

Exercício de *Simultaneous Location And Mapping* (SLAM)

PMR3502

Thiago Martins

2020

Grupos de 2 alunos. Entrega até 04/07/2020. Forneça além dos resultados o código-fonte do seu programa e instruções para executá-lo.

Descrição do Sistema

Um robô triciclo como o da Figura 1 se desloca no plano xy . As rodas motoras giram em uma velocidade determinada por um controlador. O ângulo de basculamento da roda dianteira também é controlado.

Nota: Este sistema, a menos da parte sensorial, é *idêntico* ao estudado no exercício de EKF.

Este robô anda por um ambiente no qual existem objetos pontuais idênticos entre si.

Adota-se neste problema o vetor de estado do sistema dado por:

$$X_t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

acrescido do *mapa* do ambiente, representado por:

$$M = \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ \vdots \\ p_{mx} \\ p_{my} \end{bmatrix}$$

onde x, y são as coordenadas da posição do robô, p_{ix}, p_{iy} são as coordenadas do i -ésimo objeto e m é a quantidade total de objetos no ambiente.

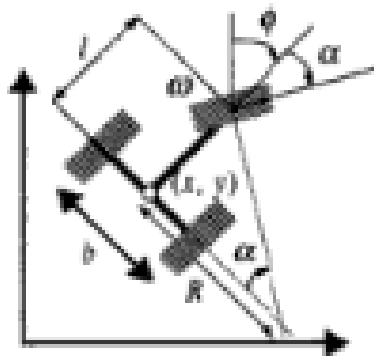


Figura 1: Geometria de Robô Triciclo

A ação de controle do sistema é representada pelo vetor:

$$u_t = \begin{bmatrix} v \\ \phi \end{bmatrix}$$

onde v é a velocidade longitudinal imposta pelas rodas motoras e ϕ é o ângulo de basculamento da roda dianteira.

Questão 1

O robô dispõe de um sensor de varredura capaz de detectar objetos à sua frente. Para cada objeto, o sensor oferece um par de valores ρ, ψ , onde ρ é a *distância* do objetos ao centro do robô e ψ o *azimute* do objetos, definido como o ângulo em que está o objetos, em relação ao eixo longitudinal do robô (ângulos positivos significam obstáculos à esquerda).

Esta medida neste sistema de coordenadas é feita com ruído Gaussiano de média nula e covariância $0,25^2$ em ρ e $(2^\circ 30')^2$ em ψ . Os dois ruídos são *independentes*.

Para simplificar o processamento, é conveniente transformar as coordenadas polares obtidas pelo sensor em coordenadas cartesianas no referencial do robô, definido como centrado no centro do robô, com a coordenada l paralela ao eixo longitudinal do robô e a coordenada r perpendicular a este e apontando para a esquerda.

- a) Escreva as funções de transformação $t(\rho, \psi)$ e $n(\rho, \psi)$ que convertem uma medida de objetos ρ, ψ em coordenadas l, r .
- b) Seja Q a matriz de covariância da medida de um objetos no sistema de coordenadas l, r . Escreva a expressão de $Q(\rho, \psi)$.

Questão 2

Considere o robô no estado $[x, y, \theta]^T$. Suponha que o robô detectou um objeto nas coordenadas locais l, r com matriz de covariância Q (neste mesmo referencial). Não há nenhum conhecimento prévio sobre o objeto.

- a) Qual a posição esperada no referencial global?
- b) Qual a covariância no referencial global em função de l, r e Q ?

Questão 3

Considere o robô no estado $[x, y, \theta]^T$ e um obstáculo na posição p_x, p_y .

- a) Escreva a expressão do valor esperado da medida do objeto nas coordenadas l, r .
- b) Escreva a matriz C , gradiente do vetor do item a) em relação às variáveis p_x, p_y .
- c) Escreva a matriz de covariância Q de uma medida do objeto no referencial l, r considerando que a mesma é feita com as incertezas em ρ, θ descritas na introdução.

Questão 4

O robô só consegue detectar objetos distantes de no máximo 3 metros e à sua frente com ângulos de $\pm 60^\circ$.

Suponha o robô na posição $x = 1, y = 2, \theta = 30^\circ$.

Determine para os seguintes obstáculos qual pode ser detectado e qual não:

1. $(2, 2)$

2. (1, 0)

3. (3, 4)

FastSlam

O FastSlam é uma aplicação do filtro de partículas ao problema do SLAM.

Cada partícula contém o estado do robô e uma estimativa do mapa, na forma:

$$P = \{[x, y, \theta]^T, \{O_1, \dots, O_m\}\} \quad (1)$$

Onde x, y, θ é a estimativa do robô e a sequência $\{O_1, \dots, O_m\}$ representa o mapa. Cada O_j corresponde a um objeto no mapa e a posição no mapa é representada por um par $\{\mu_j, \Sigma_j\}$, respectivamente o valor esperado da posição no sistema global de coordenadas e sua matriz de covariância.

O FastSlam é assim um filtro híbrido, no qual o mapa é produzido a partir de filtros Extendidos de Kallman.

O estado global do sistema no instante t é representado por um conjunto de partículas $S_t = \{P_1, \dots, P_n\}$.

Considere que a dinâmica do robô seja modelada pela equação:

$$X_t = F(X_{t-1}, u_t) + \varepsilon_t \quad (2)$$

onde u_t é a ação de controle no instante t e ε_t é um ruído aleatório Gaussiano de média nula e matriz de covariância R_t .

O FastSlam tem três etapas:

1. *Previsão*: É gerada uma nova população de partículas $\bar{S}_t$ a partir de S_{t-1} . Esta nova população é gerada sorteando-se novos estados de robô para cada partícula P de S_{t-1} usando a distribuição aleatória dada pela equação (2). Os mapas de $\bar{S}_t$ são obtidos nas etapas seguintes.
2. *Associação de Medidas*: Seja $Z_t = [z_1, \dots, z_l]$ uma coleção de l objetos medidos no instante t . Para cada partícula P_j define-se a relação $c_j(i)$ como o índice c do objeto no mapa de P_j ao qual corresponde a observação z_i ou o valor $m + 1$ se não há tal correspondência.

Como mencionado, todos os objetos são idênticos, de modo que tal correspondência deve necessariamente ser estimada pelo algoritmo. Será adotado aqui um método de *máxima verissimilhança*, que busca determinar a correspondência que maximiza a verissimilhança de uma dada observação. O mapa de *cada partícula* é um conjunto de m pares μ_i, Σ_i que contém o valor esperado e a matriz de covariância das coordenadas no referencial global x, y . Define-se para cada objeto no mapa a matriz

$$L_j = C(\mu_j)\Sigma_jC(\mu_j)^T + Q(\mu_j) \quad (3)$$

onde $C(\mu_j)$ é a matriz da derivada do valor de uma medida no referencial local l, r de um objeto na posição μ_j em relação às suas coordenadas locais (a mesma obtida no item b) da questão 3) e $Q(\mu_j)$ é a matriz de covariância desta mesma medida (a mesma obtida no item c) da questão 3).

Para cada combinação possível de uma observação de índice i e objeto no mapa j define-se:

$$d_{i,j} = z_i - \hat{z}_j \quad (4)$$

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi L_j)}} e^{-(d_{i,j}^T (L_j^{-1}) d_{i,j})/2} & \text{para } j \leq m \\ \alpha & \text{para } j = m + 1 \end{cases} \quad (5)$$

onde $\hat{z}_j$ é o valor esperado da medida do j -ésimo obstáculo no referencial local l, r , obtido no item a) da questão 3 e α é um parâmetro global do algoritmo.

$$c(i) = \arg \max_j p_{i,j} \quad (6)$$

ou seja, o índice j obstáculo no mapa para o qual o valor $p_{i,j}$ é mínimo e menor do que α , ou $m + 1$ se não houver tal valor.

Note que esta estratégia permite a associação de observações distintas ao mesmo objeto no mapa. Para evitar isso, faça primeiro a associação da observação i que tem o *maior* valor de $p_{i,j}$. Se o índice j não for $m + 1$ (ou seja, a observação está associada a um objeto no mapa), então este índice j é *retirado* dos valores de $p_{i,j}$ das outras observações. Retire também o índice i dos valores de $p_{i,j}$ e recomece até que todas as observações tenham sido associadas a algum objeto ou ao índice $m + 1$ (este, naturalmente, pode se repetir).

3. *Correção*: Gera-se o mapa das partículas em $\bar{S}_t$ através da incorporação das medições no instante t . Seja o mapa de S_{t-1} definido como $\{O_1, \dots, O_m\}$. Lembra-se aqui que cada O mapa de $\bar{S}_t$ é $\{\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_m\} \cup \bar{M}$ onde

$$\bar{O}_j = \begin{cases} \{K_j(z_i - \hat{z}_j), (I - K_j C(\mu_j)) \Sigma_i\} & \text{se há } i \text{ tal que } c(i) = j \\ O_j & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

ou seja, cada objeto associado a uma dada observação z_i é corrigido por um EKF, os demais são copiados diretamente de S_{t-1} .

O ganho de Kallman pode ser obtido das matrizes obtidas na etapa 2:

$$K_j = \Sigma_j C(\mu_j)^T L_j^{-1} \quad (8)$$

Note que pela definição das matrizes L_j este é o mesmo ganho de um filtro de Kallman Extendido.

O conjunto $\bar{M}$ é formado por objetos novos no mapa que correspondem a todas as observações não associadas a um objeto preexistente. A suposição quanto a estas observações é que elas correspondem a um objeto em posição ainda não visitada no mapa. A cada observação não associada (ou seja, cujo $c(i) = m + 1$) corresponde um elemento de $\bar{M}$ com μ e Σ como determinados na questão 2.

4. *Reamostragem*

O novo conjunto de partículas S_t é obtido por uma amostragem por importância das partículas em $\bar{S}_t$. O peso w para uma partícula é dado por:

$$w = \prod_i p_{i,c(i)} \quad (9)$$

ou seja, o produto, para cada observação i , do *menor* valor de $p_{i,j}$ obtido na etapa 2. Note que este valor será distinto para cada partícula, por que embora as observações sejam as mesmas, os valores de $p_{i,j}$ são diferentes para cada partícula.

Questão 5

Suponha que a partícula $\bar{P}$ foi produzida na etapa 1 do FastSlam e contém a seguinte hipótese sobre o estado do robô:

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -90^\circ \end{bmatrix}$$

O mapa da partícula a partir da qual $\bar{P}$ foi gerada é:

$$M = \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

O robô realiza a observação de 3 objetos: $z_1 = [2, 0^\circ]$, $z_2 = [5, -37^\circ]$ e $z_3 = [\sqrt{2}, 45^\circ]$. Estas observações são feitas em coordenadas polares ρ, θ .

Lembre-se que as covariâncias do erro de medição são de 0, 25² em ρ e (2°30')² em ψ .

- Calcule para cada observação a posição equivalente no sistema de coordenadas locais l, r .
- Determine os valores de $p_{i,j}$ como definidos na equação (5) para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$.
- Determine as associações de cada observação.
- Calcule o mapa atualizado da partícula $\bar{P}$.
- Calcule o peso total da partícula $\bar{P}$.

Questão 6

:

Implemente uma previsão simples de estado utilizando a linguagem de programação que achar mais adequada (Sugestão: Python com o pacote `numpy`).

Neste passo você deve estimar o estado recursivamente com a equação:

$$\bar{\mu}_t = F(\mu_{t-1}, u_t) \quad (10)$$

Como o filtro de partículas é não-paramétrico, não é necessário calcular covariâncias.

Para o estado inicial use:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O seu programa deve processar uma entrada no formato descrito pela seção “Dados”. Processe os parâmetros u_t no arquivo csv anexado neste enunciado. Plote os valores de x_t, y_t de $\bar{\mu}_t$ no plano x, y .

Questão 7

:

Implemente o FastSlam.

O passo de previsão deve para cada partícula somar o estado previsto a uma perturbação aleatória.

Considere para isso que ao final do arco de circunferência percorrido pelo robô soma-se um deslocamento aleatório longitudinal, um deslocamento radial e um deslocamento angular. Estes três deslocamentos são independentes, Gaussianos de média nula e covariâncias $s_{l_t}^2, s_{r_t}^2$ e $s_{\theta_t}^2$ respectivamente. As covariâncias $s_{l_t}^2$ e $s_{r_t}^2$ são de medidas de perturbação em um referencial ideal que faz um ângulo de $\hat{\theta}_t$ com o eixo x . Esta orientação seria a do eixo longitudinal do veículo se este descrevesse um arco *perfeito* de circunferência no instante t de modo que $\hat{\theta}_t = F(X_{t-1}, u_t)_3$ (ou seja, a orientação determinada pela função F sem ruído). No entanto, a matriz R , de covariância do ruído do processo, está escrita no referencial *Global*. Neste referencial, as perturbações em x e y podem não ser independentes.

Os valores das covariâncias $s_{l_t}^2, s_{r_t}^2$ e $s_{\theta_t}^2$ dependem do parâmetro v_t (o primeiro coeficiente de u_t) de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} s_{l_t}^2 &= \left(\frac{v_t}{6}\right)^2 \\ s_{r_t}^2 &= \left(\frac{v_t}{12}\right)^2 \\ s_{\theta_t}^2 &= \left(\frac{v_t}{8l}\right)^2 \end{aligned}$$

Onde l é a distância entre os eixos do veículo e vale 0, 3.

Nota: Este é exatamente o mesmo modelo dinâmico do exercício de EKF.

Sugestão: Lembre-se que os ruídos nas coordenadas globais *não* são independentes, não basta gerar 3 variáveis aleatórias independentes para cada partícula. Em Python existe a função `numpy.random.multivariate_normal` para gerar variáveis aleatórias Gaussianas multidimensionais.

Use 0,05% como valor de α e ao menos 200 partículas.

Durante os passos de correspondência e atualização, novos objetos podem ser criados nos mapas de cada partícula. A medida que o processo progride o mapa tende a ficar excessivamente poluído.

Para mitigar este efeito, adote um procedimento de limpeza. A cada objeto no mapa de cada partícula está associado um contador, inicializado com 1.

A cada vez que um objeto no mapa é associado a uma observação, este contador deve ser incrementado.

A cada vez que um objeto *deveria* ter sido observado (vide questão 4) e não o foi, este contador deve ser decrementado.

Quando o contador associado a um objeto chegar a zero, este deve ser *retirado* do mapa.

Plote a trajetória no plano x, y do robô, usando para isso a *média* dos estados das partículas em S_t .

Plote o mapa final.

Para tanto, sorteie aleatoriamente uma partícula do valor final de S_t e plote os objetos para os quais o contador vale mais do que 10.

Dados

Este exercício usa dados simulados do robô, especificamente as entradas u_t e as medições z_t . Estes dados são fornecidos no arquivo `fastslam.csv` aqui anexado.

Este arquivo está no formato CSV (*comma-separated values*). Cada linha do arquivo corresponde a um instante do sistema e possui $2 + 2l$ componentes separadas por vírgula, onde l é a quantidade de observações (variável) feitas no instante. As duas primeiras componentes são as duas componentes de u_t , respectivamente a velocidade das rodas motores e o ângulo (em graus) da roda dianteira (positivos para guinadas à esquerda). Cada par de componentes seguintes corresponde a uma observação de um objeto. Os valores são respectivamente o valor ρ e o valor ϕ . Por exemplo, a linha:

```
0.2, 3.0859, 1.1948, -37.5276, 0.9744, 1.6443, 2.1915, 49.45910
```

indica que em um determinado instante, as rodas motoras se deslocaram com velocidade 0,2, a roda dianteira estava basculada de 3,0 graus para a esquerda e observou-se 3 objetos, um a 1,2 de distância e a 37,5 graus para a direita, um a 0,97 de distância e a 1,64 graus a esquerda e um a 2,2 de distância e 49,5 graus a esquerda.