MAT0105 – Geometria Analítica
1/2020

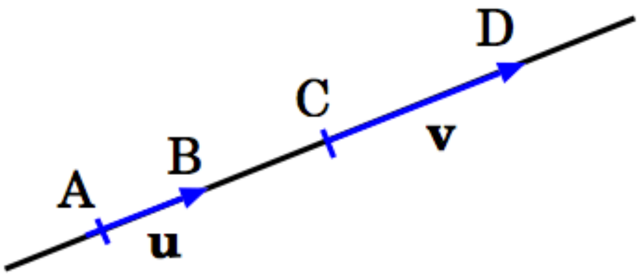
Nota Explicativa V3
Produto Escalar

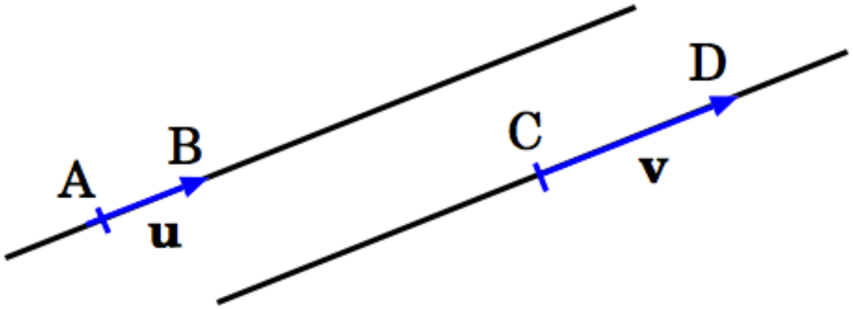
Profa. Ana Paula Jahn
anajahn@ime.usp.br

Relembrando

Vetores Colineares

- Dois vetores **u** e **v** são chamados de colineares se tiverem a mesma direção, ou seja, **u** e **v** são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.





Condição de Paralelismo

$$\vec{u} \,//\, \vec{v} \iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \vec{u} = k\vec{v}$$

Em coordenadas :

$$\vec{u} = (x_1, y_1) \;\; e \;\; \vec{v} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (x_1, y_1) = k(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (kx_2, ky_2) \Leftrightarrow x_1 = kx_2 \;\; e \;\; y_1 = ky_2$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

Suas componentes são proporcionais.

Condição de Perpendicularismo

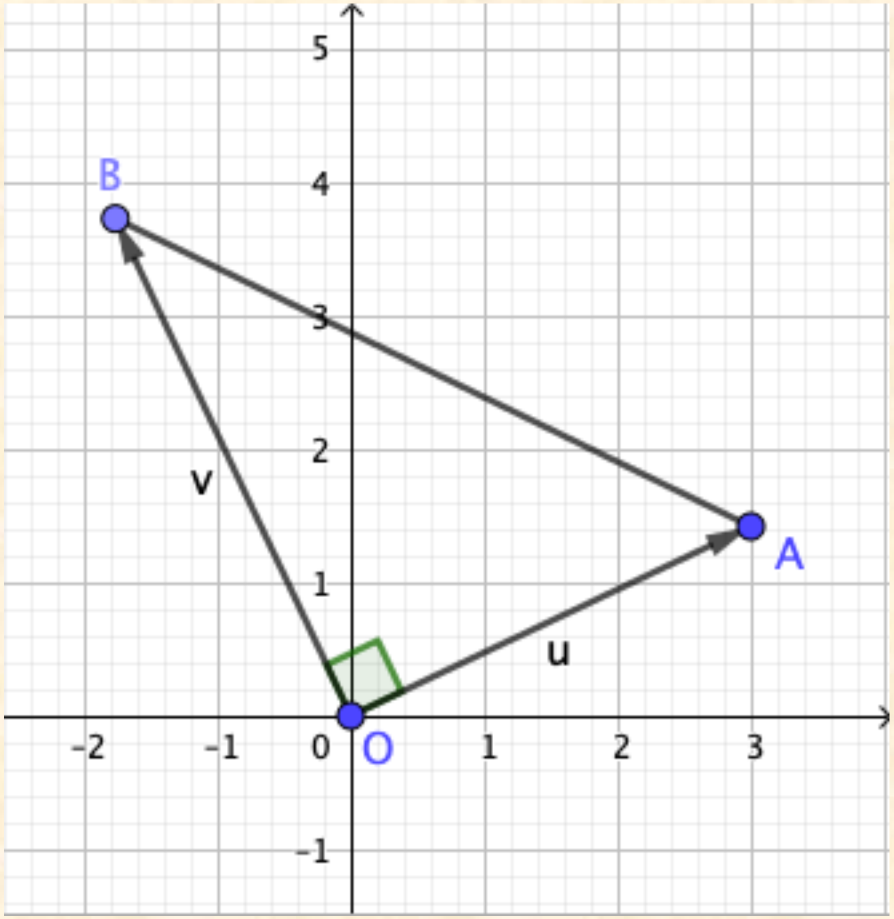
$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (\mathrm{x}_1, y_1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (\mathrm{x}_2, y_2)$

Se $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, por Pitágoras, tem-se:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2$$

Em coordenadas, resulta:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$



Produto escalar (ou produto interno)

Dados dois vetores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1) \ \ e \ \ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$$

O **produto escalar** desses vetores é o **número real** definido por:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ Lê-se: “u escalar v”

Note que: $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2 = \|\vec{u}\|^2$

Produto escalar ou Produto Interno

Idem para o espaço:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1) \ e \ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Propriedades do Produto Escalar

- Dados quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

I) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$ para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

II) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (comutativa)

III) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributiva)

IV) $\alpha(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(\alpha\mathbf{v})$

Produto escalar ou Produto Interno

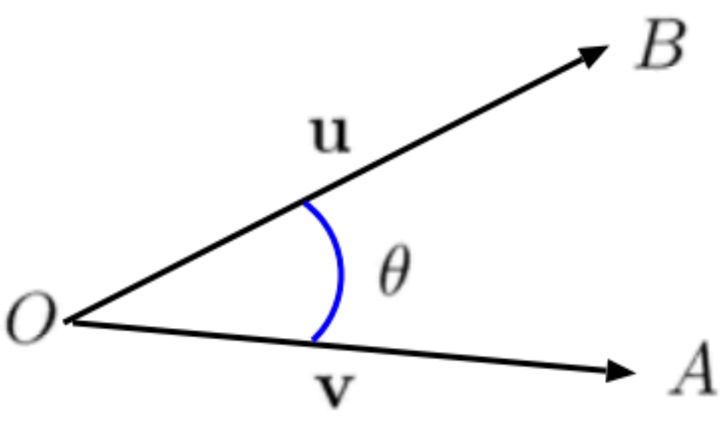
E se o produto escalar der outro número (diferente de zero), ***positivo*** ou ***negativo***, o que isso representa?

Antes de responder, vamos rever o conceito de **ângulo entre 2 vetores**

Relembrando

Ângulo entre dois vetores

O ângulo de dois vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$, não nulos, é o ângulo θ formado pelas semi-retas OA e OB, onde $0 \leq \theta \leq \pi$.



Ângulo entre dois vetores

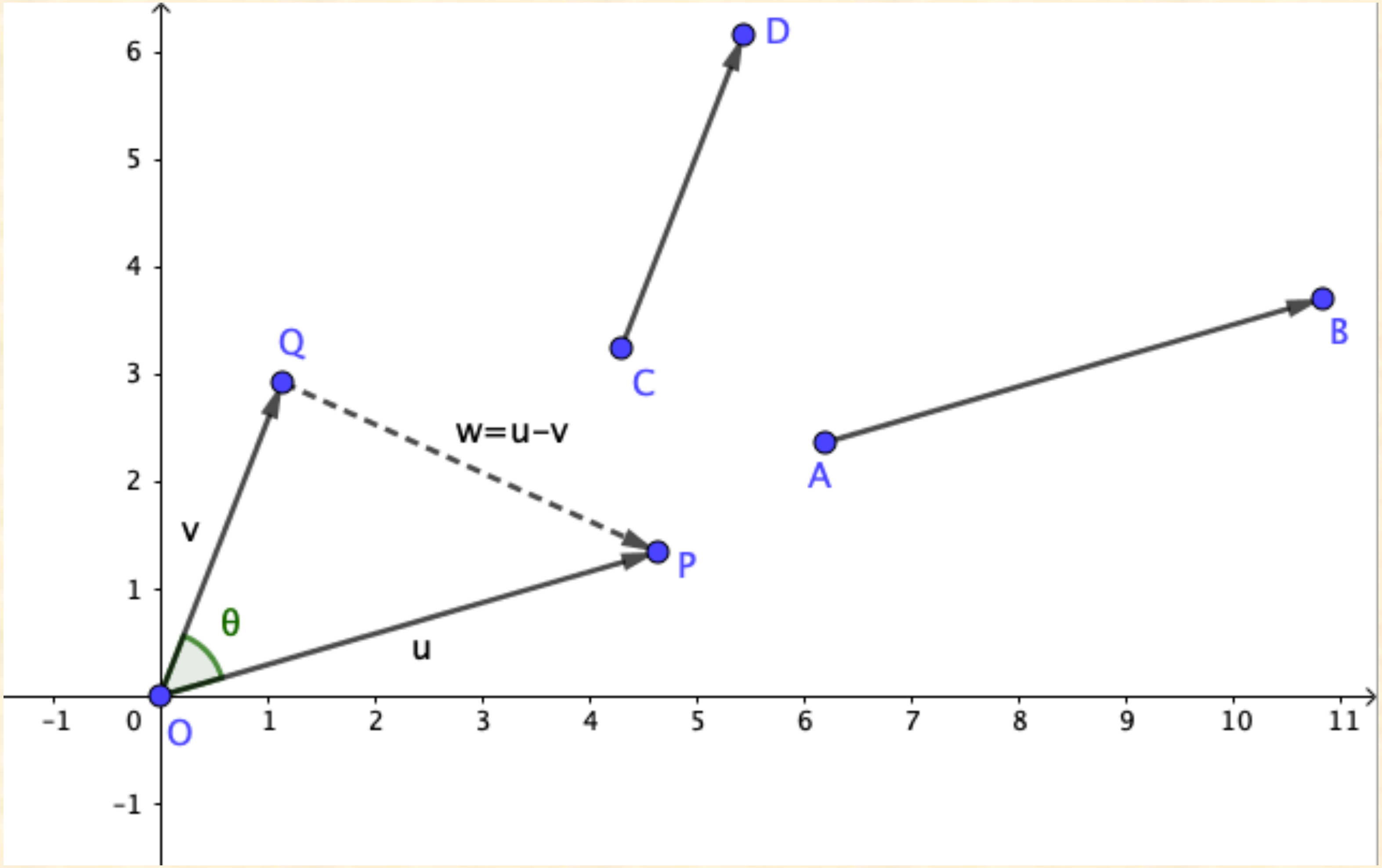
Se $\alpha = 90^o$ então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Se $\alpha = 180^o$ então os vetores são colineares de sentidos opostos

E como obter o **ângulo entre dois vetores** (não nulos) quaisquer?

Voltando ao Produto escalar

Considere a seguinte figura:



Voltando ao Produto escalar

Com base na figura dada, vamos calcular $||\vec{u} - \vec{v}||^2$ de duas maneiras diferentes:

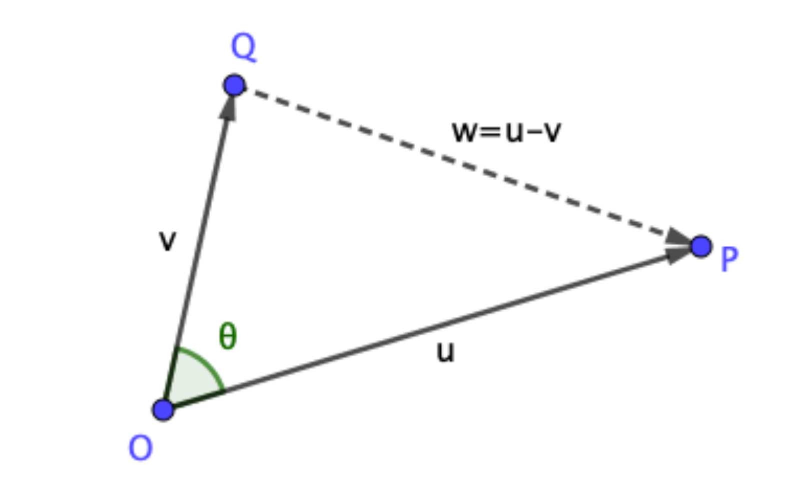
1) **geometricamente**, aplicando a **lei dos cossenos** no ΔABC

2) **algebricamente**, usando coordenadas de vetores com a definição e propriedades do produto escalar

Depois disso, vamos comparar os dois resultados.

(G)

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 =$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \quad \mathbf{(1)}$$



(A)

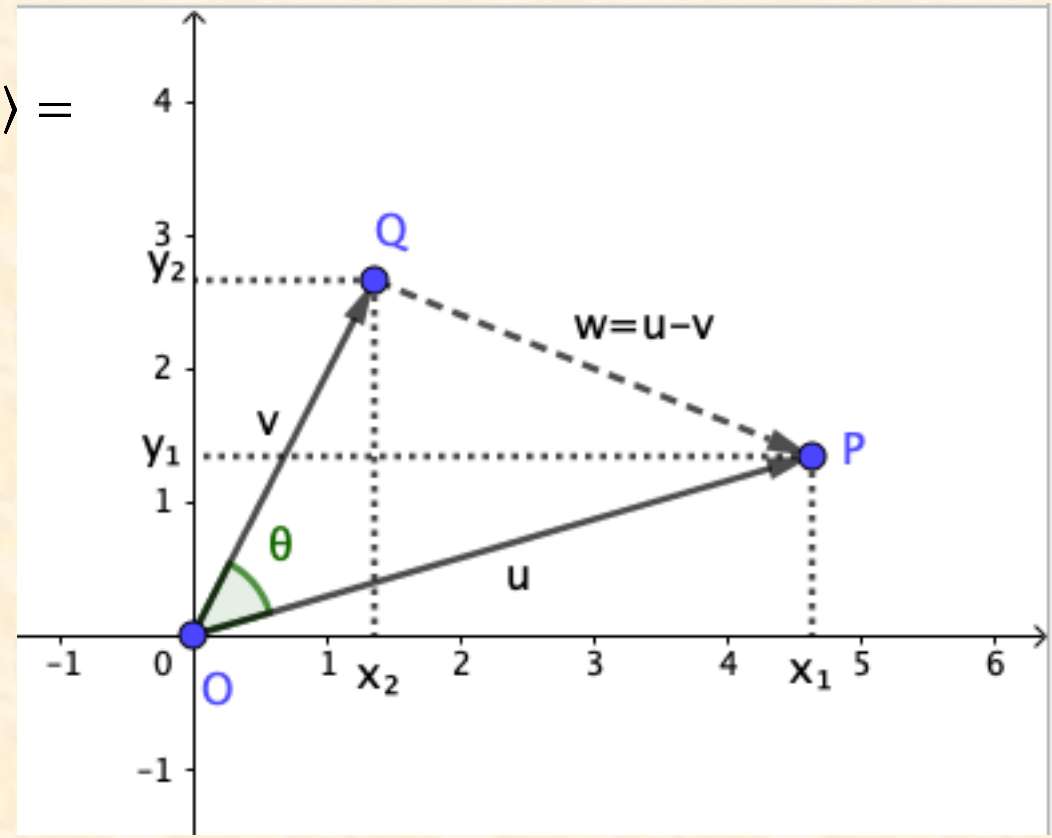
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle =$
$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle + \langle \vec{u},-\vec{v}\rangle + \langle -\vec{v},\vec{u}\rangle + \langle -\vec{v},-\vec{v}\rangle =$
$= \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$ **(2)**

(1) = (2)

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta =$
$= \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$

Logo,

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle$$
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$



(A) $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (c, d)$

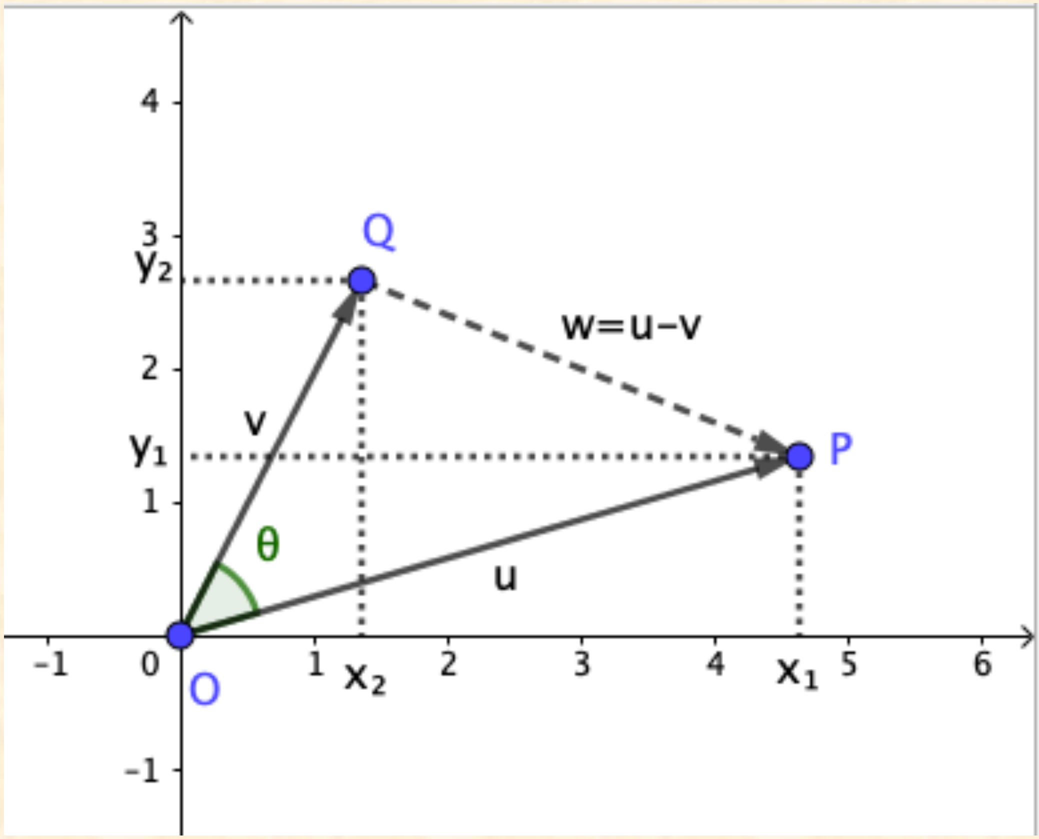
$$\vec{u} - \vec{v} = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 =$$
$$= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 +$$
$$d^2 - 2(ac + bd) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

(1) = (2)

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta =$$
$$= \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Logo,

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$



Exercícios

1) Determine um vetor unitário e ortogonal aos vetores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (-1,1,1)$.

2) Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \rangle$.