Diagonalização

MAP 2110 - Diurno

IME USP

16 de junho

Exemplo: Equação de recorrência

As relações de recorrência são formas de descrever a evolução de uma variável conforme avançamos no "tempo". No nosso caso o "tempo"é o conjunto de números naturais $\mathbb{N}$ ou inteiros $\mathbb{Z}$. Vamos analisar um exemplo simples. Tomei um empréstimo de R$1000,00 com juros de 6% ao ano. Quanto devo pagar ao fim do quinto anos (O juros serão cobrados uma vez ao ano!)

- $P_k = 1.06 * P_{k-1}$ relação de recorrência.
- $P_k = (1.06)^k P_0$ solução (permite resolver o problema)
- $P_5 = (1.06)^5 * (1000) = \text{R\$}1338.23$

$$I_k = 2I_{k-1}$$
$$I_{10} = 2^{10} I_0 = 1024 I_0$$

$$I_k = 2I_{k-1} - 2D_{k-1}$$
$$D_k = 0.01 * I_{k-1}$$
$$\begin{bmatrix} I_k \\ D_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_{k-1} \\ D_{k-1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} I_{10} \\ D_{10} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.01 & 0 \end{pmatrix}^{10} \begin{bmatrix} I_0 \\ D_0 \end{bmatrix}$$

Sequência de Fibonacci

$$F_0 = 1 \; F_1 = 1$$

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \text{ recorrência de ordem 2}$$

Podemos escrever a equação de Fibonacci em um sistema:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_k = F_k \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{10} \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^9 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo do livro

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{j_k}{4}$$
$$j_{k+1} = 2a_k$$

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ j_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \text{ com } \begin{bmatrix} a_0 \\ j_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Problema geral

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$$

para achar a solução em tempo n

$$\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0$$

Como calcular A^n ?

Uma matriz quadrada $D = [d_{ij}]$ é uma matriz diagonal quando $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Neste caso é mais fácil achar a pontência D^n, pois esta também será diagonal, bastando calcular as potências dos números na diagonal. **exemplo**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ então } A^{10} = \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentando facilitar as contas

Considere o problema geral

$$\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_k$$

e nossa intensão é achar uma fórmula para $\mathbf{v}_n$ em função de $\mathbf{v}_0$. Vamos escolher uma matriz invertível P, com as dimensões de A e fazer a mudança de variável

$$\mathbf{v_k} = P\mathbf{u_k} \text{ ou } P^{-1}\mathbf{v_k} = \mathbf{u_k}$$

Com essa modificação nossa fórmula de recorrência fica:

$$P\mathbf{u_{k+1}} = AP\mathbf{u}_k \implies$$
$$\mathbf{u_{k+1}} = P^{-1}AP\mathbf{u_k}$$
$$\mathbf{u_{k+1}} = B\mathbf{u_k} \text{ com } B = P^{-1}AP$$

Será que B pode ser diagonal?

Se B for diagonal então teríamos um jeito de calcular A^n a partir de B^n pois:

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}APP^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP \implies$$
$$A^n = PB^nP^{-1}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 33 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Problema

Será que para toda matriz quadrada A existe uma matriz P invertível talque $P^{-1}AP = B$ seja uma matriz diagonal?
Vamos tentar com uma matriz 2×2
Experimento: suponha que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e que existe uma matriz $P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$ que seja invertível e que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ Então, multiplicando à esquerda por P temos:

$$A \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Vamos agora igualar as colunas das matrizes dos dois lados da equação: Para a primeira coluna temos.

$$A \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

e similarmente para a segunda coluna:

$$A \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Estas equações também podem ser escritas como:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ e } (A - \lambda_2 I) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = 0$$

Para P ser invertível as colunas não podem ser nulas, então devemos ter soluções não triviais destas equações homogêneas. ou seja $\det(\lambda_1 I - A) = 0$ e $\det(\lambda_2 I - A) = 0$ Isso vai restringir as possibilidades para λ_1 e λ_2. Calculando o $\det(\lambda I - A)$ temos

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = p(\lambda)$$

As raízes deste polinômio serão os nossos λ_1 e λ_2. Chamaremos $p(\lambda)$ de polinômio característico de A e suas raízes (que poderiam ser números complexos), chamaremos de autovalores de A. No nosso caso experimental temos duas raízes

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Agora precisamos achar as colunas $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

encontrando os autovetores

Para λ_1 temos

$$p_1 + p_2 = \lambda_1 p_1$$
$$p_1 = \lambda_1 P_2$$
soluções são da forma
$$p \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A outra equação é similar e temos

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Sumário

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$

- $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ é um polinômio de grau n
- Suas raízes serão chamadas autovalores de A
- Um vetor não nulo $\mathbf{v}$ que satisfaz $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$ é chamado de autovetor associado a λ.
- Se encontramos n autovetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n$, então a matriz $P = [\mathbf{v_1} \cdots \mathbf{v}_n]$ é invertível e $P^{-1}AP$ é diagonal.
- No caso acima dizemos que A é diagonalizável.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Achar o polinômio característico e os auto valores.
2. Achar os autovetores e a matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.