

9. Estudo das Variações das Funções.

O Teorema do Valor Médio está enunciado na página 225 e o desenho da ideia está logo abaixo. Note que vendo o gráfico da função é meio obvio que vai haver um ponto c tal que $f'(c)$ coincide com a inclinação da reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O motivo de termos o TVM é justamente por que não podemos nos basear num desenho. Na verdade, os resultados provados a partir do TVM serão usados para esboçar o gráfico.

Na página 226 são dados exemplos que mostram que f' tem que existir para todo ponto $x \in]a, b[$ e que a função tem que ser contínua no intervalo fechado $[a, b]$.

Na secção 9.2, é comentado os intervalos de crescimento e decrescimento que são as consequências do TVM.

Se f é contínua no intervalo I e

a) $f'(x) > 0$ no interior de I (no caso tirando as extremidades se o intervalo tiver extremidades) então f é estritamente crescente em I .

b) $f'(x) < 0$ no interior de I então f é estritamente decrescente em I .

O exemplo 1, é o primeiro exemplo de estudo de sinal utilizando f' que serve para dizer o que ocorre nos intervalos onde f' não muda de sinal. Note que por isso a primeira coisa é analisar quando a derivada de f é 0. Ao encontrar todos os pontos onde f' se anulam, o intervalo entre duas raízes consecutivas, se f' existe e é contínua, não pode mudar de sinal (se mudasse pelo Teorema do Anulamento, teria mais algum ponto onde f' é 0). No exemplo, as únicas raízes são $\frac{1}{3}$ e 1. A f' é contínua em $\mathbb{R}$, assim, f' não muda de sinal nos intervalos $]-\infty, \frac{1}{3}[$, $]\frac{1}{3}, 1[$ e $]1, +\infty[$, por que caso contrário haveriam outras raízes dentro destes intervalos.

A análise do sinal foi feita usando que a derivada f' é um polinômio de grau 2 cujo coeficiente, 3 é positivo, assim este polinômio de grau 2 tem a concavidade para cima e os sinais são positivo antes da primeira raiz, negativo entre as duas raízes e positivo depois da segunda raiz.

Devido aos sinais, a f é crescente antes da primeira raiz, decrescente entre as duas raízes e crescente depois da segunda raiz. Como ela cresce antes de $\frac{1}{3}$ e decresce depois, temos que $\frac{1}{3}$ é um ponto de máximo local, isto é, no gráfico $(\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3}))$ é um pico entre os pontos próximos no gráfico. E o ponto $(1, f(1))$ vai ser um mínimo local, seria o ponto mais baixo dos pontos próximos a esse ponto.

A seguir é verificado o comportamento da função quando o x vai indo para $-\infty$ (no caso a função decresce para $-\infty$). Note que ele decresce para $-\infty$ por que estamos andando da direita para a esquerda para pontos suficientemente próximos de $-\infty$, no caso abaixo de $\frac{1}{3}$. Então a função (quando vamos da esquerda para direita, cresce do $-\infty$ até chegar a $\frac{1}{3}$ quando começa a decrescer).

Quando x vai para $+\infty$ temos que $f(x)$ cresce para $+\infty$ indo da esquerda para a direita, para x suficientemente grande, no caso, maior que 1 e a função é realmente crescente nesse trecho. Este tipo de análise serve para saber se não cometemos algum erro básico, por que uma função crescente não pode ir para $-\infty$ e uma função crescente não pode ter vindo do $+\infty$ por exemplo.

Então sempre calculamos o valor da função nos pontos onde muda o sinal da f' e plotamos esses pontos, depois completamos o esboço com as informações de crescimento, decrescimento e limites.

O exemplo 2, é uma fração de polinômios. Novamente, se começa com o estudo de sinal utilizando f' . Como se trata de uma fração podemos analisar os sinais do numerador e do denominador e fazer depois a análise de ambas. Como o denominador de f' é positivo, a análise do sinal de f depende somente do numerador. Então procedemos com a análise do numerador, e no caso encontramos as raízes -1 e $\frac{1}{3}$. Como o numerador é um polinômio de grau 2, vemos que o coeficiente 3 do termo de grau 2 é positivo, assim a concavidade é para cima e a f' é positiva antes de -1 , negativa entre -1 e $\frac{1}{3}$ e positiva depois de $\frac{1}{3}$. Como o denominador é positivo, os sinais de f' coincidem com o que foi dito antes. Agora, ao calcular os limites para $-\infty$ e $+\infty$, o limite da f dá $\frac{1}{3}$. Assim ao esboçar a partir de -1 vamos decrescendo da direita para a esquerda até $\frac{1}{3}$ (ou seja vem de próximo a $\frac{1}{3}$ subindo até chegar a $f(-1)$ no ponto -1). Depois, decresce entre -1 e $\frac{1}{3}$ (já que começa num valor positivo até um valor negativo, podemos tentar encontrar a raiz que neste caso é 0). Depois volta a subir e chega próximo de $\frac{1}{3}$. Como começa num valor negativo e passa para um valor positivo, podemos se possível encontrar a raiz também, que no caso é 1.

Note que no ponto de máximo local a curvatura é para baixo (ponto -1), e para encostar a $\frac{1}{3}$ indo para $-\infty$ tem que mudar de curvatura. Iremos estudar essa mudança de curvatura mais tarde. No ponto de mínimo local ($\frac{1}{3}$), a curvatura é para cima, e quando encosta em $\frac{1}{3}$ quando vai para $+\infty$ a curvatura tem que ficar para baixo para ir se aproximando de $\frac{1}{3}$.

No exemplo 3, o domínio da função já não é $\mathbb{R}$ por que o denominador se anula em -1 e $+1$. Assim, quando formos esboçar o gráfico, além de tomar os limites para $-\infty$ e $+\infty$ temos que tomar os limites laterais para -1 e $+1$. Iremos fazer um exercício deste tipo em vídeo, então tentem entender o exemplo 3 junto com o vídeo.

O Exemplo 4 faz referência a f'' indicar o crescimento/decrescimento de f' que veremos que relaciona a concavidade de f .

O Exemplo 5, fica claro se vemos o esboço do gráfico em quanto pontos o gráfico corta o eixo x .

O Exemplo 6 é uma aplicação típica do TVM. No caso a) tome $f(x) = e^x - x$. Então $f'(x) = e^x - 1 > 0$ para todo $x > 0$. Logo, $f(x)$ é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e em particular, $f(x) > f(0)$ para todo $x > 0$. Então $f(x) > e^0 - 0 = 1 > 0$. Assim, $e^x - x > 0$ para todo $x \geq 0$. Portanto $e^x > x$.

Para b) comece com $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Então $g'(x) = e^x - x = f(x) > 0$ para todo $x > 0$. Logo g é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e $g(x) > g(0) =$

$e^0 - 0 = 1 > 0$. Assim $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ e portanto $e^x > \frac{x^2}{2}$ para todo $x \geq 0$.

A partir disto, é então mostrado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ por comparação, já que $\frac{e^x}{x} > \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} = +\infty$.

Usando então mudança de variável, é mostrado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ para todo $\alpha > 0$.

Os exemplos 7, 8 e 9 serão pulados e são usados para provar a regra de L'Hospital.

9.3. Concavidade e Pontos de Inflexão.

Na página 238 são dados exemplos de concavidade para cima e na página 239 é dado exemplos de pontos inflexão (onde há mudança de curvatura).

Se $f''(x) > 0$ para todo x num intervalo aberto então a curvatura é para cima. (Note que se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então $f'(x)$ é crescente, e então a inclinação das retas tangentes vai crescendo). Um ponto de mínimo local tem curvatura para cima. Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, temos um ponto de mínimo local.

Se $f''(x) < 0$ para todo x num intervalo aberto então a curvatura é para baixo. (Note que se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então $f'(x)$ é decrescente, e então a inclinação das retas tangentes vai decrescendo). Um ponto de máximo local tem curvatura para baixo. Se $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$, temos um ponto de máximo local.

Os exemplos desta subsecção sobre encontrar a concavidade e os pontos de inflexão. Iremos fazer alguns exercícios em video para encontrar os gráficos de função usando a segunda derivada.

9.4. Regras de L'Hospital.

As duas versões em que se pode aplicar a regra de L'Hospital estão na página 244. É importante sempre verificar se as frações satisfazem as condições. Pode ocorrer que a fração apresentada não seja a melhor opção para aplicar a regra. Ela SÓ funciona em frações. Pode-se aplicar a regra de L'Hospital mais de uma vez, desde que a fração que apareça ainda satisfaça as condições da regra de L'Hospital, lembrando que às vezes, é melhor fazer um rearranjo antes de aplicar a regra.

A regra de L'Hospital uma técnica útil, mas não funciona sempre ou ela pode ser mais complicada que combinando com o uso de outros métodos, então é preciso sempre pensar como usá-lo. A regra de L'Hospital não funciona em multiplicações, diferenças ou exponenciações e é preciso fazer um ajuste antes de aplicar a regra. Alguns exemplos estão no livro e há mais alguns nos vídeos de exercícios já postados.

Há uma introdução polinômio de Taylor de uma função. A ideia do polinômio de Taylor é que para cada grau n , o polinômio de Taylor de grau n é o polinômio que melhor aproxima a função em torno de algum ponto. No caso dos polinômios

de grau 1, a reta tangente é a reta que melhor aproxima a função no ponto de tangência. As provas da regra de L'Hospital na página 254 podem ser puladas.

9.5. Gráficos.

No início da subsecção é dado um roteiro para se fazer gráficos. Nas páginas 264 e 265 é apresentado o roteiro para se encontrar assíntotas. As assíntotas nem sempre existem. A assíntota se parece em alguns casos com uma 'reta tangente' do ponto no infinito. Para a assíntota $mx + n$ existir é necessário e suficiente que tanto m quanto n existam e sejam números reais. Quando m é 0 e n existe, temos uma assíntota horizontal (por ser paralela ou igual ao eixo x). Pode ocorrer de apenas uma assíntota existir, e pode ocorrer das duas assíntotas serem retas distintas. Assim, geralmente para ajudar a esboçar o gráfico usamos apenas as semirretas que interessam (ver exemplo 5 do livro na página 266).