MAC0317/MAC5920

Introdução ao Processamento de Sinais Digitais

Capítulo 5: Janelamento e Localização

Seção 5.1 - Visão geral: Não-localidade da DFT

Exemplo 5.1

Considere dois sinais $f(t)$ e $g(t)$ definidos em $0 \leq t \leq 1$ como

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi(96)t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(235)t)$$

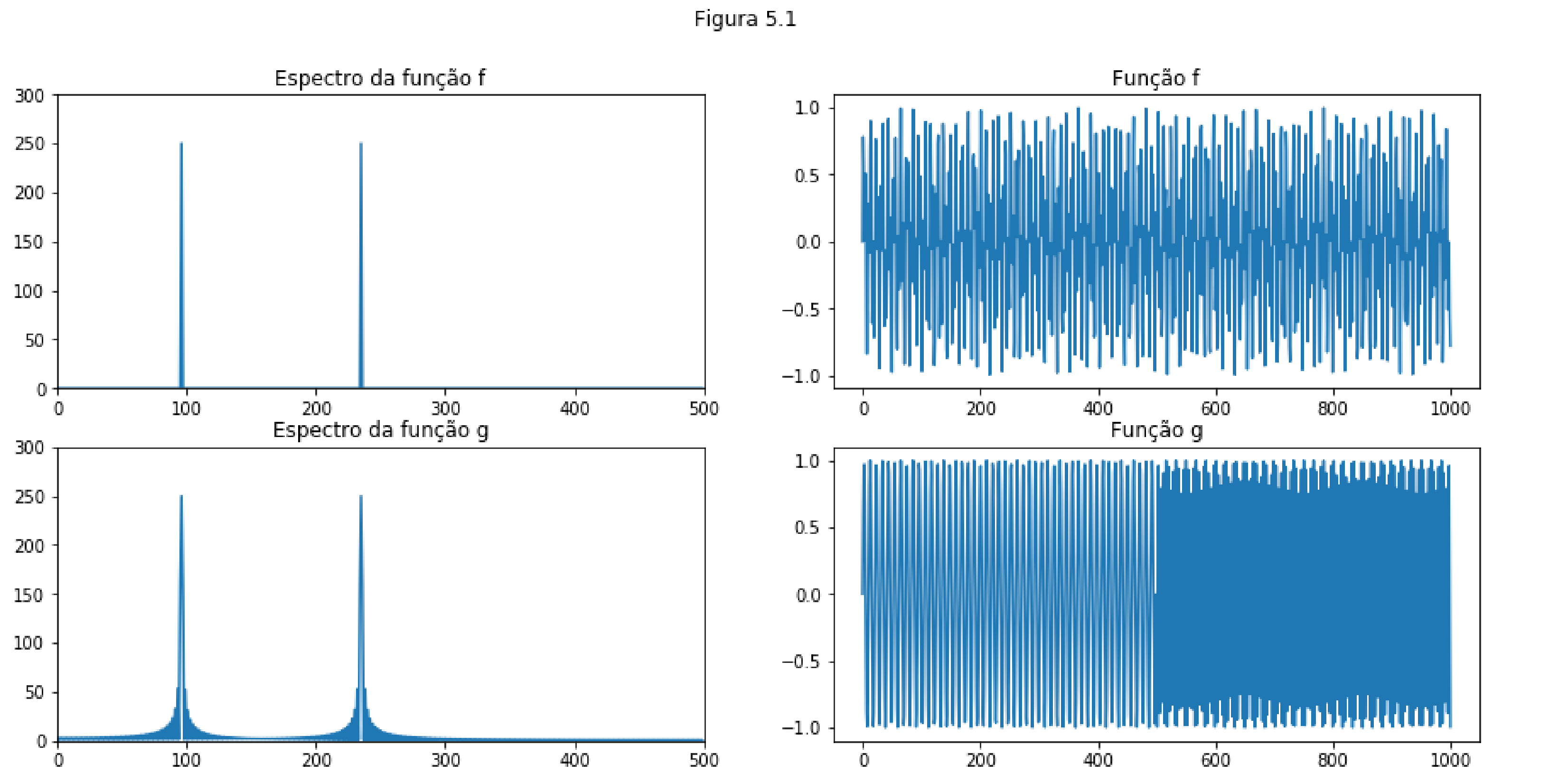
e

$$g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi(96)t), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \sin(2\pi(235)t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esses sinais são amostrados com taxa $R = 1000$ Hz e suas DFTs são apresentadas a seguir.

In [2]:

```
N = 1000;t = np.linspace(0, 1-1/N, N);f = 0.5*np.sin(2*m.pi*96*t)+0.5*np.sin(2*m.pi*235*t)
g = np.concatenate( (np.sin(2*m.pi*96*t[0:N//2]), np.sin(2*m.pi*235*t[N//2:N])), axis=0)
fig, axes = plt.subplots(2,2, figsize=(15,7));fig.suptitle("Figura 5.1")
axes[0,0].set_title('Espectro da função f');axes[0,0].plot( range(N//2) , abs(np.fft.fft(f)[0:N//2]) )
axes[0,0].axis([0, 500, 0, 300]);axes[0,1].set_title('Função f');axes[0,1].plot(f)
axes[1,0].set_title('Espectro da função g');axes[1,0].plot( range(N//2) , abs(np.fft.fft(g)[0:N//2]) )
axes[1,0].axis([0, 500, 0, 300]);axes[1,1].set_title('Função g');axes[1,1].plot(g);plt.show()
```



Esse exemplo ilustra a característica de *não-localidade* da DFT: os espectros mostram as componentes senoidais presentes no sinal, mas não permitem distinguir *em que segmentos temporais* do sinal essas componentes estão ativas.

Isso fica claro ao considerarmos que a DFT expressa um sinal x através da equação de síntese

$$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k E_k,$$

onde E_k são formas de onda básicas cujo comportamento oscilatório é invariante ao longo de todo o sinal. Ou seja, na equação de síntese *todas as componentes estão presentes o tempo todo e com intensidade constante* ($|X_k|$), já que cada sinal $X_k E_k$ tem a forma

$$X_k E_k = \left(X_k(E_k)_0, X_k(E_k)_1, \ldots, X_k(E_k)_{N-1}\right) = \left(X_k e^{i2\pi k(0)/N}, X_k e^{i2\pi k(1)/N}, \ldots, X_k e^{i2\pi k(N-1)/N}\right),$$

sendo que o mesmo coeficiente X_k está presente durante toda a duração dessa componente de frequência fixa k (ciclos por N amostras).

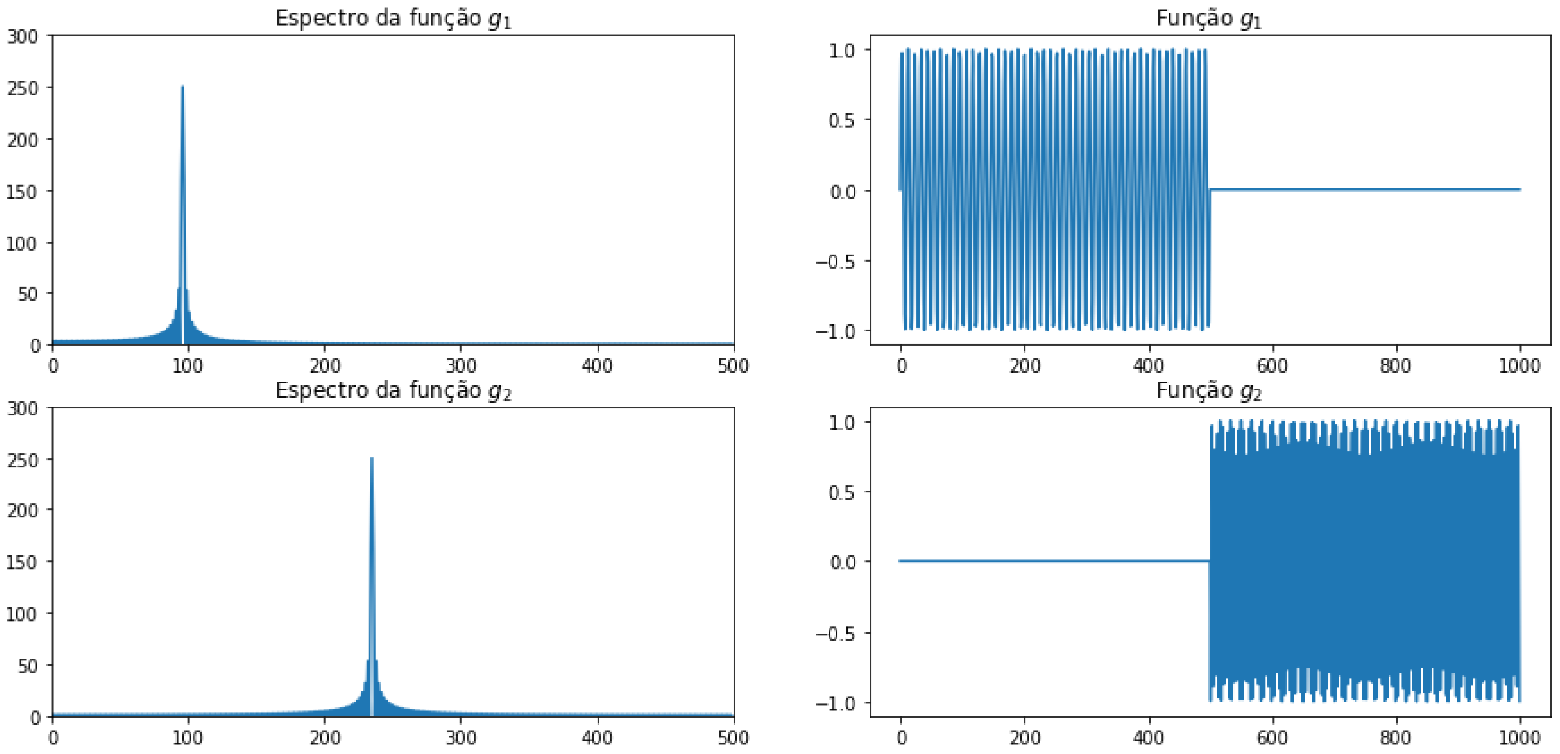
Nesse exemplo em particular é possível investigar como o sinal $g(t)$ que *alterna* as duas senoides de frequências 96 Hz e 235 Hz pode ser representado pela DFT que considera apenas componentes sem variação de frequência:

- podemos considerar $g(t) = g^{(1)}(t) + g^{(2)}(t)$ onde
$$g^{(1)}(t) = \sin(2\pi(96)t), \quad 0 \le t < \tfrac{1}{2}, \quad g^{(1)}(t) = 0, \quad \tfrac{1}{2} \le t \le 1,$$
$$g^{(2)}(t) = \sin(2\pi(235)t), \quad \tfrac{1}{2} \le t \le 1, \quad g^{(2)}(t) = 0, \quad 0 \le t < \tfrac{1}{2},$$
onde $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$ podem ser vistos como *recortes* do sinal por *janelas* de tamanho $\frac{N}{2}$;

- pela linearidade da DFT, sabemos que $G_k = G_k^{(1)} + G_k^{(2)},\ \forall k$;

- o gráfico a seguir mostra como a DFT de g se decompõe exatamente nas DFTs de $g^{(1)}$ e $g^{(2)}$.

In [3]:
```
g1 = g*(t<0.5) # mantem primeira metade do sinal, anula segunda metade
g2 = g*(t>=0.5) # mantem segunda metade do sinal, anula primeira metade
fig, axes = plt.subplots(2,2, figsize=(15,7))
axes[0,0].set_title('Espectro da função $g_1$')
axes[0,0].plot( range(N//2) , abs(np.fft.fft(g1)[0:N//2]) )
axes[0,0].axis([0, 500, 0, 300]);axes[0,1].set_title('Função $g_1$');axes[0,1].
plot(g1)
axes[1,0].set_title('Espectro da função $g_2$')
axes[1,0].plot( range(N//2) , abs(np.fft.fft(g2)[0:N//2]) )
axes[1,0].axis([0, 500, 0, 300]);axes[1,1].set_title('Função $g_2$');axes[1,1].
plot(g2)
plt.show()
```



Seção 5.2 - Localização por janelamento

Vamos considerar uma generalização do processo de segmentação do sinal visto no exemplo anterior, a partir do produto de $x \in \mathbb{C}^N$ por uma **janela**, representada por um sinal $w \in \mathbb{C}^N$, que seleciona $M > 0$ amostras a partir de uma amostra inicial $m \geq 0$, sendo definida como

$$w_n = \begin{cases} 1, & m \leq n < m + M \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Essa janela permite a construção de um sinal $y = w.x$ onde '.' denota o produto de Hadamard, ou seja,

$$y_n = w_n x_n,\ n = 0, 1, \dots, N-1.$$

O termo *janela* tem relação com a restrição de visualização: no sinal y só conseguimos observar o conteúdo do sinal x entre as amostras m e $m + M - 1$. A forma de pulso retangular do sinal w explica a denominação **janela retangular**.

Exemplo 5.2

Considere outra vez o sinal $f \in \mathbb{C}^{1000}$ do exemplo anterior, amostrado a partir de

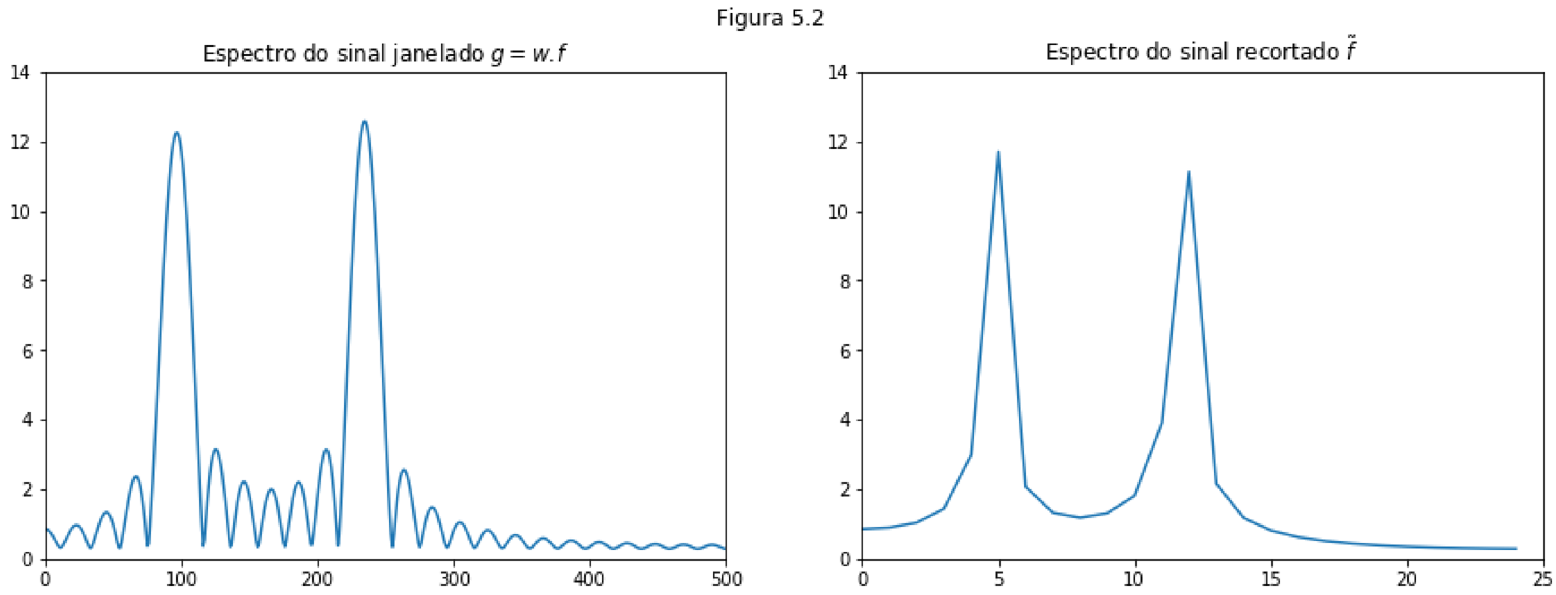
$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi(96)t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(235)t)$$

com taxa $R = 1000$ Hz em $0 \leq t \leq 1$. Queremos visualizar o conteúdo desse sinal no intervalo $[m, m+M)$ onde $m = 100$ e $M = 50$. Construiremos duas versões do sinal:

- uma versão *janelada* $g = w.f \in \mathbb{C}^{1000}$, obtida pelo produto com a janela retangular $w \in \mathbb{C}^{1000}$, definida como $w_n = 1,\ m \leq n < m + M$ e $w_n = 0$ caso contrário;
- uma versão *recortada* $\tilde{f} \in \mathbb{C}^{50}$ definida como $\tilde{f}_n = f_{m+n},\ n = 0, 1, \dots, M-1$;
- o restante dessa seção será dedicado a esclarecer a relação entre as DFTs de g e de $\tilde{f}$ ilustradas a seguir.

In [19]:

```
w = np.zeros(N);w[99:149] = np.ones(50);ftil = w * f
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(15,5));fig.suptitle("Figura 5.2")
axes[0].plot( range(N//2), abs(np.fft.fft(ftil)[0:N//2]) )
axes[0].axis([0, 500, 0, 14]);axes[0].set_title(r"Espectro do sinal janelado $g
=w.\!f$")
axes[1].plot( range(25), abs(np.fft.fft(ftil[99:149])[0:25]))
axes[1].axis([0, 25, 0, 14]);axes[1].set_title(r"Espectro do sinal recortado
 $\tilde{f}$");
```



Seção 5.2.2: Análise do janelamento

Considere a situação ilustrada no último exemplo:

- $x \in \mathbb{C}^N$ é um sinal arbitrário;
- $w \in \mathbb{C}^N$ é uma *janela* definida entre m e $m + M - 1$, ou seja, $w_n \in \mathbb{C},\ m \leq n < m + M$ e $w_n = 0$ caso contrário. A janela retangular $w_n = 1,\ m \leq n < m + M$ é um exemplo de janela desse tipo, mas não o único que consideraremos;
- $y = w.\,x \in \mathbb{C}^N$ é o sinal x *janelado*
- $\tilde{x} \in \mathbb{C}^M$ é o sinal *recortado* $\tilde{x} = (x_m, \ldots, x_{m+M-1})$.

Para simplificar as equações, vamos considerar que M divide N (ou seja, que existe q inteiro tal que $N = qM$). Vamos investigar a relação entre as DFTs de y e $\tilde{x}$ em 3 passos.

Passo 1: Relação entre X e Y

A relação entre as DFTs do sinal original e do sinal janelado é estabelecida a seguir:

Proposição 5.2.1

Sejam $x, w \in \mathbb{C}^N$ com DFTs X e W, e considere $y = w.x$ com DFT Y. Então
$$Y = \frac{1}{N} X * W$$
onde '$*$' representa a convolução circular em $\mathbb{C}^N$.

Essa proposição é uma espécie de forma inversa do teorema da convolução: aquele dizia que

> *"a convolução no domínio do tempo equivale ao produto de Hadamard no domínio da frequência,"*

ao passo que a proposição 5.2.1 diz que

> *"o produto de Hadamard no domínio do tempo equivale à convolução no domínio da frequência, a menos de uma constante* $\frac{1}{N}$.

A demonstração desse resultado é muito parecida com a do teorema da convolução original (exercício 5.3).

Exemplo 5.3

Considere a janela retangular $w \in \mathbb{C}^N$. Podemos calcular sua DFT diretamente pela definição:

$$
\begin{aligned}
W_k &= \sum_{n=m}^{m+M-1} e^{-i2\pi kn/N} \\
&= e^{-i2\pi km/N} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-i2\pi kn/N} \\
&= e^{-i2\pi km/N} \frac{1-e^{-i2\pi kM/N}}{1-e^{-i2\pi k/N}}
\end{aligned}
$$

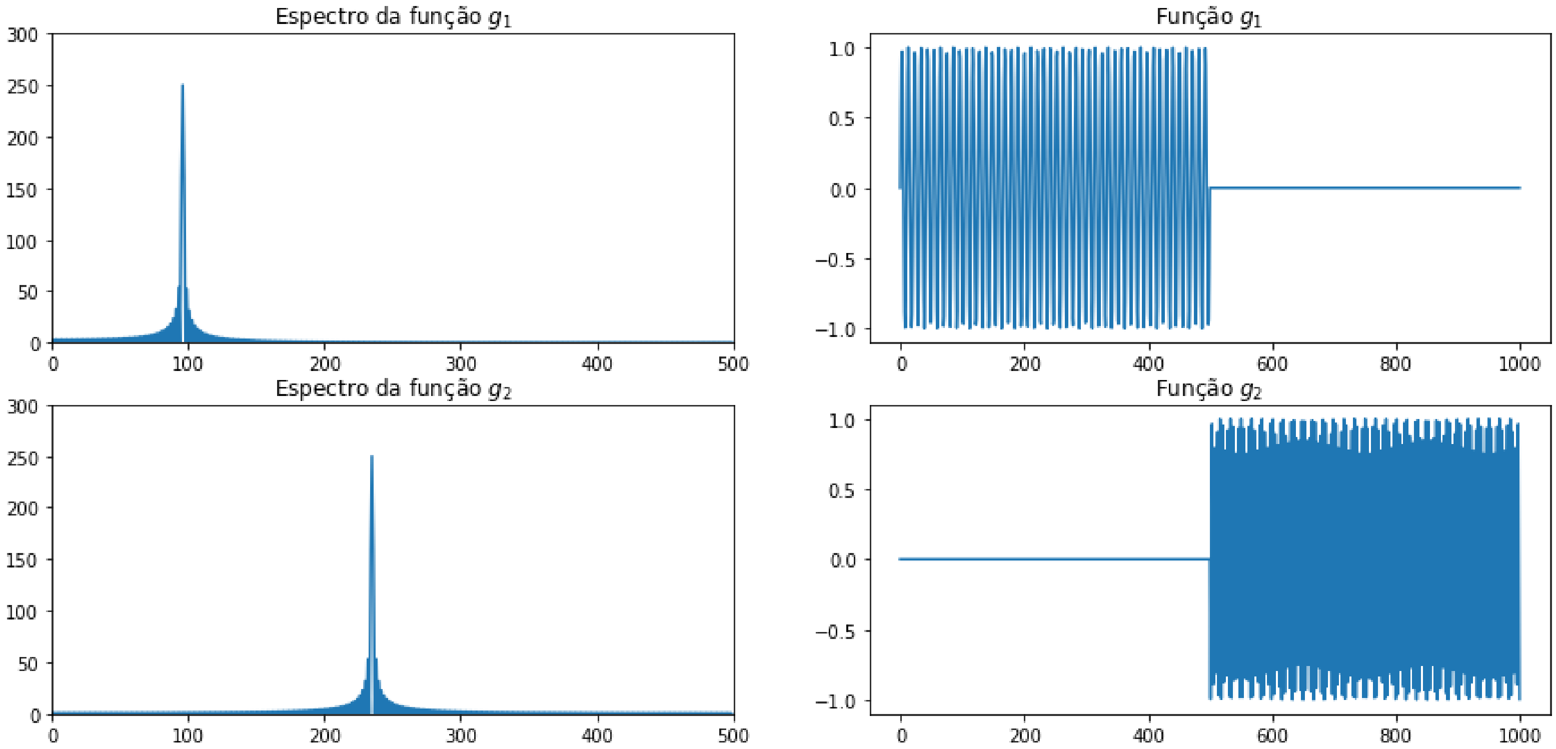
de onde (veja o exemplo idêntico na seção 2.4)

$$
|W_k| = \sqrt{\frac{1-\cos(2\pi kM/N)}{1-\cos(2\pi k/N)}}.
$$

In [18]:
```
fig, axes = plt.subplots(figsize=(15,5))
axes.plot( range(-N//2, N//2), np.roll(abs(np.fft.fft(w)), N//2 ))
axes.set_title("Figura 5.3: Espectro da janela (retangular) do exemplo 5.2");
```

Essa imagem, que é o espectro da janela, explica o exemplo visto anteriormente: cada componente espectral isolada ("pico") no espectro de f, que correspondem às frequências de 96 Hz e 235 Hz, dá origem (através da convolução $Y = \frac{1}{N} X * W$) a uma cópia do padrão acima. Em outras palavras, cada componente senoidal produz uma série de outras componentes secundárias *por causa* do janelamento, um fenômeno denominado **vazamento espectral**.

In [4]:
```
fig, axes = plt.subplots(2,2, figsize=(15,7));axes[0,0].set_title('Espectro da
 função $g_1$')
axes[0,0].plot( range(N//2) , abs(np.fft.fft(g1)[0:N//2]) );axes[0,0].axis([0,
500, 0, 300]);axes[0,1].set_title('Função $g_1$');axes[0,1].plot(g1)
axes[1,0].set_title('Espectro da função $g_2$');axes[1,0].plot( range(N//2) , a
bs(np.fft.fft(g2)[0:N//2]) )
axes[1,0].axis([0, 500, 0, 300]);axes[1,1].set_title('Função $g_2$');axes[1,1].
plot(g2);plt.show()
```



Passo 2: "rebobinando" o sinal janelado

Para facilitar a comparação entre o espectro de
$y = w.x = (0, \dots, 0, x_m, \dots, x_{m+M-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N$ e
$\tilde{x} = (x_m, \dots, x_{m+M-1}) \in \mathbb{C}^M$ consideraremos um passo intermediário, correspondente a transportar a porção janelada do sinal y para o início do vetor, através do vetor

$$\tilde{y} = (x_m, \dots, x_{m+M-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N.$$

A única diferença entre y e $\tilde{y}$ é um deslocamento para a esquerda (um "avanço" temporal) de m amostras, que afeta de forma idêntica todas as componentes do sinal, ou seja, cada componente $Y_k E_k$ terá sua fase inicial "avançada" em m amostras, conforme estabelece a proposição a seguir.

Proposição 5.2.2

Seja $y \in \mathbb{C}^N$ com DFT Y. Seja $\tilde{y} \in \mathbb{C}^N$ o sinal obtido de y por um shift circular de m amostras:

$$\tilde{y}_n = y_{n+m\%N}.$$

Então a DFT de $\tilde{y}$ tem componentes $\tilde{Y}_k = e^{i2\pi km/N} Y_k$.

A demonstração dessa proposição corresponde ao exercício 2.16 (feito na lista 3).

Lembrando que no passo 1 estabelecemos que

$$Y = \frac{1}{N} X * W,$$

no final do passo 2 teremos

$$\tilde{Y}_k = e^{i2\pi km/N} \frac{1}{N} (X * W)_k.$$

Passo 3: DFT de N pontos versus DFT de M pontos

Considere novamente

$$\tilde{y} = (x_m, \dots, x_{m+M-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^N \quad \text{e} \quad \tilde{x} = (x_m, \dots, x_{m+M-1}) \in \mathbb{C}^M.$$

Suas DFTs serão

$$\tilde{Y}_k = \sum_{n=0}^{\color{red}{N}-1} \tilde{y}_n e^{i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{\color{blue}{M}-1} \tilde{y}_n e^{i2\pi kn/\color{green}{N}}$$

$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{M-1} \color{red}{\tilde{x}}_n e^{i2\pi kn/M} = \sum_{n=0}^{M-1} \color{blue}{\tilde{y}}_n e^{i2\pi kn/\color{green}{M}}.$$

Note que as diferenças entre as expressões originais da DFTs e suas reformulações foram destacadas em vermelho e azul, e que as expressões finais diferem apenas nos termos em verde.

Lembrando agora que $N = qM$ para algum q inteiro, teremos $M = N/q$, ou seja

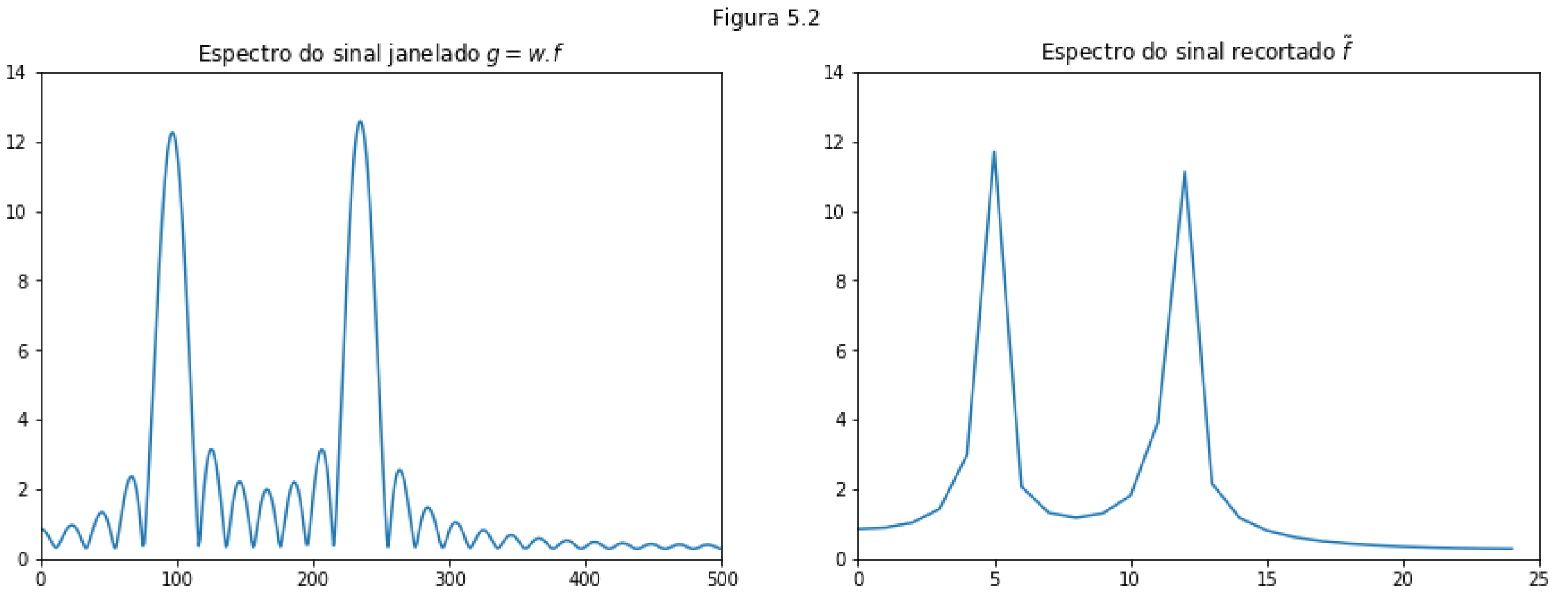
$$\tilde{X}_k = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{y}_n e^{i2\pi kn/M} = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{y}_n e^{i2\pi qkn/N}.$$

Mas $\tilde{Y}_k = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{y}_n e^{i2\pi kn/N}$, de onde concluímos que

$$\tilde{X}_k = \tilde{Y}_{qk}, \ \forall k.$$

Note que isso representa um processo de *sub-amostragem* com fator de $q = N/M$, e mostra que as imagens da esquerda e da direita na figura 5.2, repetida abaixo, correspondem de fato ao espectro de magnitude $|\tilde{Y}| = |Y| \in \mathbb{C}^{1000}$ e sua versão sub-amostrada $q = 20$ vezes $|\tilde{X}| \in \mathbb{C}^{50}$.

In [19]:
```
w = np.zeros(N);w[99:149] = np.ones(50);ftil = w * f
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(15,5));fig.suptitle("Figura 5.2")
axes[0].plot( range(N//2), abs(np.fft.fft(ftil)[0:N//2]) )
axes[0].axis([0, 500, 0, 14]);axes[0].set_title(r"Espectro do sinal janelado $g
=w.\!f$")
axes[1].plot( range(25), abs(np.fft.fft(ftil[99:149])[0:25]))
axes[1].axis([0, 25, 0, 14]);axes[1].set_title(r"Espectro do sinal recortado
 $\tilde{f}$");
```



Combinando os resultados dos 3 passos, chegamos ao seguinte teorema

Teorema 5.2.1

Seja $x \in \mathbb{C}^N$ janelado por um sinal $w \in \mathbb{C}^N$ onde $w_n \neq 0 \iff m \leq n < m + M$, e suponha que $N = qM$. Então a relação entre a DFT N-dimensional X de x e a DFT M-dimensional $\tilde{X}$ de $\tilde{x} = (w_m x_m, \ldots, w_{m+M-1} x_{m+M-1}) \in \mathbb{C}^M$ é dada por

$$\tilde{X}_k = \frac{e^{i2\pi mqk/N}}{N}(X * W)_{qk} = \frac{e^{i2\pi mk/M}}{N}(X * W)_{qk},$$

onde a última igualdade segue de $q/N = 1/N$.

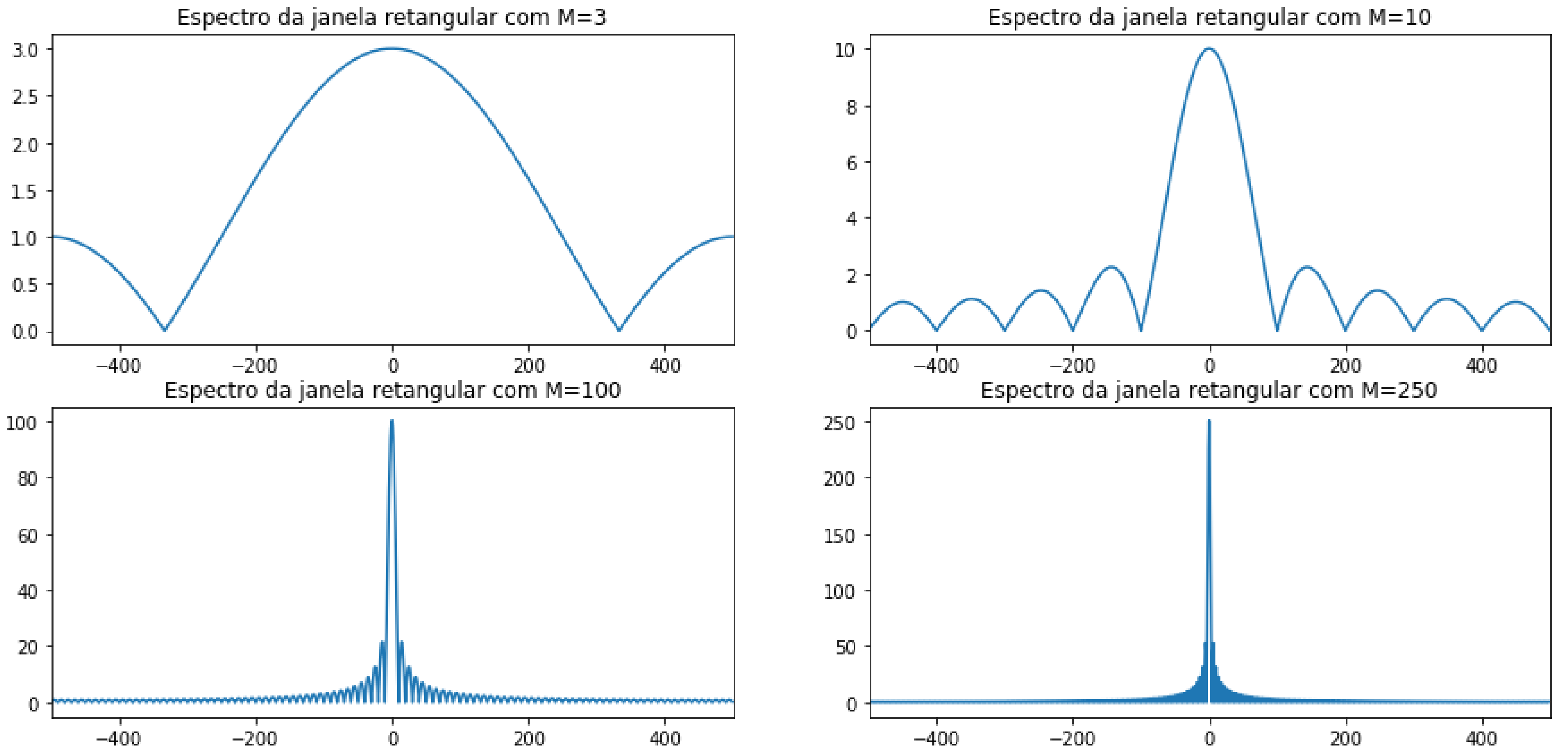
Exemplo 5.4

O teorema 5.2.1 mostra que o janelamento e subsequente recorte promove alterações no conteúdo espectral do recorte analisado que têm relação direta com a janela utilizada.

Podemos investigar o efeito da escolha da janela considerando a DFT W para diferentes tamanhos de M, conforme ilustrado abaixo.

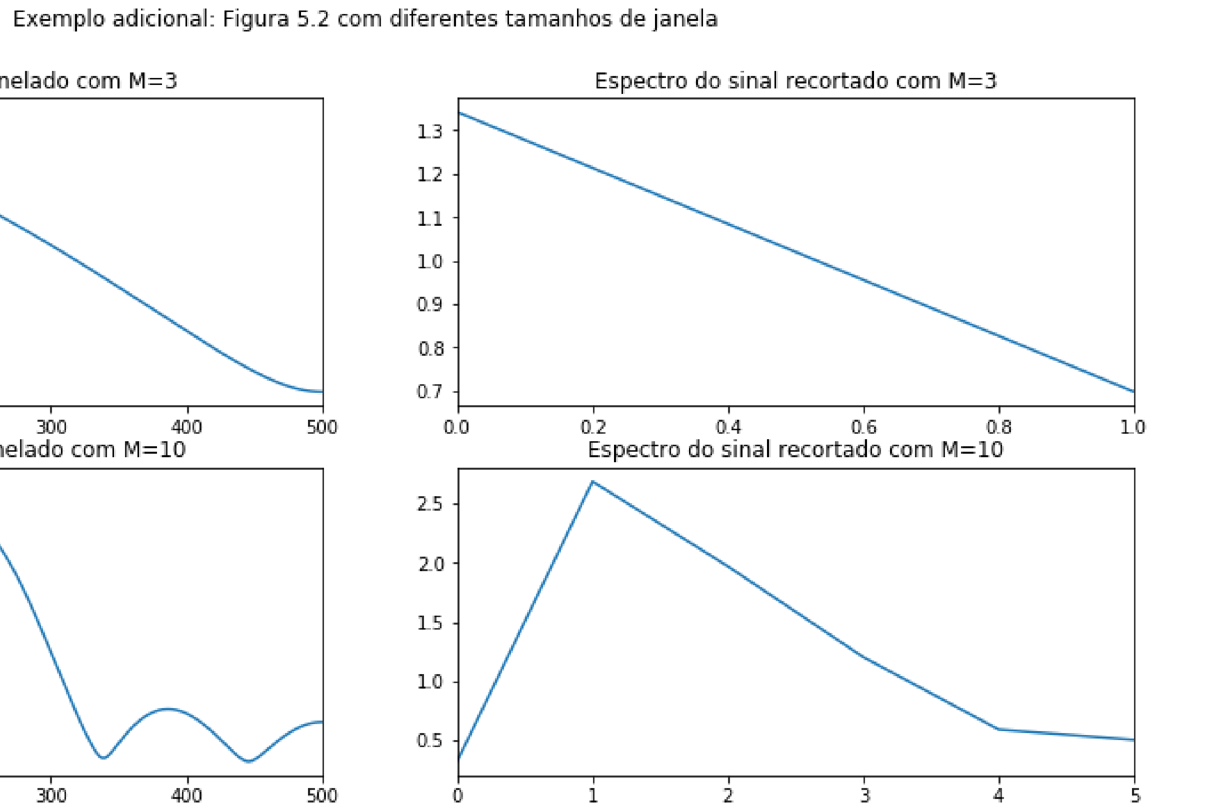
In [5]:

```
M = np.array([3, 10, 100, 250]);fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(15,7))
for j in range(2):
    for i in range(2):
        index = 2 * i + j; w = np.concatenate((np.ones(M[index]), np.zeros(N-M[
index])))
        axes[i, j].plot(range(-N // 2, N // 2), np.roll(abs(np.fft.fft(w)), N
// 2));        axes[i, j].set_xlim([-N / 2 + 1, N / 2])
        axes[i, j].set_title("Espectro da janela retangular com M={}".format(M[i
ndex]))
```



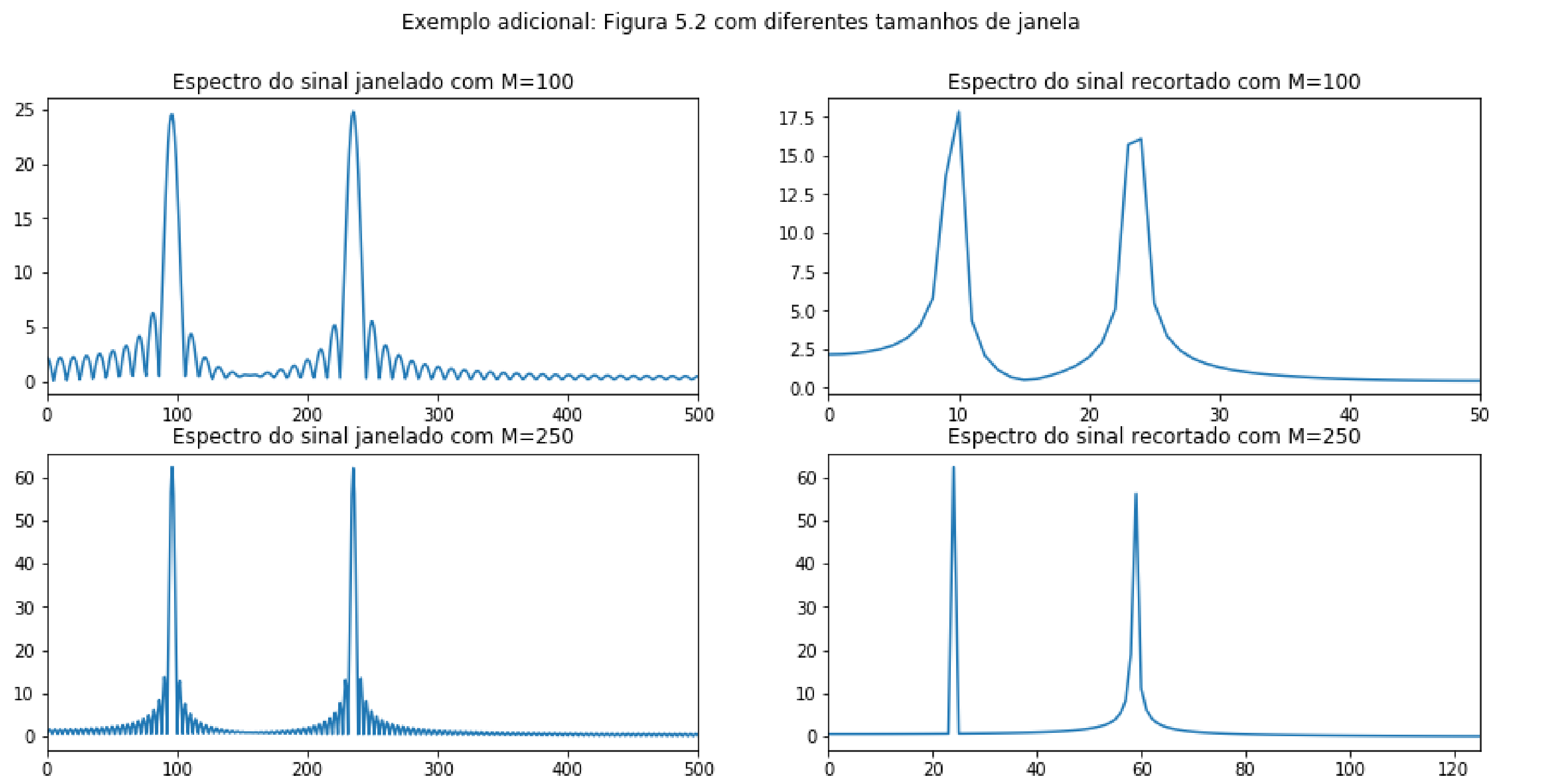
In [6]:

```
M = np.array([3, 10]);fig, axes = plt.subplots(len(M), 2, figsize=(15,7));fig.s
uptitle("Exemplo adicional: Figura 5.2 com diferentes tamanhos de janela")
for j in range(len(M)):
    w = np.concatenate( (np.ones(M[j]), np.zeros(N-M[j])) );ftil = w * f;fcut =
ftil[0:M[j]]
    axes[j,0].plot(range(N//2+1), abs(np.fft.fft(ftil)[0:N//2+1]));axes[j,0].se
t_xlim([0, N//2]);axes[j,0].set_title("Espectro do sinal janelado com M={}".form
at(M[j]))
    axes[j,1].plot(range(M[j]//2+1), abs(np.fft.fft(fcut)[0:M[j]//2+1]));axes[j
,1].set_xlim([0, M[j]//2]);axes[j,1].set_title("Espectro do sinal recortado com
 M={}".format(M[j]))
```



In [7]:

```
M = np.array([100, 250]);fig, axes = plt.subplots(len(M), 2, figsize=(15,7));fi
g.suptitle("Exemplo adicional: Figura 5.2 com diferentes tamanhos de janela")
for j in range(len(M)):
    w = np.concatenate( (np.ones(M[j]), np.zeros(N-M[j])) );ftil = w * f;fcut =
ftil[0:M[j]]
    axes[j,0].plot(range(N//2+1), abs(np.fft.fft(ftil)[0:N//2+1]));axes[j,0].se
t_xlim([0, N//2]);axes[j,0].set_title("Espectro do sinal janelado com M={}".form
at(M[j]))
    axes[j,1].plot(range(M[j]//2+1), abs(np.fft.fft(fcut)[0:M[j]//2+1]));axes[j
,1].set_xlim([0, M[j]//2]);axes[j,1].set_title("Espectro do sinal recortado com
 M={}".format(M[j]))
```



Seção 5.2.3: Espectrogramas

Uma forma de analisar um sinal com conteúdo variável no domínio da frequência corresponde a segmentar o sinal, escolhendo um tamanho de janela M que seja pequeno o suficiente para que o conteúdo do sinal seja relativamente estável no intervalo de tempo correspondente a uma janela, e computar uma DFT para cada janela, produzindo uma **Transformada de Fourier de Tempo Reduzido (STFT)** ou **Espectrograma**.

Em relação aos inícios das janelas, podemos ter o k-ésimo segmento começando na posição $m = kn$, ou seja,

$$\tilde{x}^k = (x_{kn}, x_{kn+1}, \ldots, x_{kn+M-1}).$$

Dependendo do parâmetro n=distância entre inícios de segmentos sucessivos, podemos ter:

- se $n = M$, teremos $\tilde{x}^0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{M-1})$, $\tilde{x}^1 = (x_M, x_{M+1}, \ldots, x_{2M-1})$, etc. Nesse caso as janelas são *justapostas*;
- se $n < M$, teremos $\tilde{x}^0 = (x_0, x_1, \ldots, x_{M-1})$ e $\tilde{x}^1 = (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+M-1})$, onde algumas amostras aparecem nos segmentos sucessivos. Nesse caso as janelas são *sobrepostas*;

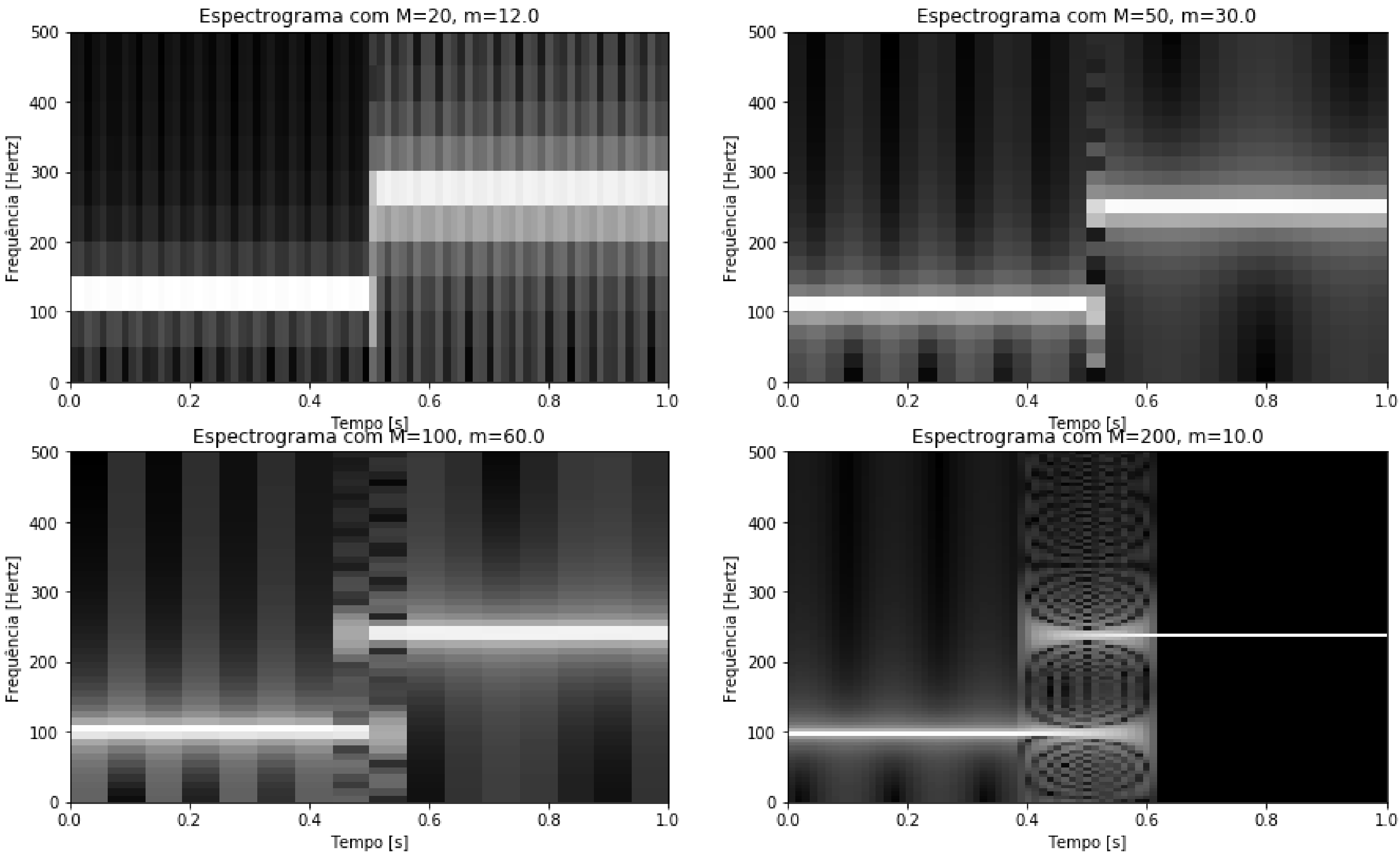
Frequentemente a sobreposição é definida através de um *fator de sobreposição*: janelas com sobreposição de 50% por exemplo correspondem a $n = M/2$, e em geral definir $n = \alpha M$ com $\alpha \in (0, 1)$ acarretará uma sobreposição de $100(1 - \alpha)\%$.

- o caso $n > M$ não é usado com tanta frequência, pois nesse caso as janelas não cobrem todo o sinal, deixando porções temporais fora da análise.

Exemplo 5.5

Considere outra vez o sinal do exemplo 5.1: $g(t) = \begin{cases} \sin(2\pi(96)t), & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \sin(2\pi(235)t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

In [56]:
```
N = 1000;t = np.arange(0, 1, 1/N);f = 0.5*np.sin(2*m.pi*96*t)+0.5*np.sin(2*m.pi
*235*t)
g = np.concatenate( (np.sin(2*m.pi*96*t[0:N//2]), np.sin(2*m.pi*235*t[N//2:N]))
, axis=0)
M = np.array([20, 50, 100, 200]);O = 0.6 * M # saltos de 60% do valor da janela
O[3] = 10;show_spectra(N, t, g, M, O)
```



Exemplo 5.6

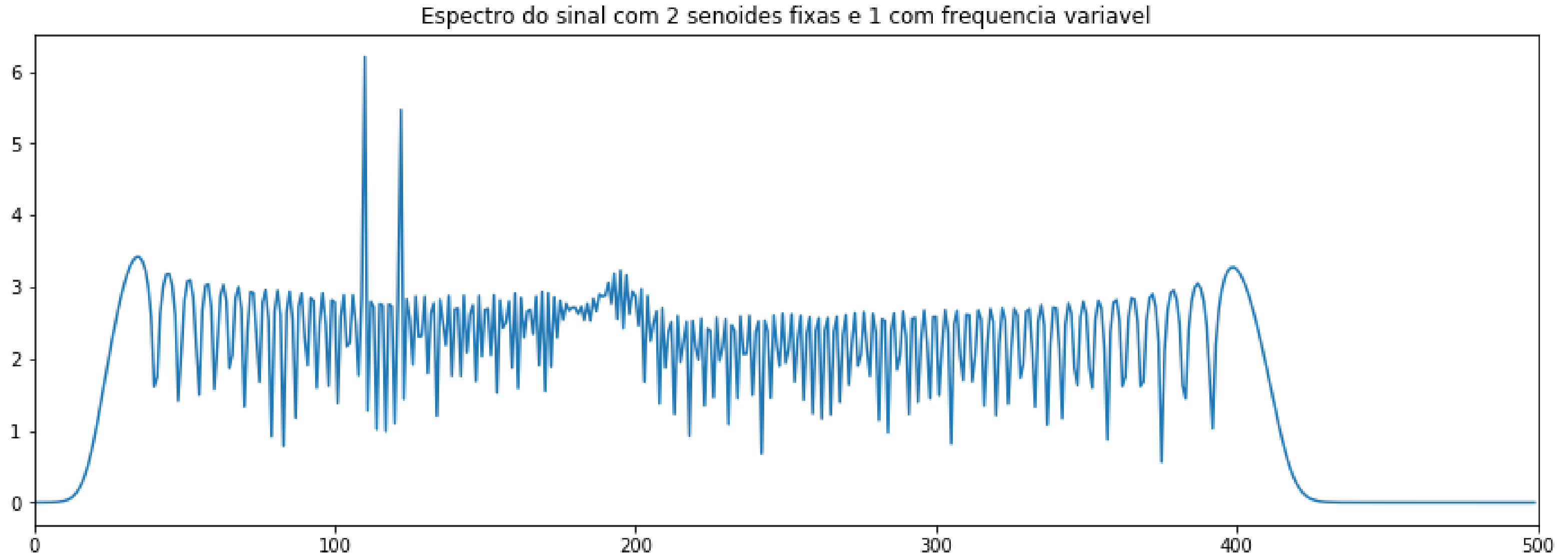
Nesse exemplo consideramos um sinal com 3 componentes senoidais, sendo uma com frequência instantânea variável:

$$f(t) = 1.0 \sin(2\pi(111)t) + 0.5 \sin(2\pi(123)t) + 0.5 \sin(2\pi\omega(t)t),$$

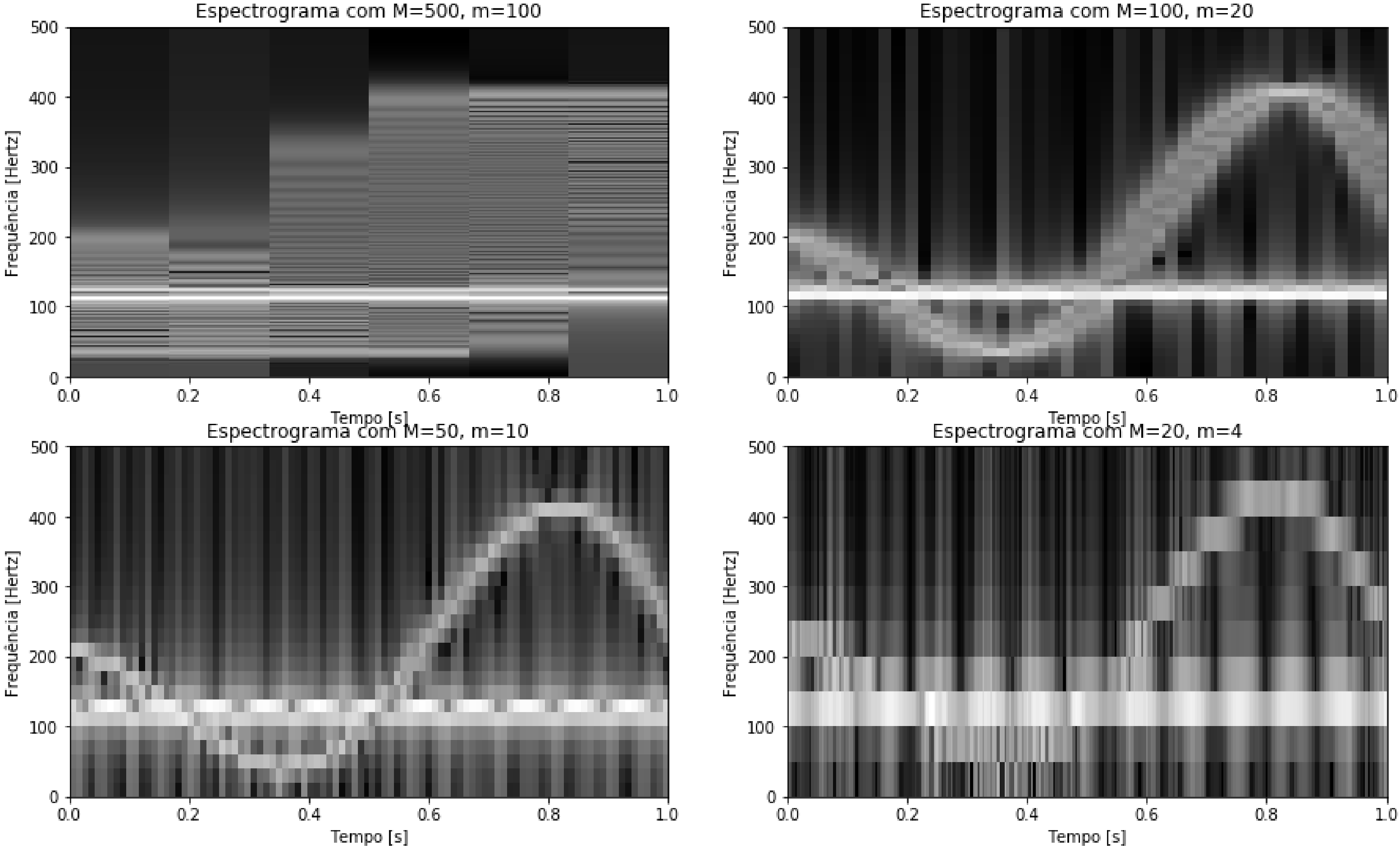
onde $\omega(t) = 150 + 50 \cos(2\pi t)$, para $t \in [0, 1)$ com taxa de amostragem $R = 1000$ Hz.

Vamos visualizar o espectro do sinal inteiro, e algumas versões de espectrogramas com diferentes escolhas de M e n.

In [9]:
```
N = 1000;t = np.linspace(0, 1-1/N, N);omega = 150 + 50 * np.cos(2*m.pi * t)
f = np.sin(2*m.pi* 111 * t)+0.5*np.sin(2*m.pi* 123 * t)+0.5*np.sin(2*m.pi* omeg
a * t)
plt.figure(figsize=(15,5));plt.plot(range(N//2),np.log(1+abs(np.fft.fft(f)[1:N
//2+1])))
plt.xlim([0, N/2]);plt.title("Espectro do sinal com 2 senoides fixas e 1 com fre
quencia variavel");
```



In [60]:
```
M = np.array([500, 100, 50, 20]);O = np.array([100, 20, 10, 4]);show_spectra(N,
t, f, M, O)
```



Exemplo 5.6: frequência instantânea

Os espectrogramas acima deixam claro que a frequência instantânea da 3a componente

$$f_3(t) = 0.5 \sin(2\pi\omega(t)t)$$

não é a própria função $\omega(t) = 150 + 50\cos(2\pi t)$, que varia apenas entre 100 e 200, mas sim a variação instantânea da fase (argumento do seno), cuja expressão é

$$\tilde{\omega}(t) = \frac{\partial 2\pi\omega(t)t}{\partial t} = 2\pi\left(\omega(t) + \omega'(t)t\right) = 2\pi\Big(150 + 50\cos(2\pi t) - 100\pi \sin(2\pi t)t\Big),$$

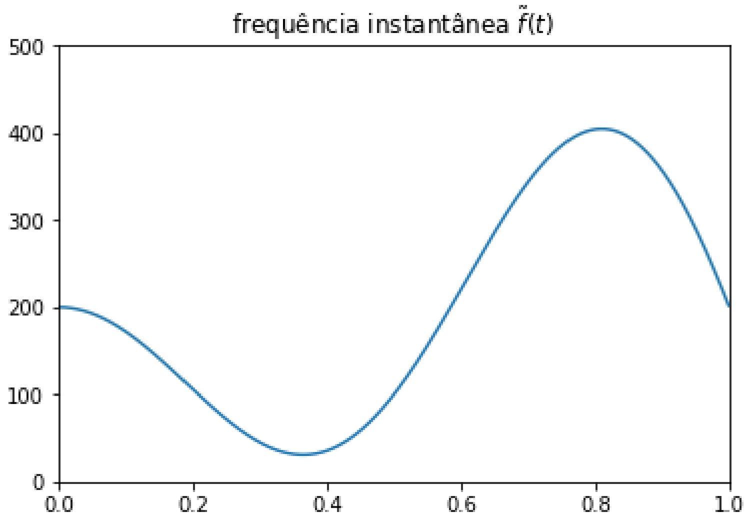
em radianos/segundo, ou equivalentemente em Hz

$$\tilde{f}(t) = 150 + 50\cos(2\pi t) - 100\pi \sin(2\pi t)t,$$

cuja faixa de variação *aumenta* com t, como pode ser evidenciado pelo gráfico abaixo (compare-o com os últimos espectrogramas).

In [16]:

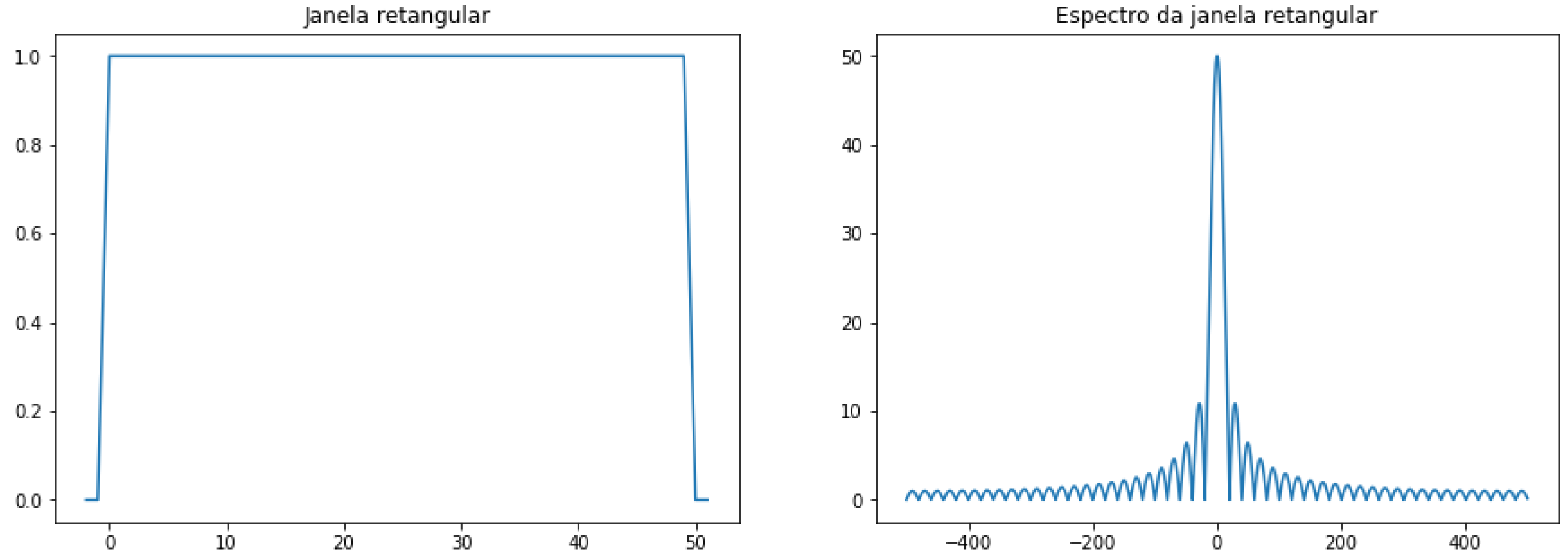
```
omegatil = omega - 100*m.pi*np.sin(2*m.pi * t)*t
plt.plot(t,omegatil);plt.axis([0, 1, 0, 500]);
plt.title(r"frequência instantânea $\tilde{f}(t)$");plt.show()
```



Seção 5.2.4: Outros tipos de janela

Até esse momento só vimos exemplos usando a janela retangular ($w_n = 1$ se $m \leq n < m + M$, $w_n = 0$ caso contrário). Porém o resultado do teorema 5.2.1 vale para outras formas de janela, que podem ter impactos diferentes sobre o espectro dos recortes do sinal.

In [61]:
```
N = 1000;wr = np.zeros(N);wr[99:149] = np.ones(50)
fig, axes = plt.subplots(1,2, figsize=(15,5))
axes[0].set_title('Janela retangular');axes[0].plot(range(-2, 52), wr[97:151])
freqs = np.linspace(-N/2,N/2,N);Fmag = abs(np.fft.fft(wr))
axes[1].set_title('Espectro da janela retangular');axes[1].plot(freqs, np.fft.ff
tshift(Fmag));
```



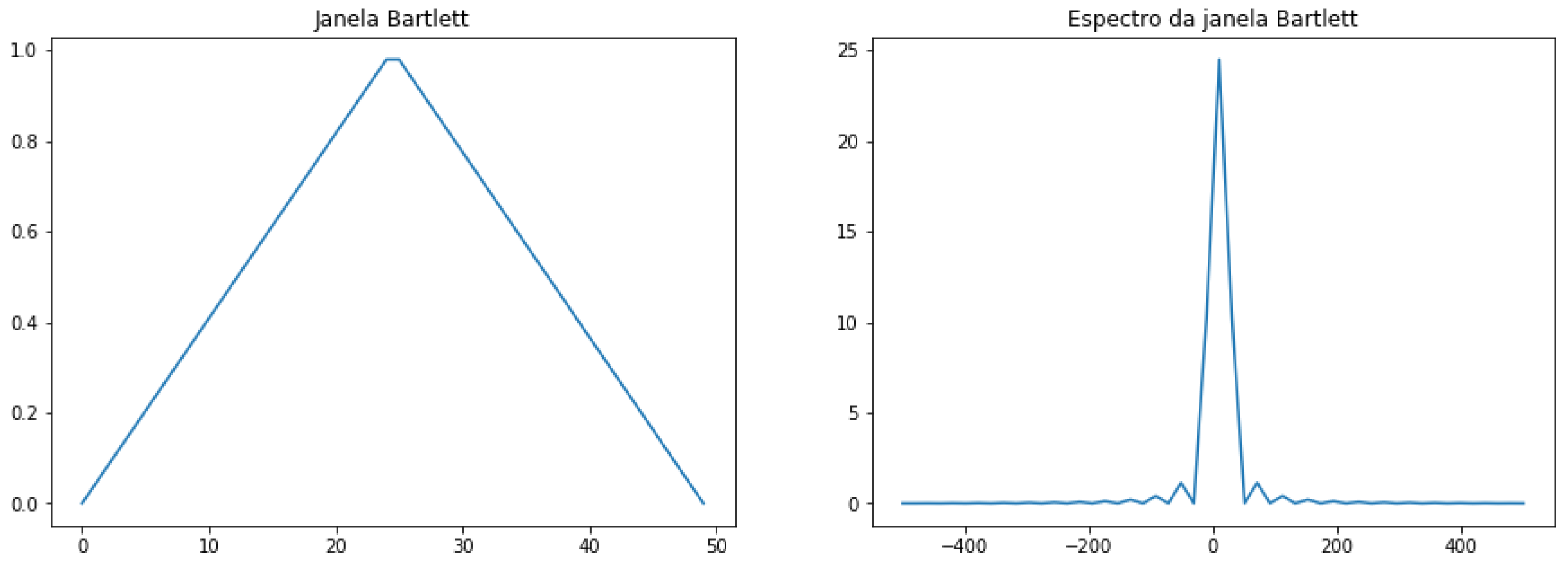
Janela triangular ('Bartlett')

Definida por

$$w_j = \begin{cases} \frac{2j}{M}, & m \leq j \leq m + M/2, \\ \frac{M+m-1-j}{M/2+m-1}, & m + M/2 < j < m + M, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

In [63]:

```
win = np.bartlett(50)
plot_window_func(win, N, 'Bartlett')
```



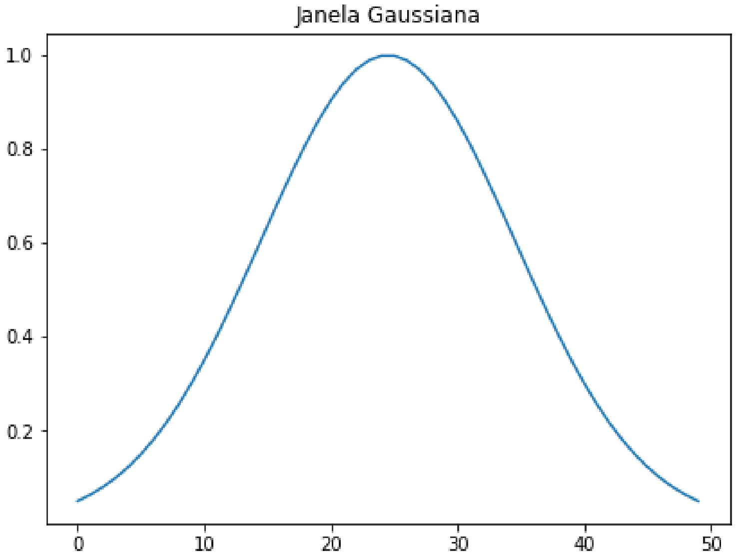
Janela Gaussiana

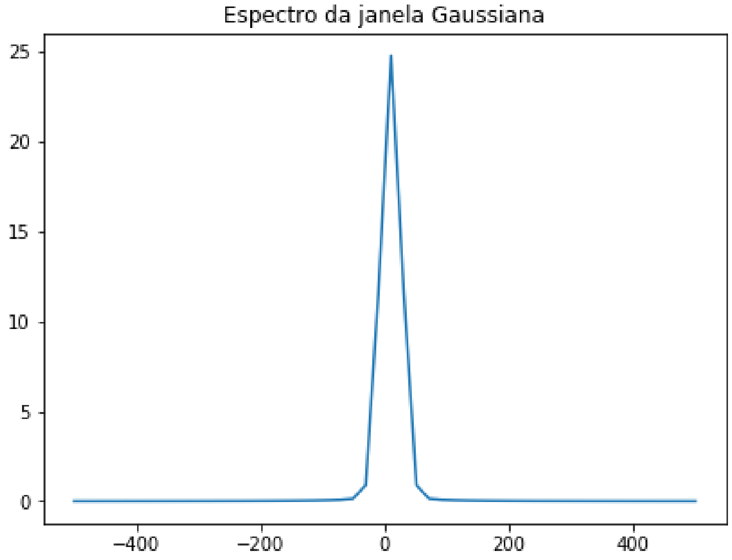
Definida por

$$w_j = Ce^{-\alpha\left(\frac{j-(m+(M-1)/2)}{M/2}\right)^2}$$

onde C e α são parâmetros definidos pelo usuário.

In [67]:
```
sigma = 10
win = signal.gaussian(50, sigma)
plot_window_func(win, N, 'Gaussiana')
```



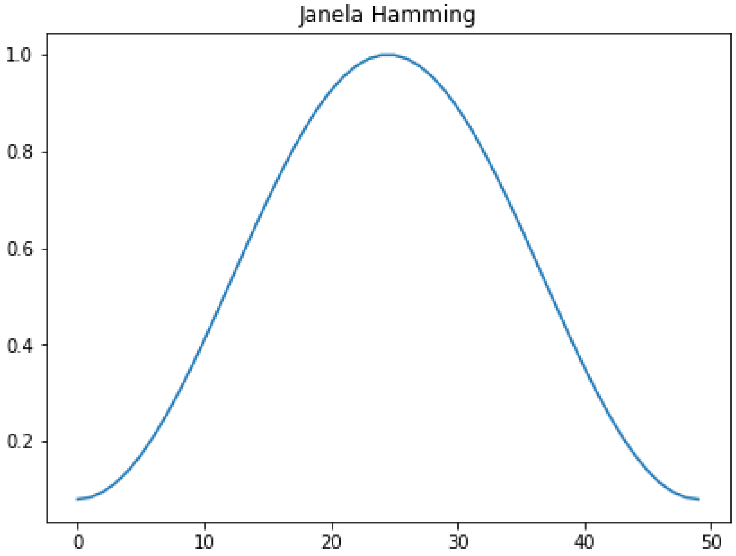


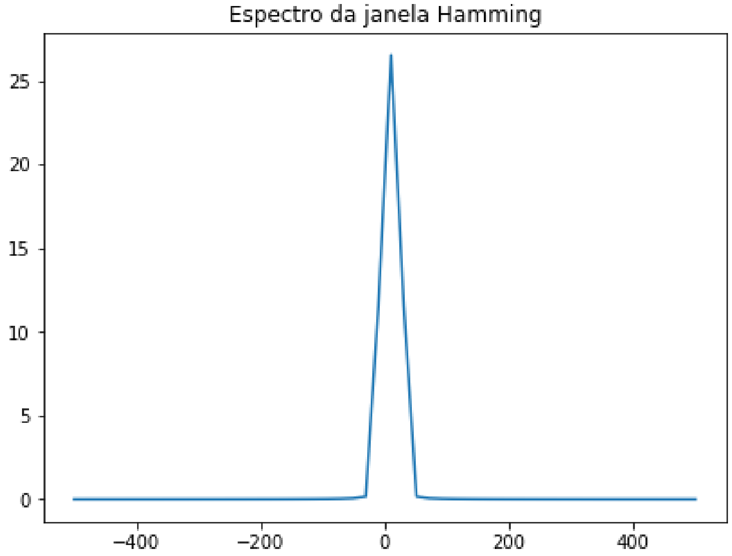
Janela de Hamming

Definida por

$$w_j = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi\frac{j-m}{M}\right), & m \leq j \leq m + M, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

In [68]:
```
win = np.hamming(50)
plot_window_func(win, N, 'Hamming')
```





In [70]:

```
fig, axes = plt.subplots(1,2, figsize=(15,5))
axes[0].plot(ns, win_bartlett, 'g-', label='Bartlett')
axes[0].plot(ns, win_hamming, 'r-', label='Hamming')
axes[0].plot(ns, win_gaussian, 'b-', label='Gaussiana')
axes[1].plot(freqs, np.fft.fftshift(spec_bartlett), 'g-', label='Bartlett')
axes[1].plot(freqs, np.fft.fftshift(spec_hamming), 'r-', label='Hamming')
axes[1].plot(freqs, np.fft.fftshift(spec_gaussian), 'b-', label='Gaussiana')
plt.legend(loc='upper left', bbox_to_anchor=(1, 1));plt.show()
```