

Lista Suplementar 5

Nícolas André da Costa Morazotti

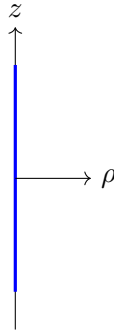
11 de Junho de 2020

Questão 1

O módulo do campo magnético de um fio fino, a distância r do fio, é dado pela equação

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (1)$$

O campo é perpendicular ao fio. Adote um sistema de referências que tem origem num ponto qualquer do próprio fio e eixo z coincidente com o fio, de tal forma que $\hat{z}$ aponte no sentido da corrente I que circula no fio. Escreva a expressão matemática para o vetor $\mathbf{B}(x, y, z)$ num ponto $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ fora do eixo $\hat{z}$.



Vamos chamar a distância do ponto ao fio fino de ρ , tal que $\rho^2 = x^2 + y^2$. Desta forma, o campo magnético pode ser reescrito como $B = \mu_0 I / 2\pi \rho$. Sabemos que o campo magnético é circulante ao redor do fio e, portanto, $\mathbf{B} = B\hat{\phi}$. Assim, o campo magnético não depende da altura z que estamos analisando (no caso de um fio infinito), sendo então escrito como

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \mu_0 \frac{I}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\phi}.$$

O vetor ϕ pode ser calculado utilizando o método do determinante apresentado na lista 5. Ele deve ser perpendicular a $\hat{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$.

$$\vec{\phi} = \begin{vmatrix} x & y \\ \hat{x} & \hat{y} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$= x\hat{y} - y\hat{x}. \quad (3)$$

Podemos calcular o versor $\hat{\phi}$ calculando seu módulo:

$$|\vec{\phi}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\hat{\phi} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{x}. \quad (5)$$

Com esse versor, podemos reescrever $\mathbf{B}$ como

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{x^2 + y^2}. \quad (6)$$

Questão 2

Calcule a divergência do campo encontrado na questão 1 e verifique que ela satisfaz à equação de Maxwell apropriada.

O divergente de $\mathbf{B}$ pode ser calculada como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1} \right] \quad (8)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [(x^2 + y^2)^{-2} 2xy] \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1} \right] \quad (10)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} [-(x^2 + y^2)^{-2} 2xy] \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

que satisfaz a respectiva lei de Maxwell.

Questão 3

Calcule o rotacional do campo encontrado na questão 1 e verifique que ele satisfaz à equação de Maxwell apropriada.

Calculando o rotacional, temos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \hat{x} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (13)$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (14)$$

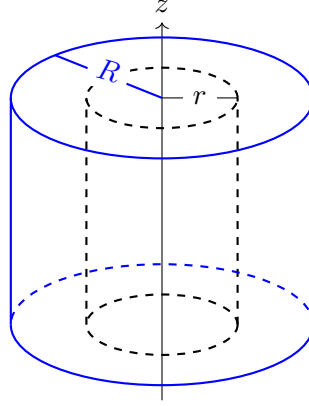
$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} 2x + \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} 2y \right] \quad (15)$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{2}{x^2 + y^2} - 2 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad (16)$$

$$= \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2}{x^2 + y^2} \right] \quad (17)$$

$$= 0, \quad (18)$$

que é compatível com a lei de Maxwell do rotacional de $\mathbf{B}$ pois não há correntes nos pontos que estamos analisando, uma vez que $x^2 + y^2 > 0$.



Questão 4

Repita a questão 1 para o campo no interior de um cabo de raio R , para distâncias $r \leq R$.

Para o interior de um cabo de raio R , passando uma densidade de corrente uniforme $\mathbf{j} = \hat{z}I/\pi R^2$, podemos utilizar a Lei de Ampère para calcular o campo magnético à distância r :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 j \pi r^2 \quad (19)$$

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \quad (20)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \hat{\phi} \quad (22)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R^2} \left(\frac{x\hat{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y\hat{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (23)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (x\hat{y} - y\hat{x}). \quad (24)$$

Questão 5

Repita as questões 2 e 3 para o campo da questão 4.

O divergente de $\mathbf{B}$ é identicamente nulo, uma vez que em sua componente $\hat{x}$ não há dependência em x , bem como sua componente $\hat{y}$, que não depende de y . O rotacional de $\mathbf{B}$, por sua vez, se torna então

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{z} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) \quad (25)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \hat{z} \quad (26)$$

$$= \mu_0 \mathbf{j}, \quad (27)$$

que é exatamente a respectiva lei de Maxwell.

Questão 6

Uma placa plana quadrada, com comprimento e largura muito grandes, tem espessura d . Como indicado na figura 1, a placa é percorrida por uma densidade uniforme de corrente $\vec{j}$ na direção vertical, sentido ascendente. Encontre o campo magnético a uma distância z do plano da placa. Adote o sistema de referências indicado na figura. *Sugestão: por analogia com o que ocorre perto da superfície de um fio, você poderá ver que o campo magnético deve ser horizontal. Escolha um caminho adequado e aplique a lei de Ampère a ele. Note que, para $z < 0$ (atrás da figura), o campo também é horizontal, mas tem sentido oposto ao do campo para $z > 0$.*

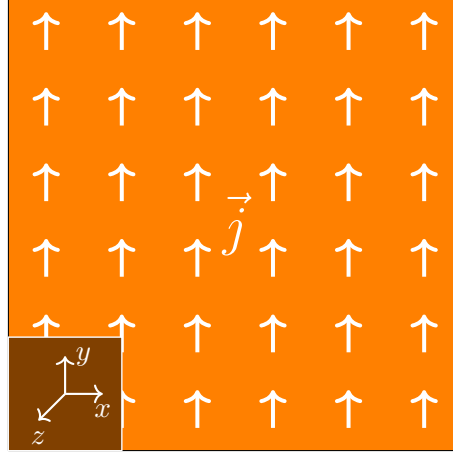
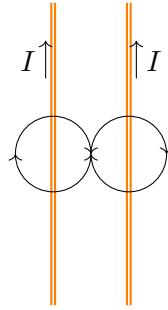


Figura 1: Questão 6.

Considere que a placa é composta por diversos fios. Vamos analisar o que ocorre com o campo magnético que eles geram em um ponto equidistante a ambos, no plano da placa.



O desenho nos mostra uma coisa muito interessante! Os fios cancelam o campo magnético, pois o módulo do campo é o mesmo, mas estão em sentidos opostos! Veja que, contudo, a componente exatamente acima da placa sempre se soma, seguindo a regra da mão direita. Assim, a componente do campo magnético é apenas paralela ao plano. Vamos considerar então um circuito como apresentado na figura 2.

Usando a lei de Ampère integral, podemos reescrever a integral de caminho utilizando os segmentos mostrados.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_i \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{ii} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{iii} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{iv} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (28)$$

$$= \mu_0 j L d, \quad (29)$$

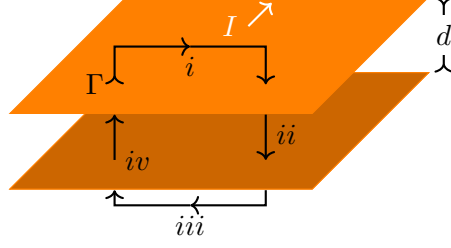


Figura 2: Circuito para a Lei de Ampère.

com L o lado em x do circuito e d a espessura do material (afinal, só há corrente dentro do material).

O campo nos caminhos ii e iv são nulos. Escolhendo o $d\mathbf{l}_i = dx\hat{x}$ (que vai de $-L/2$ até $L/2$) e $d\mathbf{l}_{iii} = -dx\hat{x}$ (que vai de $L/2$ até $-L/2$), vemos que

$$\int_i \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{iii} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-L/2}^{L/2} B dx - \int_{L/2}^{-L/2} B dx \quad (30)$$

$$= 2BL \quad (31)$$

$$= \mu_0 j L d \quad (32)$$

$$B = \frac{\mu_0 j d}{2}. \quad (33)$$

Para $z > d/2$, $\mathbf{B} = B\hat{x}$. Para $z < d/2$, $\mathbf{B} = -B\hat{x}$. Veja que o campo **não depende** da altura que observamos o campo, assim como no caso de uma placa carregada eletricamente.

Questão 7

Um cabo co-axial é constituído por um cilindro metálico rodeado por uma casca cilíndrica do mesmo metal, conforme mostra a seção reta do cabo na figura 3. Uma corrente I é conduzida pelo cabo interno no sentido indicado na figura. A mesma corrente circula pelo condutor externo, no sentido oposto, como indicado na figura. Usando um sistema de referências com a orientação indicada no canto esquerdo inferior da figura 1, encontre o campo magnético em função da distância r até o eixo central, para $r < R$, para $R < r < 2R$, para $2R < r < 3R$ e para $3R < r$.

Vamos colocar a origem do sistema de referências no centro do cabo coaxial, de modo que o vetor $\hat{z}$ aponta saindo da folha. Desta maneira, podemos reescrever as correntes utilizando a densidade de corrente. Na região $r < R$,

$$\mathbf{j} = -\hat{z} \frac{I}{\pi R^2}. \quad (34)$$

Já para a região $2R < r < 3R$,

$$\mathbf{j} = \hat{z} \frac{I}{\pi[(3R)^2 - (2R)^2]} \quad (35)$$

$$= \hat{z} \frac{I}{5\pi R^2}. \quad (36)$$

Para calcular o campo magnético, escolheremos sempre um circuito circular de raio r , que nos diz em qual região estamos, e caminhamos por ele no sentido anti-horário. Desta maneira, todos os elementos de caminho serão $d\mathbf{l} = \hat{\phi} r d\phi$. O que mudará de região para região é a corrente.

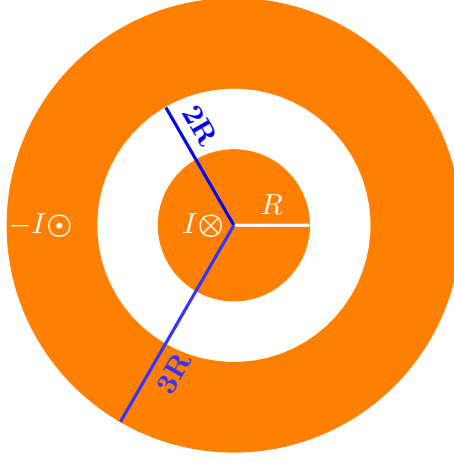


Figura 3: Questão 7.

Para a região $r < R$,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{int} \quad (37)$$

$$B2\pi r = -\mu_0 j \pi r^2 \quad (38)$$

$$= -\mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 \quad (39)$$

$$\mathbf{B} = -\hat{\phi} \mu_0 \frac{I}{2\pi R^2} r. \quad (40)$$

Na região $R < r < 2R$, toda a corrente do cabo interno é interna. Assim,

$$B2\pi r = -\mu_0 I \quad (41)$$

$$\mathbf{B} = -\hat{\phi} \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad (42)$$

apontando na mesma direção que o campo anterior.

Para $2R < r < 3R$, a área que há corrente do cabo externo interna à curva é

$$A = \pi r^2 - \pi(2R)^2 \quad (43)$$

$$= \pi(r^2 - 4R^2). \quad (44)$$

Com isso, a lei de Ampère nos dá que

$$B2\pi r = \mu_0(-I + jA) \quad (45)$$

$$= \mu_0 \left[-I + \frac{I}{5\pi R^2} \pi(r^2 - 4R^2) \right] \quad (46)$$

$$= -\mu_0 I \left[1 - \frac{r^2 - 4R^2}{5R^2} \right] \quad (47)$$

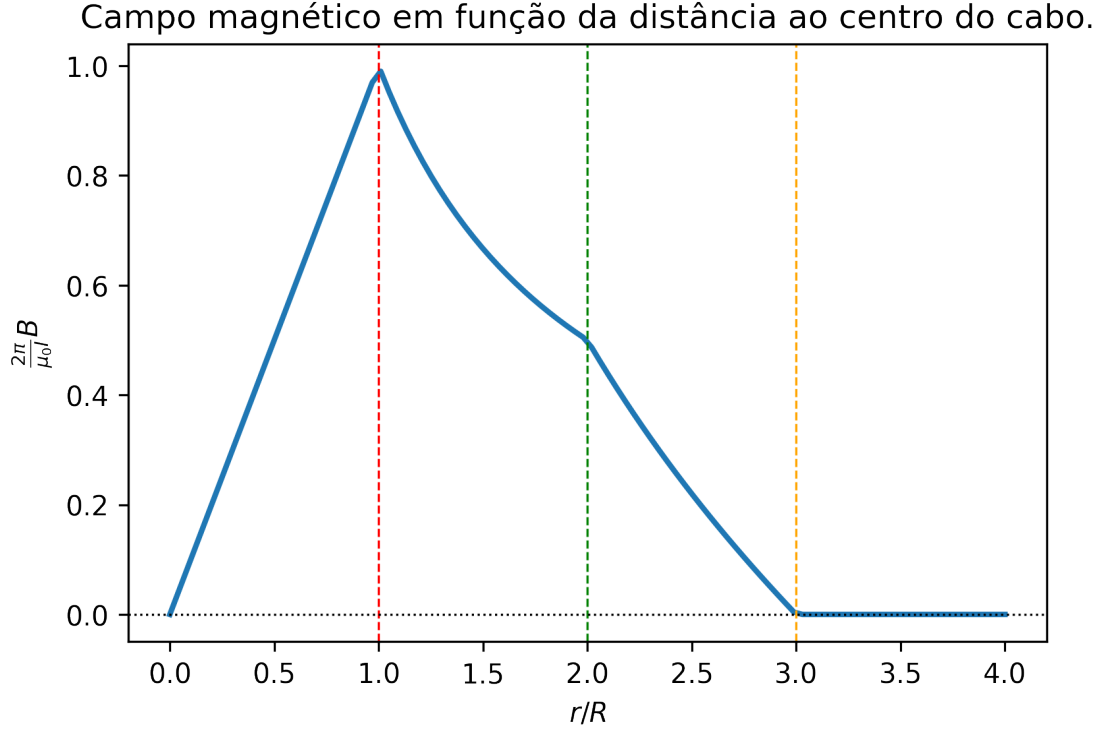
$$= -\mu_0 I \frac{9R^2 - r^2}{5R^2} \quad (48)$$

$$= -\mu_0 I \left(\frac{9}{5} - \frac{r^2}{5R^2} \right) \quad (49)$$

$$\mathbf{B} = -\hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{9}{5r} - \frac{r}{5R^2} \right). \quad (50)$$

Por fim, para $r > 3R$, a corrente interna à curva é nula, o que significa que

$$\mathbf{B} = 0. \quad (51)$$



Questão 8

Vimos que o campo magnético pode ser calculado do $\mathbf{A}$. Sabe-se que o potencial vetor numa região do espaço é dado pela expressão

$$\mathbf{A} = cy\hat{x} - cx\hat{y}, \quad (52)$$

onde c é uma constante (a componente z é nula). Calcule o campo magnético correspondente.

O campo magnético pode ser obtido de $\mathbf{A}$ calculando

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (53)$$

$$= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (54)$$

$$= \hat{z}(-c - c) \quad (55)$$

$$= -2c\hat{z}. \quad (56)$$

Questão 9

Faça um desenho esquemático mostrando as linhas de campo do potencial vetor $\mathbf{A}$ na questão 8 e as do campo magnético resultante. *Sugestão: para desenhar as linhas de $\mathbf{A}$, ajuda encontrar*

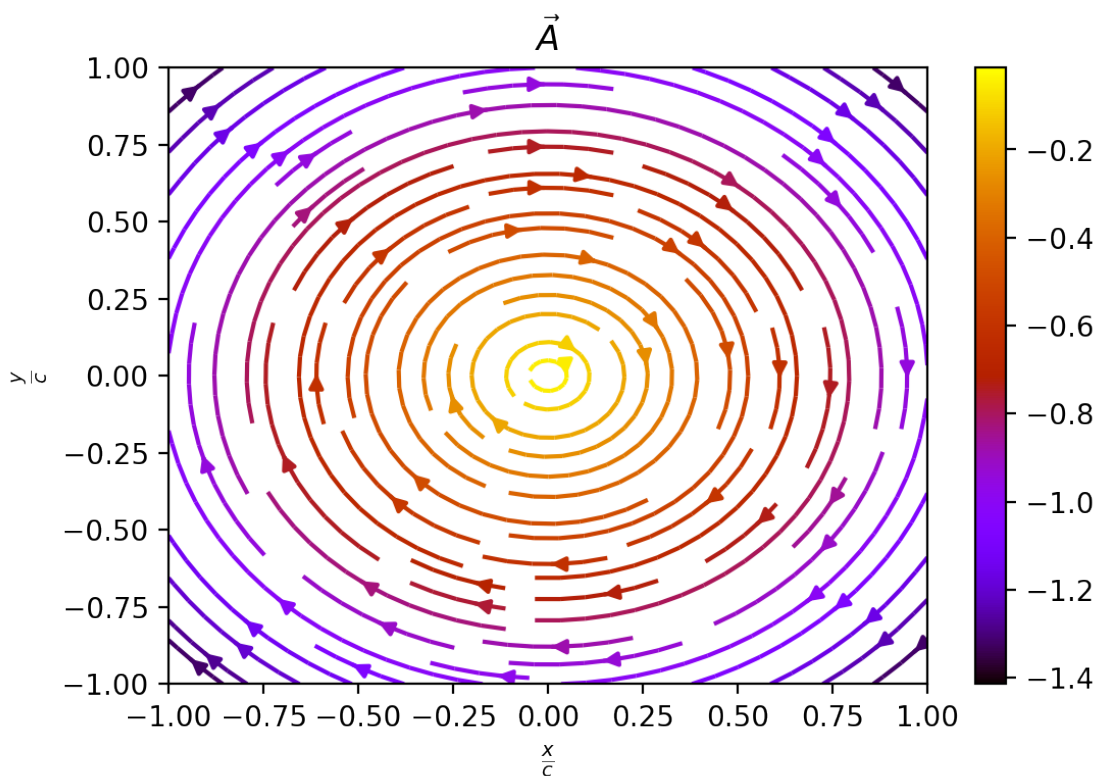
um vetor que tem o mesmo módulo, mas é ortogonal a ele. Para achar esse vetor, use a regra do determinante, enunciada na questão 1 da L5.

O vetor ortogonal a $\mathbf{A}$, calculado pelo método do determinante, é

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} cy & -cx \\ \hat{x} & \hat{y} \end{vmatrix} \quad (57)$$

$$= c(x\hat{x} + y\hat{y}). \quad (58)$$

Esse vetor é bem mais fácil de desenhar! Veja que ele é basicamente um vetor radial que sai do centro do sistema de referências. Assim, para desenhar o vetor $\mathbf{A}$, basta desenhar as curvas que são ortogonais a tal vetor.



Outro método que poderíamos ter usado para desenhar é lembrar do vetor $\boldsymbol{\theta} = x\hat{y} - y\hat{x}$ (que pode ser calculado a partir de $\mathbf{r}$ com o determinante). Com ele, vemos que $\mathbf{A} = -c\boldsymbol{\theta}$. Então, ele deve ser circular e apontar no sentido horário.

O campo magnético, por sua vez, é constante em todo ponto e aponta em $-\hat{z}$, como mostrado na figura 4.

Questão 10

Expresse a unidade do potencial vetor nas unidades básicas do Sistema Internacional (kg, m, s e C). *Sugestão: parta da força de Lorentz para expressar a unidade de campo magnético e lembre-se de que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.*

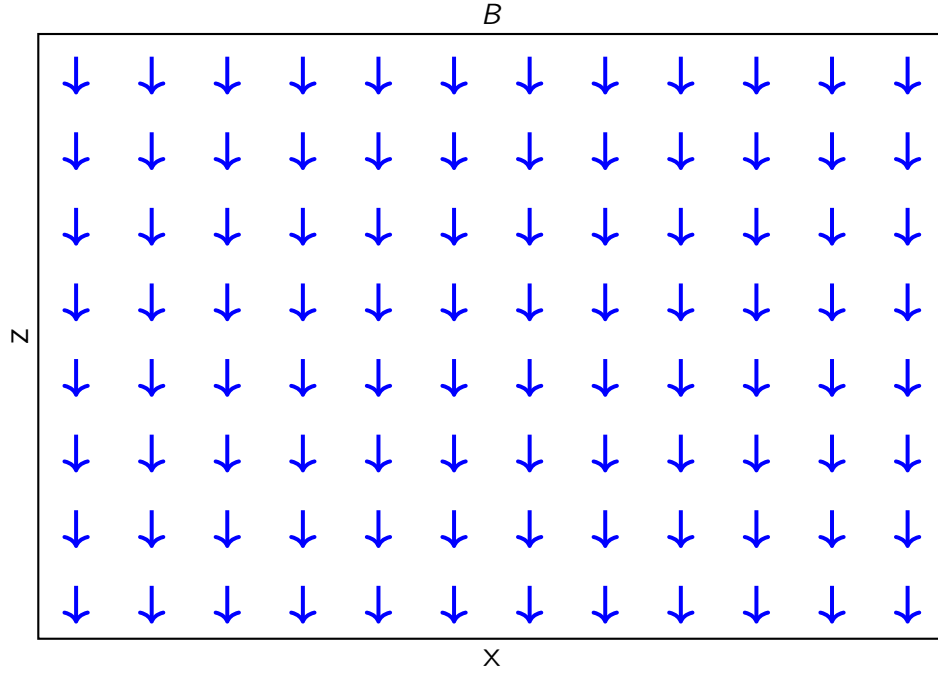


Figura 4: Campo magnético da questão 9.

Sabemos que a força de Lorentz para uma partícula num campo magnético pode ser escrita como $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

$$[F] = [q][v][B] \quad (59)$$

$$kg \frac{m}{s^2} = C \frac{m}{s} [B] \quad (60)$$

$$[B] = \frac{kg}{Cs} \quad (61)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (62)$$

$$[B] = [\nabla][A] \quad (63)$$

$$\frac{kg}{Cs} = \frac{1}{m} [A] \quad (64)$$

$$[A] = \frac{kg}{C} \frac{m}{s}. \quad (65)$$