{atm}$, $t_{atm}$)




Modelo Geométrico




Modelo Físico

# Exemplo 1: Cont. ...

Portanto, podemos pensar num modelo composto pela capacitância do tanque e pela resistência no local de descarga, tendo como entrada a vazão e saída o nível vertical do fluído no tanque. Para a obtenção do modelo matemático, aplicamos lei da conservação da massa para o tanque num intervalo dt, ou seja

$$\dot{m}_i \, dt - \dot{m}_o \, dt = dm$$

onde $m_i$ e $m_o$ são respectivamente a massa de fluído que entra e sai do tanque. Devido à hipótese 2 (incompressibilidade do fluído) podemos trocar a variável massa por volume, tendo assim

$$q_i \, dt - q_o \, dt = dV$$

e como a variação do volume é dada pela variação de $h_o$ podemos ainda escrever:

$$q_i \, dt - q_o \, dt = A dh_o$$

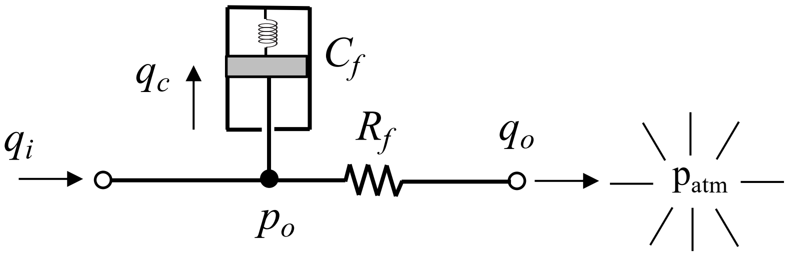
sendo $A$ a área da secção transversal do tanque. Temos que resolver $q_o$ !

# Exemplo 1: Cont. ...

Vamos considerar dois casos para podermos resolver $q_o$:

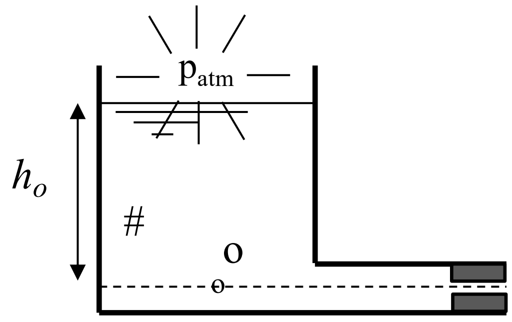
<u>1º Caso</u>: A descarga para a atmosfera é feita através de uma resistência fluídica linear (seria uma hipótese a mais feita durante a modelagem !). Assim

$$q_o = \frac{\Delta p}{R_f} = \frac{1}{R_f}\left(p_o - p_{atm}\right)$$




e a pressão no ponto *o* pode ser escrita usando a propriedade dos pontos isóbaros

$$p_o = \rho g h_o + p_{atm}$$




Portanto:

$$q_o = \frac{1}{R_f}\rho g h_o$$

# Exemplo 1: Cont. ...

Retornando à equação para o modelo temos

$$q_i\ dt - \frac{1}{R_f}\rho g h_o\ dt = A\ dh_o$$

$$A\frac{dh_o}{dt} + \frac{1}{R_f}\rho g\ h_o = q_i$$

e aplicando a T.L. com condições iniciais nulas

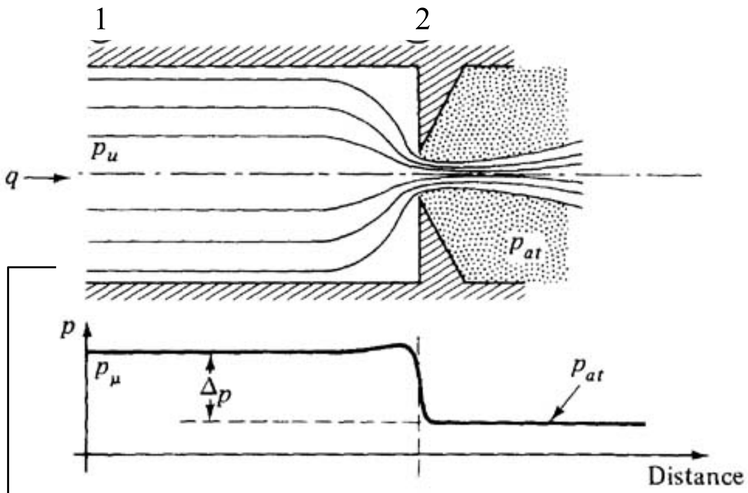
$$\left(As + \frac{1}{R_f}\rho g\right) H_o(s) = Q_i(s)$$

da qual obtemos a F.T. desejada

$$\boxed{\frac{H_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{R_f}{\rho g}}{\frac{AR_f}{\rho g}s + 1}}$$

# Exemplo 1: Cont. ...

2º Caso: A descarga para a atmosfera é feita através de um orifício[1]




Usando a Equação de Bernoulli

$$p_1 q + \frac{\rho v_1^2 q}{2} = p_2 q + \frac{\rho v_2^2 q}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Agora como $q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ temos

$$q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad q \cong C_d A_o \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

# Exemplo 1: Cont. ...

Então, para o presente caso

$$q_o = C_d A_o \sqrt{\frac{2(p_o - p_{atm})}{\rho}} = C_d A_o \sqrt{2 g h_o} = \boxed{k_o \sqrt{h_o}}$$

Retornando à EDO temos

$$q_i \; dt - k_o \sqrt{h_o} \; dt = A \; dh_o$$

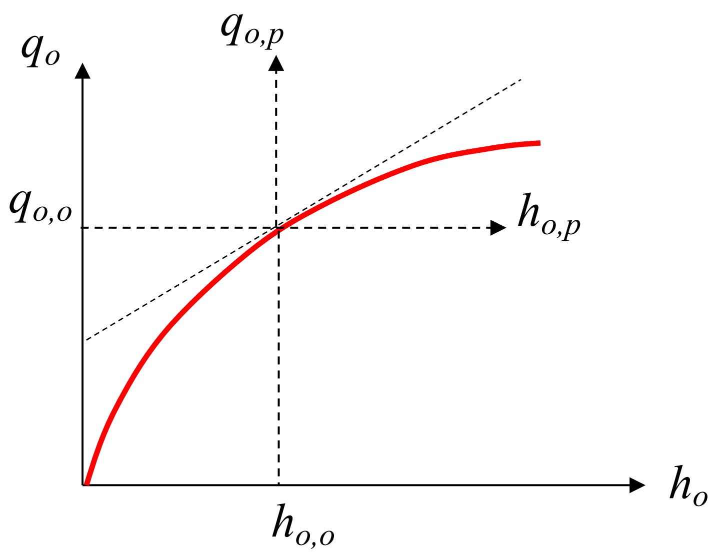
$$\boxed{A \frac{dh_o}{dt} + k_o \sqrt{h_o} = q_i}$$

Que claramente é uma EDO não linear ! Para a solução da EDO temos duas saídas:

- Resolver a EDO não linear através de técnicas numéricas
- Obter uma EDO linearizada em torno de um ponto de operação (única saída para obtermos a F.T. !)

# Exemplo 1: Cont. ...

Escolhemos um ponto de operação ($h_{o,o}$, $q_{o,o}$)




Expandimos a função não linear em torno deste ponto: Séries de Taylor

$$y = f(x) \cong f(x_o) + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_o} \frac{(x - x_o)}{1!}$$

$$y = \sqrt{h_o} \cong \sqrt{h_{o,o}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{o,o}}}(h_o - h_{o,o}) = \sqrt{h_{o,o}} + \frac{h_{o,p}}{2\sqrt{h_{o,o}}}$$

onde: $h_{o,p} = h_o - h_{o,o}$ (perturbação em torno de $h_{o,o}$)

# Exemplo 1: Cont. ...

Usamos a expansão na EDO

$$A\frac{dh_o}{dt} + k_o\sqrt{h_o} = q_i \qquad h_{o,p} = h_o - h_{o,o}$$

Obtendo a seguinte equação

$$A\frac{d(h_{o,p} + h_{o,o})}{dt} + k_o\left(\sqrt{h_{o,o}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{o,o}}}h_{o,p}\right) = q_{i,o} + q_{i,p}$$

Assumindo que no ponto de operação antes da perturbação o nível do tanque era contante, podemos fazer

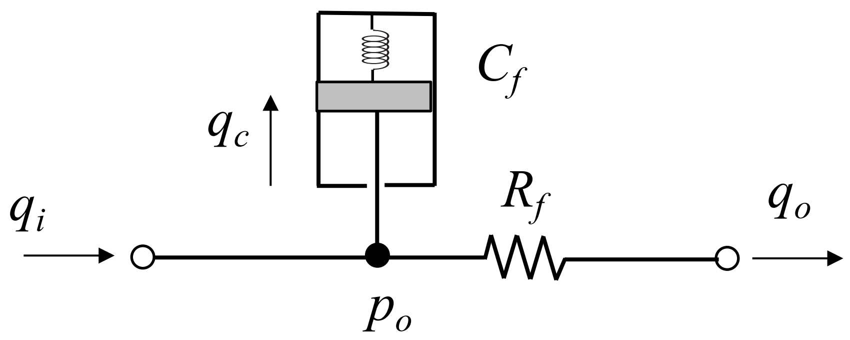
$$q_{i,o} = k_o\sqrt{h_{o,o}}$$

e, então

$$A\frac{dh_{o,p}}{dt} + k_{or}h_{o,p} = q_{i,p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{H_{o,p(s)}}{Q_{i,p}(s)} = \frac{\frac{1}{k_{or}}}{\frac{A}{k_{or}}s + 1}}$$

# Exemplo 1: Cont. ...

Ainda supondo que a resistência fluídica seja linear, podemos resolver o problema de outra maneira




Escrevemos inicialmente

$$q_i = q_c + q_o$$

sendo $q_c$ o acúmulo de fluído devido à capacitância do tanque. Usando a T.L.

$$Q_i(s) - Q_o(s) = Q_c(s)$$

E sabemos:

$$Q_o(s) = \frac{1}{R_f}\Delta P(s) = \frac{1}{R_f}\rho g H_o(s)$$

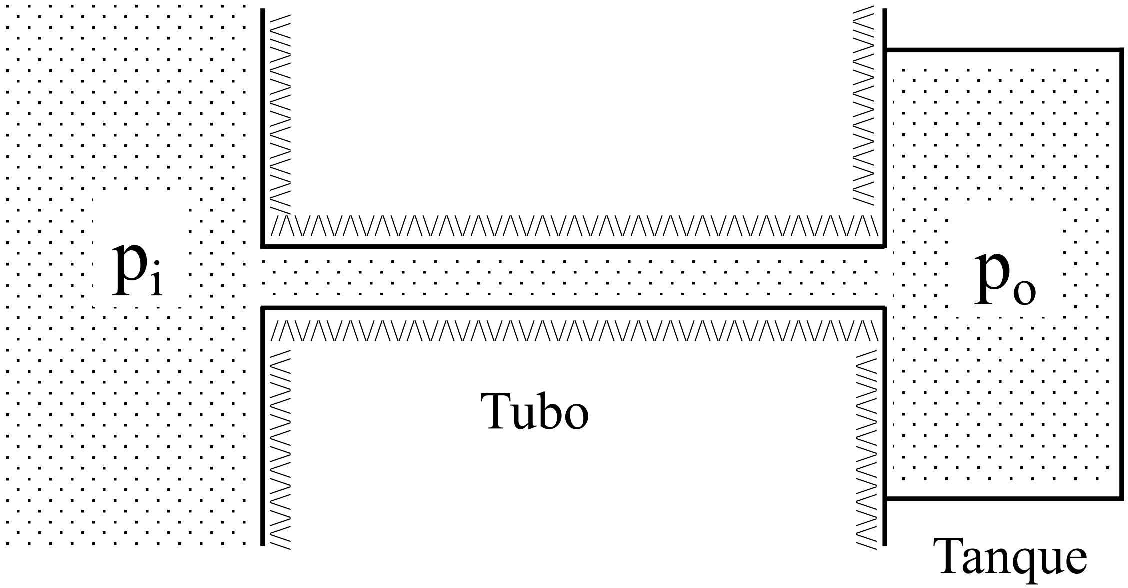
$$Q_c(s) = AsH_o(s)$$

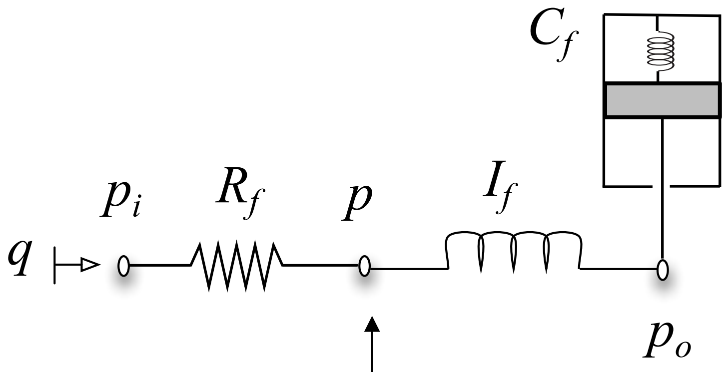
Substituindo-se vem:

$$\boxed{\frac{H_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{R_f}{\rho g}}{\frac{AR_f}{\rho g}s + 1}}$$

# Exemplo 2

Para o sistema de transferência de gás obter a F.T. $P_o(s)/P_i(s)$



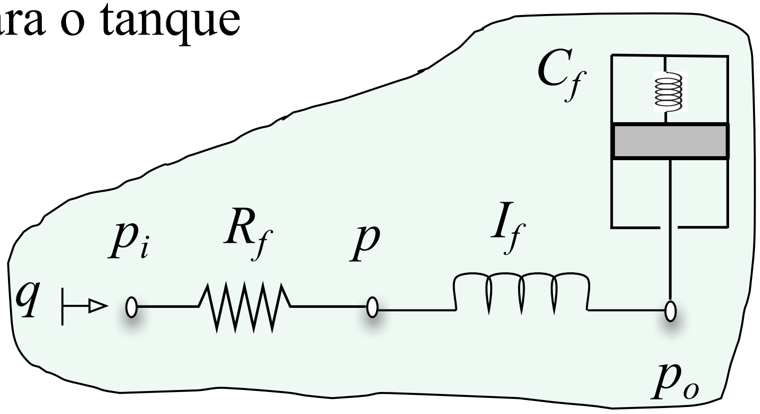




Hipóteses Simplificadoras

- Todas as paredes são rígidas
- Para o tubo considero resistência e inércia
- Gás ideal
- Volume do tubo pequeno comparado ao do tanque
- Variações muito lentas de temperatura (isotérmico)

# Cont. ...

Então podemos aplicar a conservação de massa para o tanque




$$\dot{m}_{in}\ dt - \underbrace{\cancel{\dot{m}_{out}}}_{=0}\ dt = dm$$

Ou também

$$\rho q\ dt = dm$$

Podemos resolver o lado esquerdo da igualdade através do balanço de pressão no ponto de ligação entre $R_f$ e $I_f$

$$p_i - p = R_f q$$

$$p - p_o = I_f \frac{dq}{dt}$$

Precisamos agora resolver para dm, ou seja para a massa de gás acumulada no tanque. Neste caso, pela hipótese do gás ideal podemos escrever

$$p_o V = mRT \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{V}{RT} dp_o$$

# Cont. ...

Logo a EDO para o tanque fica escrita como

$$\rho q = \frac{V}{RT}\frac{dp_o}{dt}$$

Aplicamos Laplace à todas as equações

$$\rho Q(s) = \frac{V}{RT} s\, P_o(s)$$

$$\begin{cases} P_i(s) - P(s) = R_f Q(s) \\ P(s) - P_o(s) = I_f s\, Q(s) \end{cases} +$$

$$P_i(s) - P_o(s) = (I_f s + R_f)\, Q(s)$$

E combinando as duas equações resultantes temos

$$\boxed{\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{\frac{V I_f}{\rho RT} s^2 + \frac{V R_f}{\rho RT} s + 1}}$$

# FIM

## Bom Estudo !