

Concavidade e ponto de inflexão

- Antes precisamos falar de:

Segunda derivada

- Para estudar a concavidade vamos precisar "derivar duas vezes" a função.

- Suponha f uma função derivável.

$\therefore$ temos a função $f': x \rightarrow f'(x)$

Se f' também for derivável, podemos definir a função

$$(f')' : x \rightarrow (f')'(x)$$

Definição: $f''(x) = (f')'(x)$ é chamada de derivada de segunda ordem (ou segunda derivada de f).

Exemplo: $f(x) = x^4 + 3x^2 + x + 1$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x + 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6$$

Obs: Para achar f'' , temos sempre que antes achar f' .

- Vamos agora ver como usar a segunda derivada para estudar a concavidade de uma função.

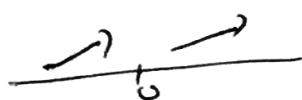
• Concavidade e ponto de inflexão:

Exemplo: Seja $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

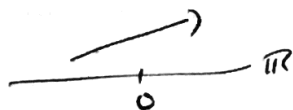
Vimos que $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ (I = intervalo) $\Rightarrow f$ é (estritamente) crescente em I .

Então segue que: $x > 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 > 0 \Rightarrow f$ é crescente em $[0, +\infty[$



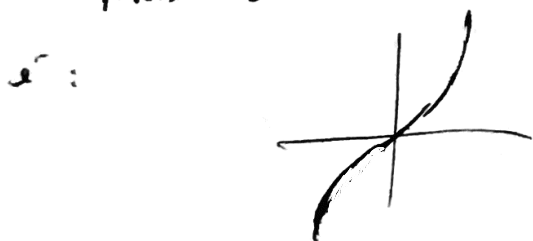
$x < 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 > 0 \Rightarrow f$ é decrescente em $] -\infty, 0[$.

Como $f(x) = x^3$ é contínua, podemos concluir que f é crescente em $\mathbb{R}$:



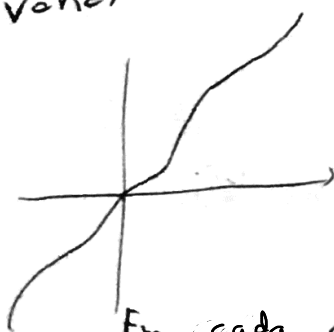
(Note que ter só um ponto onde $f(x) = 0$, não atrapalha f ser crescente neste caso pois f cont. em $\mathbb{R} = \mathbb{R}$ (importante)
 $\Rightarrow$ em intervalo

Mas como sabemos que o gráfico é:



?

Uma função contínua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, pode "crescer de várias formas":



...

Em cada caso f cresce de uma forma diferente, inclusive tendo "taxas de crescimento" diferentes. A função pode crescer mais rápido ou devagar, o que pode ser importante sabermos.

• Queremos estudar a concavidade de f e quando ela muda, para com isso entendermos melhor o comportamento de f , incluindo conseguirmos esboçar melhor o gráfico.

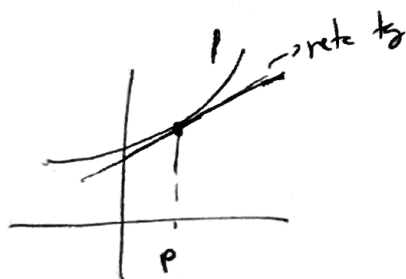
• Gráficamente:

"Def": Uma função tem

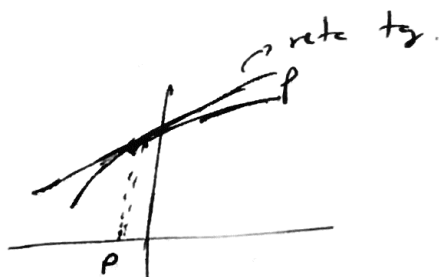
- concavidade para cima se o gráfico é de forma $\cup$
- concavidade para baixo se o gráfico é de forma $\cap$

• Obviamente, essa é apenas uma ideia geométrica, não é uma definição de fato. Não é suficiente para, por exemplo, mostrarmos algum teorema.

Pergunta: Como definir a concavidade de uma forma precisa?



concavidade para cima
($\cap$) reta tg abaixo do gráfico



concavidade para baixo
($\cup$) reta tg acima do gráfico

• Suponha f derivável em $I =]a, b[$ e $p \in I$. Sabemos que a reta tangente ao gráfico de f em $(p, f(p))$ é dada por $y - f(p) = f'(p)(x - p) \Rightarrow y = f(p) + f'(p)(x - p)$

Notação: Seja $T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$

(função cujo gráfico é a reta tg a $(p, f(p))$.)

Definição: Suponha f derivável em $I =]a, b[$. Dizemos que:

(a) f tem concavidade para cima em I se $f(x) > T_p(x) \forall x \in I, x \neq p$, ~~para~~ qualquer que seja $p \in I$.

(b) f tem concavidade para baixo em I se $f(x) < T_p(x) \forall x \in I, x \neq p$, qualquer que seja $p \in I$.

(c) $p \in \text{Dom } f$ é um ponto de inflexão se p é um ponto de mudança de concavidade.

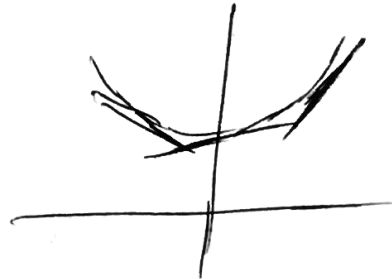
• Mas como usar a segunda derivada para estudar a concavidade de f ?

• Intuitivamente:



→ note que coef. angular dos retos $\downarrow$ de cresce

concavidade para baixo
 $\hookrightarrow f'$ decresce $\hookrightarrow f'' < 0$
 $(f')'$



concavidade para cima $\hookrightarrow$
 f' cresce $\hookrightarrow (f')' = f'' > 0$

Obs: Pode pensar também na taxa de crescimento da função,

se a função cresce mais rápido ou mais devagar (note nos desenhos) que isso muda dependendo se é concavidade para cima ou para baixo.

crescimento ou decréscimo $\hookrightarrow$ derivada (coef. ang.)

taxa de crescimento $\hookrightarrow$ derivada da derivada (f'')
 (como o coef. angular varia)

- Estas ideias intuitivas são apenas para percebermos as "relações naturais." Não provamos nada ainda!
- Mas o que de fato vale? Qual implicação vale e qual não vale? Precisamos enunciar e provar.

• Temos o seguinte:

Teorema: Seja f uma função com derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I . Então:

- (a) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade para cima em I .
- (b) $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ tem concavidade para baixo em I .

Dem de a) (b) é análogo)

Fixe $p \in I$ qualquer e seja $T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$.

Precisamos mostrar que $f(x) > T(x) \quad \forall x \in I, x \neq p$. Para

isso, ^{vamos} ~~precisamos~~ mostrar que $f(x) - T(x) > 0 \quad \forall x \in I, x \neq p$, que é equivalente.

Seja $g(x) = f(x) - T(x), x \in I$.

Note que $g(p) = 0$. Temos que $g'(x) = f'(x) - T'(x) = f'(x) - f'(p)$.

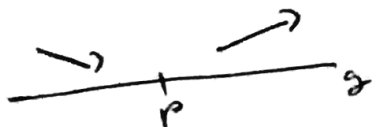
Por hipótese $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f'$ é crescente em I .

$\therefore x < p \Rightarrow f'(x) < f'(p) \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g$ é decrescente
 $\cdot x > p \Rightarrow f'(x) > f'(p) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g$ é crescente.

Mas $g(p) = 0$

Logo $g(x) > 0 \quad \forall x \in I, x \neq p$

$\therefore f(x) > T(x) \quad \forall x \in I, x \neq p$,
 como queríamos



Exemplo: Seja $f(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Vamos estudar f com relação ao crescimento e decrescimento, concavidade e ponto de inflexão e esboçar o gráfico.

da in flexão e esboçar o gr.

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot -\frac{2x}{2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = -x e^{-\frac{x^2}{2}}}$$
$$f''(x) = (-x e^{-\frac{x^2}{2}})' = -(e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-\frac{x}{2}))$$
$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = (x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\therefore f'(x) = -x e^{-x^2/2} / v_0$$

P' $\xrightarrow{+}$ $\xrightarrow{-}$
 P $\xrightarrow{\quad}$ $\xrightarrow{\quad}$

$$f''(x) = (x^2 - 1) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{0}}$$

p''

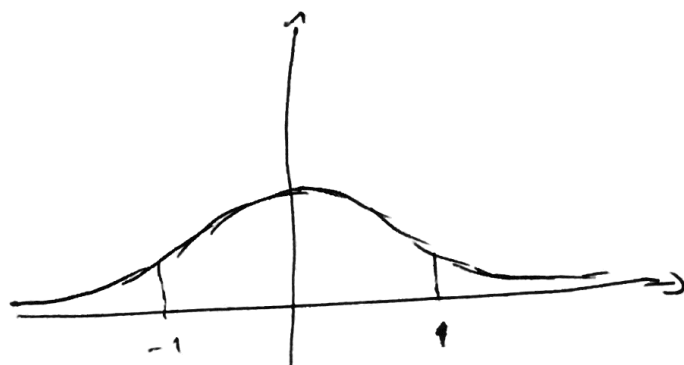
f é concavidade pr cima
 em $]-\infty, -1]$ e $[1, +\infty[$ e
 concavidade pr baixo em $[-1, 1]$
 Pontos de inflexão: -1 e 1

crescente en
 $]-\infty, 0]$ e
decreciente
en $[0, +\infty[$

Grafico:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n^2/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{n^2/2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0$$



Exercício 1 Fazer o mesmo para $f(x) = x^4 - 4x^3$.