MAT0105 – Geometria Analítica

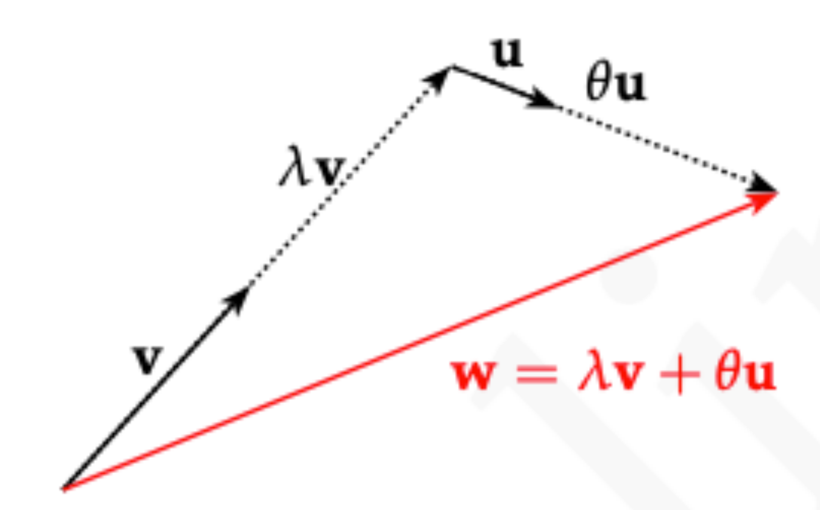
Vetores:
Combinação Linear, LD & LI

Profa. Ana Paula Jahn

anajahn@ime.usp.br

Combinação Linear

- A **adição de vetores** e a **multiplicação de um vetor por um escalar** nos permitem **obter novos** e **diferentes vetores a partir de alguns vetores dados**.
- Os vetores assim obtidos são ditos **combinação linear (c.l.)** dos vetores iniciais.



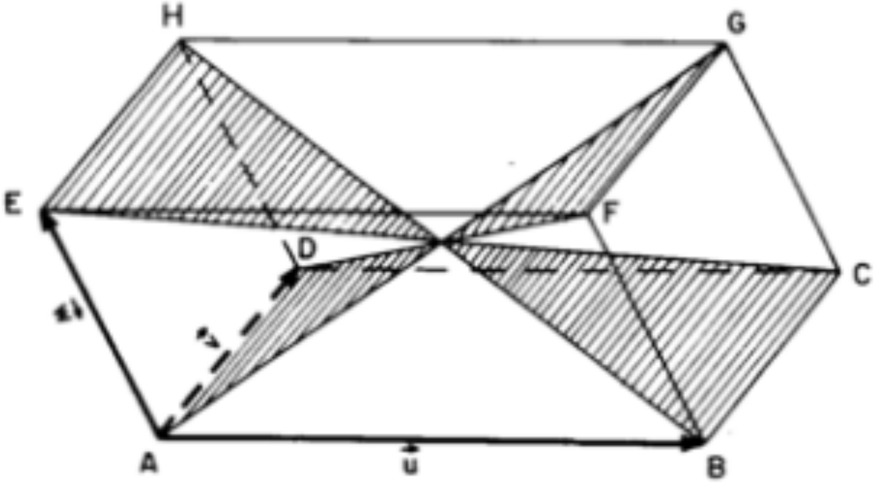
Combinação Linear

✓ Exemplo 1

Na figura abaixo está representado um paralelepípedo *ABCDEFGH*.
Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$,
exprima $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$ em função de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

a) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} =$
$= \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

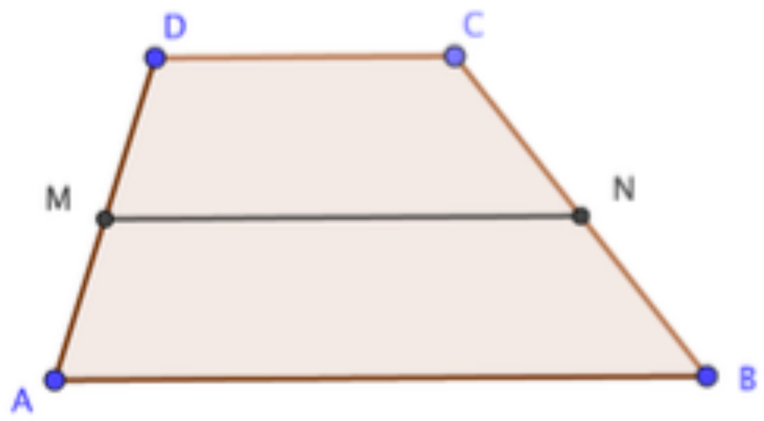
b) $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$= -\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}$



Combinação Linear

✓ Exemplo 2

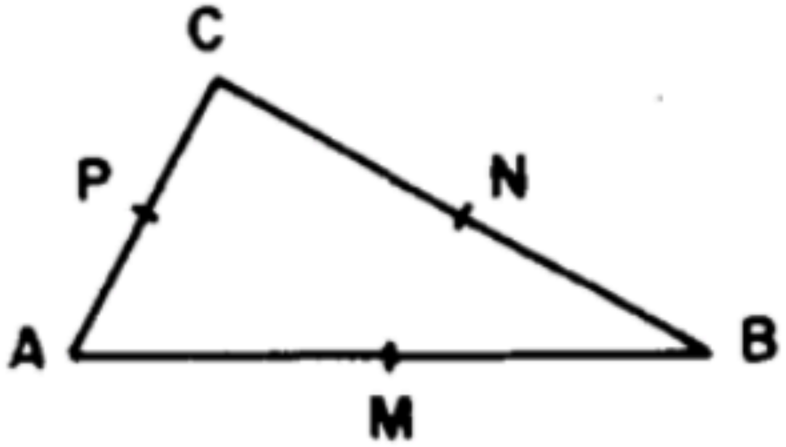
ABCD é trapézio
M, *N* pontos médios dos
lados não paralelos



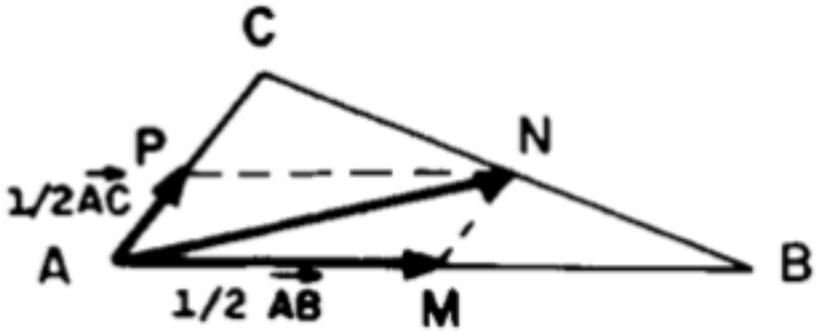
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

Combinação Linear

- ✓ Exemplo 3



$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Combinação Linear

- **Geometricamente**, diz-se que $\vec{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se $\vec{v}$ é **resultante de componentes** nas direções $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$.

- **Algebricamente**, um vetor $\vec{v}$ é uma combinação linear de um conjunto dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se ele resulta da **soma de múltiplos** destes vetores.

Combinação Linear

De modo geral, se diz que $\vec{v}$ é ***combinação linear*** dos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, ..., $\overrightarrow{v_n}$ se existem escalares a_1, a_2 ... a_n tais que: $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$

Combinação Linear

No plano: $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$

No espaço: $\vec{i} = (1, 0, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1,0)$ e $\vec{k} = (0, 0,1)$

Ex: No plano: $\vec{v} = (-3, 2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

No espaço: $\vec{u} = (4, -1, 7) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$

Pergunta: Qualquer vetor $\vec{v}$ do plano (espaço) pode ser escrito como **combinação linear** de $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ ($\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$)? Por quê?

Exercícios

Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesiano.

Exercício 1. Sejam $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (3,1)$ e $\vec{w} = (0,2)$.

(a) Escreva o vetor $\vec{x} = (8,6)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.

(b) É possível escrever $\vec{x}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de maneiras diferentes da encontrada em (a)? Se sim, exiba algumas.

(c) Escreva $\vec{x}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(d) É possível escrever $\vec{x}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de maneiras diferentes da encontrada em (c)? Se sim, exiba algumas.

(e) Escreva o vetor $\vec{y} = (a,b)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(f) O que é possível concluir?

Exercícios

$\vec{u} = (1{,}0), \vec{v} = (3{,}1)$ e $\vec{w} = (0{,}2)$
$\vec{x} = (8, 6)$ como ***combinação linear*** de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \delta\vec{w} = \vec{x}$$
$$\alpha(1{,}0) + \beta(3{,}1) + \delta(0{,}2) = (8{,}6)$$
$$(\alpha + 3\beta, \beta + 2\delta = (8{,}6)$$
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 8 \\ \beta + 2\delta = 6 \end{cases}$$

S.P.I.

Para: $\beta = 2$: $\alpha = 2 \; e \;\; \delta = 2$
De fato: $2(1{,}0) + 2(3{,}1) + 2(0{,}2) = (8{,}6)$

Para: $\beta = 3$: $\alpha = -1 \; e \;\; \delta = \frac{3}{2}$
De fato: $-1(1{,}0) + 3(3{,}1) + \frac{3}{2}(0{,}2) = (8{,}6)$

Exercícios

$\vec{u} = (1,0), \vec{v} = (3,1)$

$\vec{x} = (8,6)$ como ***combinação linear*** de $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{x}$$

$$\alpha(1,0) + \beta(3,1) = (8,6)$$

$$(\alpha + 3\beta, \beta) = (8,6)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 8 \ (1) \\ \quad \beta = 6 \ \ (2) \end{cases}$$

S.P.D.

Substituindo (2) em (1): $\alpha + 3.6 = 8 \implies \alpha = -10$

De fato: $-10(1,0) + 6(3,1) = (8,6)$

Exercícios

$\vec{u} = (1,0), \vec{v} = (3,1)$

$\vec{y} = (a, b)$ como ***combinação linear*** de $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{y}$$

$$\alpha(1,0) + \beta(3,1) = (a, b)$$

$$(\alpha + 3\beta, \beta) = (a, b)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = a \ (1) \\ \quad \beta = \mathrm{b} \ \ (2) \end{cases}$$

S.P.D.

Substituindo (2) em (1): $\alpha + 3. b = 8 \implies \alpha = 8 - 3b$

Exercícios

Exercício 2. Sejam $\vec{k} = (3, -1)$ e $\vec{l} = (-6, 2)$.

(a) É possível escrever $\vec{w} = (5, -4)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(b) É possível escrever $\vec{z} = (2, -\frac{2}{3})$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(c) É possível escrever $\vec{y} = (a, b)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(d) O que é possível concluir?

Nota-se que: $\vec{k} \,//\, \vec{l}$ $\left(\frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}\right)$; $\vec{z} = \frac{2}{3}\vec{k} = -\frac{1}{3}\vec{l}$

(a) Não. Qualquer combinação linear de $\vec{k}$ e $\vec{l}$ resulta em um vetor colinear (mesma direção) com $\vec{k}$ e $\vec{l}$

Exercício 2. Sejam $\vec{k} = (3, -1)$ e $\vec{l} = (-6, 2)$.

(a) É possível escrever $\vec{w} = (5, -4)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(b) É possível escrever $\vec{z} = (2, -\frac{2}{3})$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(c) É possível escrever $\vec{y} = (a, b)$ como combinação linear dos vetores $\vec{k}$ e $\vec{l}$?

(d) O que é possível concluir?

(b) Sim, pois $\vec{z}$ // $\overrightarrow{k}$ // $\vec{l}$:

$$\vec{l} = -2\vec{k}$$

$$\vec{z} = \frac{2}{3}\vec{k} = -\frac{1}{3}\vec{l}$$

$$\alpha\vec{k} + \beta\vec{l} = \vec{z}$$

$$\alpha(3, -1) + \beta(-6,2) = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$$

$$3\alpha - 6\beta = 2$$

Para: $\alpha = 1$; $\beta = \frac{1}{6}$

De fato: $1(3, -1) + \frac{1}{6}(-6,2) = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$

Para: $\alpha = -2$; $\beta = -\frac{4}{3}$

De fato: -$2(3, -1) - \frac{4}{3}(-6,2) = \left(2, -\frac{2}{3}\right)$

(c) Se, e só se, $\vec{y}$ // $\overrightarrow{k}$ // $\vec{l}$

Independência/Dependência Linear

Exercício

O vetor $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito com combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = \left(2,3,\frac{1}{3}\right)$?
Justifique sua resposta.

Não. $\nexists\, a, b \in \mathbb{R} : a\vec{v} + b\vec{w} = \vec{u}$

De fato: $a(-1,1,0) + b\left(2, 3, \frac{1}{3}\right) = (1, -1, 3)$

$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ a + 3b = -1 \\ \dfrac{b}{3} = 3 \end{cases}$$

S.I.

Independência/Dependência Linear

Um **conjunto de vetores** se diz **Linearmente Dependente** (**LD**) se houver um vetor neste conjunto que pode ser escrito como **combinação linear** dos demais.

Caso contrário, o conjunto é chamado **Linearmente Independente** (**LI**).

- ✓ Em V^2, geometricamente, dois vetores ***LD*** é sinônimo de ***vetores colineares (paralelos)***
- ✓ Em V^3, três vetores ***LD*** é sinônimo de ***vetores coplanares***
- ✓ Se um conjunto contiver o vetor nulo, então ele é LD, uma vez que o vetor nulo pode ser escrito como *c.l.* de qualquer conjunto de vetores.

Independência/Dependência Linear

Essa definição é equivalente à seguinte:

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ é **LI** se, e somente se, $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + ... + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{O}$ (vetor nulo) equivale a ter: $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ (número real zero), isto é, todos os escalares nulos.

Bases

Uma **base** do plano (espaço) é um conjunto de vetores tal que:

i) Esse conjunto é **gerador** do plano (espaço) (qualquer vetor do plano/espaço pode ser escrito como *c.l.* desses vetores do conjunto);

ii) Esse conjunto é **LI**.

Exemplo: **Bases canônicas**

Do plano V^2: B_c={(1,0), (0,1)}=$\{\vec{i}, \vec{j}\}$, ou ainda, o conjunto C= {(1,3), (2,0)}.

Do espaço V^3: B_c={(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1}=$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Ou ainda: .... (**Exercício**)